
EX-LIBRIS
BORBA
MORAES
RUBENS BORBA
ALVES DE MORAES

Dedication copy
(Portuguese royal arms
on spine)

F/EO

35

LOGICA
RACIONAL,
GEOMETRICA, E ANALITICA.

LOGICA RACIONAL, GEOMETRICA, E ANALITICA,

OBRA UTILISSIMA,

E absolutamente necessaria para entrar em qualquer sciencia, e ainda para todos os homens, que em qualquer particular, quizerem fazer uso do seu entendimento, e explicar as suas idéas por termos claros, proprios, e intelligiveis.

DEDICADA

AO SERENISSIMO SENHOR

D. ANTONIO, INFANTE DE PORTUGAL,

ORDENADA

POR

MANOEL DE AZEVEDO FORTES,

Cavalleiro professo da Ordem de Christo, Academico da Academia Real da Historia Portugueza, Sargento mór de Batalha dos Exercitos de Sua Magestade, e Engenheiro mór destes Reynos, &c.

LISBOA:

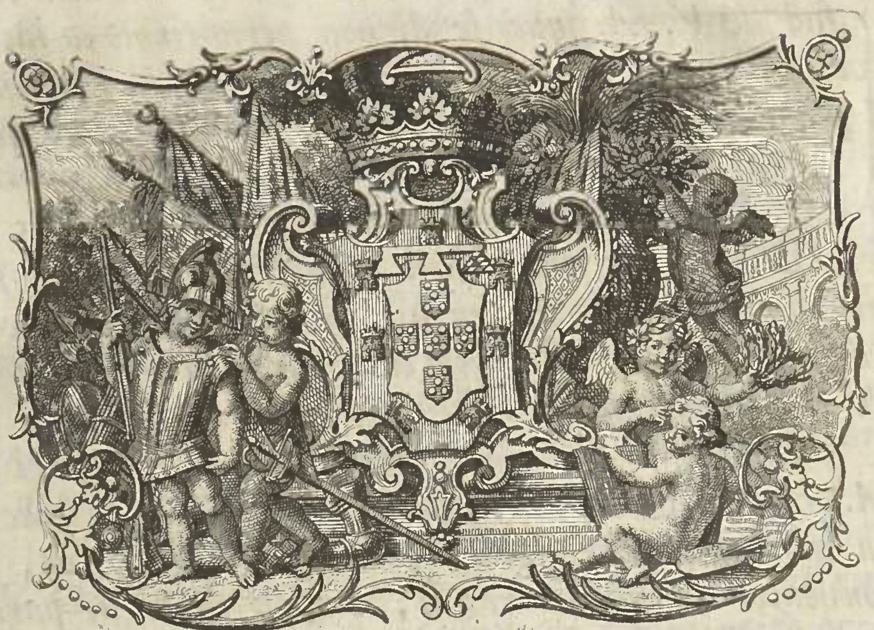
Na Offic. de JOZE' ANTONIO PLATES.

M.DCCXLIV.

Com todas as licenças necessarias.

Eques Vieira Luzitano deliniavit

Olivarius Cor Sculpsit



SERENISSIMO SENHOR

ANIMAR-SE *a minha confiança a dedicar a VOSSA ALTEZA este opusculo de Logica racional, he por ter muy pouco de offerta, e muito de divida, e de restituiçaõ; pois que a mayor parte das*

 refle-

reflexoens, de que he composta, saõ partos da alta comprehensaõ de V. A. que se dignou permitirme a incomparavel honra de hir aos seus pés com alguma frequencia, para curiosamente se entreter com algumas questoens Filosoficas.

Com este Regio conhecimento, tive repetidas occasioens de observar em V. A. hum sem numero de perfeitas qualidades, todas raras, todas estimaveis, e todas dignissimas de se publicarem, para servirem de exemplo á posteridade.

Logo nas primeiras conversaçoens reconheci em V. A. huma innata propensaõ ao amor da verdade, e huma direitura de espirito, que nunca se satisfez, sem se convencer da ultima razaõ; e assim entre as partes, de que a Filosofia se compoem, mostrey eu a V. A. a pouca utilidade, que se podia tirar da primeira parte, que he a Logica, sendo tratada do modo, que se ensina nas Escollas; e sobre as ajustadas reflexoens de V. A. fiz eu o projecto de ordenar esta, que agora lhe restituo: tudo o que nella se acha mais confórme á recta razaõ, se deve á sua perspicaz intelligencia; de que resultou tratarem-se nesta obra os mais importantes conhecimentos da vida, como o conhecimento da nossa alma, e da sua immortalidade, de que immediatamente se deduz a exîstencia do seu Creador; tudo quiz V. A. que fosse bem demonstrado; e com justissima razaõ; porque para nós, que somos fieis, supre a nossa Santa Fé a falta do conhecimento; porém isto naõ basta para convencer aos impios, e aos infieis.

A generosa modestia de V. A. me segura, que as expressoens usadas, e simples de hum homem, que só escreve o que verdadeiramente crê, lhe seràõ mais agradaveis, do que os exagerados louvores daquelles, que se servem dos termos, e das expressoens estudadas da mais pomposa eloquencia.

A verdade tem muito mayor força, do que teriaõ as mais finas, e as mais dilicadas expressoens da

Re-

Retorica, para mostrar o raro talento, e solida penetraçaõ do claro juizo, que todos em V. A. reconhecem, e todos admiraõ, e duvidaõ se possa achar outro entendimento mais dilicado, mais solido, mais pulido, nem mais cultivado com a liçaõ dos livros,

Desta liçaõ tem V. A. adquirido o vasto conhecimento, com que em toda a materia discorre com exacçaõ, e propriedade. Os livros, ou quaesquer outros escritos, que lhe vem ás mãos, naõ passaõ sem huma critica, igualmente fina, e judiciosa; e taõ ajustada com a Moral Christãa, que só se sente a agudeza do engenho, sem a menor sombra de malinidade.

O Supremo Author da natureza, que formou em V. A. huma alma taõ bella, e com dotes taõ raros, quiz, que os do corpo lhe fossem de algum modo proporcionados, na galharda estatura, na Magestosa presença, e na grande agilidade de todos os seus movimentos.

Assim vemos em V. A. exercitadas todas aquellas boas artes, que saõ dignas de hum Principe: a Equestre, a Venatoria, a Musica, e alguns de seus instrumentos, sobio V. A. ao seu mayor auge. As principaes lingoas da Europa, lhe saõ taõ familiares, como a materna. Naõ tenho atéqui dito cousa, que naõ seja a pura verdade, e diria muito mais, se hum elogio, ainda que verdadeiro, naõ passasse a offender a modestia, que em V. A. em nada cede ás mais virtudes.

Manoel de Azevedo Fortes.

ANTILOQUIO.

HA muitos annos, que tenho reparado no pouco fruto, que os Estudantes tiraõ do anno, que empregaõ no estudo da Logica, que ordinariamente se ensina nas Escollas; e fallando eu com muitas pessoas doutas, e de claro juizo, todos convieraõ em que semelhante estudo, mais servia para embaraçar, e confundir as nossas idéas, do que para aperfeiçoar as operaçoens do nosso entendimento, que he o fim principal da Logica.

As mesmas pessoas me seguraõ, que tudo o que se costumava tratar nas ditas Logicas, era fundado sobre idéas vagas, e abstractas, movendo dellas hum grande numero de questoens ridiculas, e inuteis, de *Entes* de razaõ, *universaes*, *e cathegoricas*, de que se deviaõ esquecer os que as tivessem sabido, para depois poderem fallar com os outros homens, por termos claros, e intelligiveis.

Outros me seguráraõ, que tinhaõ chorado o tempo, que haviaõ inutilmente gastado naquelle estudo; e que só valendo-se elles da Logica natural, que he a luz da nossa razaõ, para poderem perceber, julgar, e discorrer nas outras Sciencias, haviaõ adquirido mais claro conhecimento, ajudados da Geometria, e de outras partes da Mathematica, a que ſe haviaõ aplicado.

He certo, que todas aquellas argucias, e queſtoens frivolas, em que os Eſtudantes gaſtaõ o tempo, ſaõ improprias para o fim, que ſe pertende; e quando alguem lhe moſtra a ſua inutilidade, logo acódem, dizendo, que ſaõ aquellas queſtoens para aguçar o entendimento, como ſe eſte ſe naõ podèra aguçar com muito mayor utilidade em couſas, que nos poſſaõ ſervir melhor para o uſo da vida: o que ſeria muito mais conforme com a fraqueza do noſſo entendimento, pouca duraçaõ da vida; e o muito, que nos falta por ſaber, para a podermos paſſar honeſtamente, como diz certo Author moderno.

Acuenda eſſe ingenia ayunt, id ipſum cum ipſis ſentio, ſed potius ad lapidem angularem veritatis, quam ad cotem nugacitatis. Faſcinatio nugacitatis obſcurat bona.

A Logica foy inſtituida (como diz outro Author moderno) naõ para diſputar; mas para enſinar a diſputar; e os que a fazem diſputavel, he neceſſario, que outra lhe preceda, que ſem ſer diſputada, os enſine a diſputar.

Si Logicam diſputabilem reddis, alia ipſi præmittenda eſt, quæ non diſputata doceat diſputare.

A verdadeira Logica arteficial deve remover todos os impedimentos, que o noſſo entendimento tem para bem perceber, julgar, e diſcorrer, e he ſem duvida, que os mayores impedimentos naſcem das noſſas paixoens; pois he eividente, que o homem apaixonado, naõ julga o q̃ he juſto; mas ſim o que a

ſua

ſua paixaõ lhe dicta ; e como os actos da noſſa vontade eſtaõ ſugeitos ás noſſas paixoens, he evidente, que a Logica, que os naõ dirige, naõ he verdadeira Logica.

A noſſa alma (como em ſeu lugar moſtraremos) naõ he ſó intelligente ; mas tambem ſenſitiva: naõ ſó percebe, julga, e diſcorre; mas tambem quer, ou naõ quer, eſcolhe, e ſe determina ; e ſe ao meſmo tempo naõ dirigirmos os actos da noſſa vontade, nunca nos livraremos dos erros; e naõ ſó dos erros; mas tambem dos peccados, que tiraõ a mais funeſta conſequencia; porque os defeitos do noſſo entendimento, ſaõ ſó erros; porém os defeitos da noſſa vontade ſaõ vicios, e ſaõ peccados. E naõ devemos perder a dobrada ventajem de dirigir, e aperfeiçoar ao meſmo tempo os actos deſtas duas potencias da noſſa alma.

Naõ ſe diga, que a Moral he outra parte da Filoſofia, e que ſe naõ deve tratar na Logica ; pois tem differente objecto : a que ſe reſponde, que todas as Sciencias tem muitas couſas commuas, e reciprocamente ſe ajudaõ humas às outras ; e naõ he nenhum attentado de que aqui tratemos dos actos da noſſa vontade, pela grande affinidade, que tem com a Logica Racional ; nem devemos tratar os confins das outtas Sciencias com tanto eſcrupulo, como os Principes guardaõ os confins dos ſeus Eſtados.

Os Profeſſores da Logica, que ordinariamente ſe enſina nas Eſcolas, naõ nos devem fazer eſta objecçaõ ; porque todas as ſuas Logicas eſtaõ cheyas de queſtoens da Methafiſica, de que ſenaõ tira nenhuma utilidade ; ſendo grande a que ſe tira da direcçaõ dos actos da noſſa vontade.

As

ANTILOQUIO.

As duas principaes potencias da noſſa alma, ſaõ o Entendimento, e a Vontade; e eſtas duas faculdades da noſſa alma devem ſer ao meſmo tempo dirigidas; pois a meſma alma he a que entende, e a que quer; e para querer o que he juſto, deve ſer inſtruida, para naõ ficar na ignorancia, com que ſe determina para o bem ſenſivel, antepondo-o ao bem racional; porque, como diz certo Author, deſta ignorancia naſcem os peccados.

Peccata omnia ab ignorantia proficiſcuntur, neque ullus aliquando electurus mala, niſi deceptus imagine boni, neque declinaturus bona, niſi imagine mali.

Conſiderando eu attentamente o quanto ſeria para deſejar, que ſe introduziſſe neſte Reino hum novo methodo de tratar a Logica, fiz tençaõ de compor eſte opuſculo; mas mil vezes ſe me repreſentàraõ as muitas calumnias, a que me expunha, contra tantas Eſcollas, em que a Filoſofia ſe acha dividida, entre Thomiſtas, Scotiſtas, e Eſcola Media, e cada hum dos ſeus Profeſſores, preocupados da ſua opiniaõ, e muito peyor dos Profeſſores da Logica ordinaria, divididos em Realiſtas, Nominaes, e Integraes; como ſe a verdade ſe podeſſe achar em ſemelhantes opinioens, em que ſó tem lugar as idèas abſtractas, methafiſicamente tratadas, em que a mayor parte gaſtaõ o tempo em ſuperfluidades, arguindo-ſe com ellas huns aos outros, gaſtando hum anno neſtas inutilidades os diſcipulos, dos quaes, de cento, apenas dous, ou tres chegaõ a ſaber os nomes; ſendo certo, que tiradas as ſuas argucias, poderiaõ dentro de hum anno no eſtudar huma boa Logica, como diz hum Author moderno.

Schola A arguit Schólam B, ſuperfluarum argutationum: Schóla B arguit, Schólam A, ſuperfluarum definitionum, atque formalitatum: nunquid ſi utriuſque ſuperflua præſcindas, habebis facilem, & brevem unius anni Logicam?

Sem embargo das minhas conſideraçoens, me determiney a ſahir à luz com eſta Logica, naõ com tençaõ de refutar os que ſeguem outras Logicas; porque ainda que eſcrevo para todos com deſejo de ſer util à minha Naçaõ, mais particularmente eſcrevo a favor dos Officiaes militares da minha profiſſaõ, aos quaes entendo ſer precisa a Logica racional, para poderem ſatisfazer cabalmente as ſuas obrigaçoens, dirigindo com os ſeus preceitos os actos do entendimento, e os movimentos da vontade; pois he certo, que os Officiaes Engenheiros (ſendo quaes devem ſer) álem de que com o valor, ſaõ os que mais contribuem nos mayores perigos da guerra á ſegurança dos Exercitos, e dos Preſidios, pela ſua capacidade, ſaõ conſultados dos Generaes, e entraõ com elles no Conſelho de Guerra; e devem dar razaõ cabal dos ſeus projectos, e explicarſe por termos proprios, claros, e intelligiveis, para que os Generaes ſe capacitem das ſuas idèas, o que naõ poderáõ fazer, ſenaõ conhecerem diſtinctamente as faculdades da alma, e o uſo, que dellas devem fazer, para adquirir a verdade, que no ſentir de Plataõ, he o fim, que os verdadeiros Logicos ſe devem propôr.

At revera nobis oſtenſum eſt, quod ſi purè aliquid cognoſcere velimus ab ipſa anima res ipſæ ſunt conſiderandæ, & tunc continget nobis ſapientia, quam cupimus, & veritas, cujus amatores ſumus. Plat.

Os Officiaes Engenheiros, para os quaes eſcrevo, devem pôr hum grande cuidado em ſe fazerem

rem ſamiliares ás regras, e preceitos, que lhes preſcrevo, e devem fogir de ter diſputas, e altercaçoens, com os que ſeguem diferente doutrina; porque depois que o eſpirito de parcialidades ſe introduzio nas Eſcolas, cada hum faz ponto de honra de naõ ceder da ſua opiniaõ; e neſſe caſo, naõ ſe devem cançar em lhes moſtrar a verdade, que naõ acha lugar em entendimentos preocupados; nem nos podemos livrar de que elles prevenidos das ſuas opiniões ſintaõ mal da noſſa doutrina; pois que diſſo ſe naõ livráraõ os Apoſtolos, e Evangeliſtas, como diz hum Author moderno.

Ne quis noſtris dictis abutatur præſtare nequimus, ſiquidem nec Apoſtoli, nec Evangeliſtæ id cavere potuerint. Siquis mala natura ſit, talem, nec lynceus efficere poſſit ut videat.

Entre os antigos, como naõ havia parcialidades, eſcreviaõ com mayor liberdade, e ſocego; e aſſim nos deixaraõ excellentes documentos; e hoje a mais renhida diſputa entre os Filoſoſos, he de ſaber, quaes ſaõ os que melhor eſcreveraõ; e eſta diſputa dura ha muitos annos, e ainda ſe naõ determinou, nem determinará nunca, ſalvo ſe a puzerem a examinar no tribunal da recta razaõ, naõ tratando a queſtaõ (como de ordinario ſazem) tumultuariamente; mas ſim examinando, e comparando, por exemplo, a Moral de huns, com a Moral de outros, e aſſim das mais Sciencias; porém em geral, naõ podemos negar o muito que devemos aos Antigos, que nos abriraõ o caminho, e nos déraõ as primeiras luzes do conhecimento; tambem naõ podemos negar, que os Modernos tem adiantado o noſſo conhecimento, de ſórte, que do ſeculo paſſado, a eſta parte, ſe tem feito nas Sciencias mayor progreſſo, do que em todos os mais ſeculos, que tinhaõ precedido; porém foy apro-

aproveitando-ſe do que os Antigos lhes haviaõ enſinado; e quando queiramos dar aos Antigos o titulo de Gigantes, e aos modernos, de Pygmèos, he certo, que hum Pygméo ſobre os hombros de hum Gigante alcança muito mais longe com a viſta, e em certo modo, os Modernos ſaõ os Antigos; porque o mundo era mais moço, quando os Antigos eſcreveraõ.

Vemos, que todos os antigos Filoſofos começaraõ os ſeus eſtudos pela Geometria, que entenderaõ abſolutamente neceſſaria para poder paſſar ao conhecimento de todas as couſas naturaes; e eſta ſe acha taõ deſprezada nas Eſcólas deſte Reyno, que ſaõ muy poucos os Filoſofos, que paſſaõ de ſaber a Arithmetica ordinaria; e os Antigos entenderaõ ſer taõ neceſſaria a Geometria, que prohibiaõ a entrada das Academias Filoſoficas, aos que naõ eraõ Geometras.

Neſte Reyno affirmaõ os Profeſſores, que a Filoſofia, que enſinaõ, he de Ariſtoteles, ſendo certo, que o meſmo Ariſtoteles ouvio por eſpaço de vinte annos a Filoſofia de ſeu Meſtre Plataõ, e no frontiſpicio da porta da Academia eſtava hum letreiro, em que ſe liaõ as ſeguintes palavras:

Nenhum entre aqui,
que naõ ſeja Geometra.
Nemo Geometriæ expers
húc ingrediatur.

O que ſuppoſto, ou a Filoſofia, que hoje ſe enſina nas Eſcólas, he a meſma de Ariſtoteles, ou outra diferente? naõ ſe póde dizer, que he a meſma, ma, que Ariſtoteles enſinou; porque eſſa era taõ conjuncta com a Geometria, que ſe naõ dizia Filoſofo, o que naõ era Geometra.

Logo devemos dizer, que a vulgar Filoſofia, que hoje ſe enſina nas Eſcólas, naõ he de Ariſtoteles, ou he adulterada, que degenerou da antiga ſabedoría; e aſſim ſe naõ póde dizer Platonica, nem Ariſtotelica, a que taõ longe ſe apartou dos veſtigios, e documentos, que eſtes grandes Filoſofos nos deixáraõ.

Iſto ha de cuſtar muito a confeſſar aos Filoſofos vulgares, que ſe jactaõ de guardar religioſamente a doutrina de Plataõ, ou de Ariſtoteles; e tem por ſuſpeitos de erro, e temeridade aos Modernos, cuja doutrina regeitaõ por contraria a Ariſtoteles, ainda que lhe he muito mais confórme, do que a que elles enſinaõ; de que tambem os Modernos ſe queixaõ, e dizem com Santo Agoſtinho, que leaõ primeiro, e depois regeitem, e deſprezem; porque ſe lhes naõ diga, que julgaõ aquillo, que ignoraõ:

Legant priùs & poſtea deſpiciant, ne videantur ignorata judicare. S. Aug.

O meſmo Ariſtoteles, que nos deu o methodo, e regras para a boa demonſtraçaõ, declara, que ſe ſervio da Geometria de Euclides, livro primeiro, propoſiçaõ 32; porque he na Geometria principio inconteſtavel, que ſe duas couſas ſaõ iguaes a huma terceira, he evidente, que ſaõ iguaes entre ſi; e aplicando Ariſtoteles eſte principio á Filoſofia, deu por regra, que em toda a demonſtraçaõ legitima, os dous termos da concluſaõ ſe haviaõ de identificar com o meyo termo.

Toda a Filoſofia conſiſte em buſcar a verdade; o que o que se naõ consegue, senaõ por meyo de proporçoens, e comparaçoens, pelas quaes se mostra, que as cousas, que examinamos, ou se confórmaõ entre si, ou repugnaõ. Quando digo, *que o todo he mayor, que a sua parte*, ou *as partes juntas saõ iguaes ao todo*; a verdade destes principios, naõ consiste na natureza dos extremos; mas sim na proporçaõ de igualdade; e mal póde o Filosofo, sem Geometria descobrir as proporçoens, de que naõ tem noticia alguma; e sem ellas lhe naõ será possivel discorrer com ordem sobre as cousas naturaes.

Haja quem justifique, que sem Geometria poderá explicar mais de seiscentos lugares de Aristoteles. Quem fizer a experiencia, reconhecerá a impossibilidade, que acha, para entrar no conhecimento das cousas naturaes, em que o *Movimento* tem a mayor parte: tanto o entendeo assim Aristoteles, que deu por axioma, que, ignorado o movimento, se ignorava a natureza:

Ignorato motu, ignoratur natura.

O movimento he o principal instrumento da natureza para a producçaõ, e conservaçaõ; como tambem para a variedade, e procreaçaõ das cousas creadas; e sem movimento se acabaria de repente a ordem da natureza.

Galileo foy o primeiro, que excogitou o movimento de acceleraçaõ na descida dos corpos graves, e abrio a porta aos mais Filosofos, como confessa o doutissimo Thomás Obes.

O movimento, de que aqui fallo, he o movimento local, e naõ certos movimentos quimericos,

 ou

ou ao menos incertos, que nas Eſcólas chamaõ movimentos de geraçaõ, e alteraçaõ para certas fórmas ſubſtanciaes corpóreas, ou para adquirir outras inexcogitaveis entidades accidentaes.

Quem conſiderar o movimento na decida dos graves em hum plano horizontal, ou inclinado, e notar o creſcimento das ſorças, e a reſiſtencia, e equilibrio dos córpos, reconhecerá a grande neceſſidade, que a Filoſofia tem da Mathematica.

Naõ ſe póde duvidar, que a Arquitectura do Univerſo conſiſte em certa proporçaõ armonica dos córpos, que o Author da natureza creou em numero, pezo, e medida, a ſaber, ſegundo as leys da Geometria, da Arithmetica, e da Statica, como dicta a razaõ, e ſe confirma pela doutrina de Ariſtoteles.

Os Filoſofos, que ignoraõ a Mathematica ſe privaõ dos mais uteis, e mais conſpicuos conhecimentos da vida; porque álem do que os Antigos nos deixaraõ, he para admirar o muito, que os Modernos tem deſcuberto na fabrica do mundo, por meyo da Mathematica.

Tudo nos ſeria incognito até o preſente, ſe Copérnico, Tychobrahe, Règiomontano, Robervalio, Keplero, e Galileo, nos naõ deſcobriſſem tantas maravilhas.

Do que fica dito ſe ſegue, que a Filoſofia, que hoje ſe enſina nas Eſcólas, naõ he a meſma, que Ariſtoteles nos deixou eſcrita; ou ſe he a meſma, ſe acha adulterada, e viciada; e aſſim havia de ſucceder; porque no tempo da decadencia do Imperio Romano,

que

que toda a Europa ardia em guerras, e se achavaõ extinctas as boas letras, e corrupta a latinidade, passaraõ os escritos de Aristoteles para Affrica, que gozava ao mesmo tempo huma paz tranquilla: Avicena, e Averroes, dous famosos Medicos Africanos, começaraõ a ensinar publicamente a Filosofia de Aristoteles, e a encheraõ de mil entidades quimericas, e superfluas naquillo, em que naõ entenderaõ bem a mente de Aristoteles

Tambem se acharia já naquelle tempo mudada a significaçaõ de algumas palavras suas; pois he certo, que muitas tem mudado de significaçaõ: por exemplo, a palavra *Demonio*, significava antigamente hum espirito Anjo, ou Intelligencia, e se distinguiaõ os Anjos em bons, e máos; e se naquelle tempo, a palavra *Demonio*, se tomasse em má parte, naõ diria Socrates, estando para espirar, que esperava na bondade do Altissimo, que a sua alma fosse para a Bemaventurança acompanhada dos Demonios. A palavra *Herezia*, naõ ha muitos seculos, que significava huma hypothesi, ou doutrina seguida de alguns homens; e hoje significa hum homem separado, e expulso do gremio da Igreja. A palavra *Tyranno*, antigamente significava hum Principe soberano: veja-se quam diferente he hoje a sua significaçaõ. A palavra *Emperador*, significava antigamente o General de hum exercito, e hoje significa a soberania suprema.

Todo o homem, que reflectir sobre a nossa Lingoa, achará hum grande numero de palavras, que significaõ cousas muy diferentes, do que antigamente significavaõ; e assim naõ he muito, que Avicena, e Averroes entendessem mal a palavra *Privaçaõ*, quando disseraõ, que Aristoteles assignava tres principios

ao

ao corpo, a ſaber, *Matéria*, *Fórma*, *e Privaçaõ*: ſendo certo, que a privaçaõ naõ póde ſer principio influente do corpo, e naõ ſe póde ſuppor, que Ariſtoteles naõ ſoubeſſe muito bem, que antes de ſe fazer huma eſtatua de hum pedaço de páo, eſtava o páo privado daquella figura; porém eſſa privaçaõ naõ influe na eſtatua couſa alguma, que ſó ſe póde chamar á privaçaõ principio remoto do corpo, que de huma configuraçaõ interna paſſa para outra.

A má interpretaçaõ, que ſe tem dado á doutrina de Ariſtoteles, tem ſido occaſiaõ a alguns Modernos prezados de Filoſofos, ſem ſerem mais que enfarinhados, a ſerem perpetuos declamadores contra Ariſtoteles, dando por ſua a Filoſofia adulterada; porém por mais que declamem, naõ lhe haõ de tirar a gloria de Principe dos Filoſofos, e de Filoſofo, por anthonomaſia; e foy tal o ſeu alto talento, agudeza, e penetraçaõ, que coſtumava dizer ſeu Meſtre Plataõ, que quando elle faltava na Academia, faltava nella o eſpirito.

Bem he verdade, que Ariſtoteles naõ eſcreveo a ſua Filoſofia com grande clareza, antes parece, que affectou naõ ſe fazer inteiramente intelligivel; e porque Alexandre ſe enfadou de ter feito publica na ſua auſencia a Filoſofia, que lhe tinha enſinado, ſe deſculpou, dizendo, que a tinha eſcrito de ſórte, que ſem elle meſmo a explicar, a naõ haviaõ de entender.

Em muitas partes uſou de alguns termos methaforicos, por exemplo, quando diſſe, que *ſe a Arte de conſtruir navios eſtiveſſe nos matos, obraria nelles a Arte, como a natureza, e veriamos creſcer os navios, como vemos creſcer as arvores*: neſte, e em outros muitos

tos lugares se explica de sórte, que apenas se entende, o que quer dizer; e com tudo da sua alta capacidade, e doutrina devemos concluir, que nunca seria taõ grande Filosofo, se primeiro naõ soubesse a Logica Geometrica.

Naõ sigo neste opusculo Author algum antigo, nem moderno; porèm de huns, e outros tirey tudo aquillo, que na Logica se acha escrito; e com taõ pouco escrupulo, que me sirvo das suas proprias expressoens; mas he naquella parte, em que elles se conformaraõ com o que a recta razaõ nos dicta, e que póde servir para adiantar o nosso conhecimento.

Os que disserem, que esta obra he huma pura traducçaõ, ainda me fazem muito mayor honra, do que eu mereço; porque o traductor de materia scientifica deve ter tres grandes predicados, de que eu me naõ jacto: em primeiro lugar, deve saber com propriedade a lingoa de que traduz: Em segundo lugar, da mesma sórte deve saber a lingoa, em que traduz: Em terceiro lugar, deve saber com fundamento a matèria, que traduz; e para que a traducçaõ seja exacta, deve bem notar, se o Author, de que traduz, falla em sentido literal, figurado, methaforico, ou mixto; e assim traduzir (salvo for huma novella) naõ he cousa taõ facil, como muitos se persuadem; e talvez que a hum sugeito de mediocre facundia lhe seja mais facil compor, do que traduzir.

Se nos perguntarem a razaõ; porque escrevemos na nossa Lingoa materna, e em hum estilo taõ simples.

Responderemos ao primeiro, que como escrevemos para os Militares, e que nem todos ſabem a lingoa latina, foy preciſo fallarlhe no ſeu idioma, de que temos exemplo nas outras Naſçoens, e no excellente livro, eſcrito na lingoa Franceza, intitulado: a *Logica*, ou *Arte de penſar*; e quanto ao ſegundo, diremos, que os que nas ſuas compoſiçoens affectaõ grande ornato, e elegancia, daõ indicio de pouca ſolidez nos ſeus eſcritos, e procuraõ realçar o pouco, que valem os ſeus conceitos com expreſſoens armonioſas; porém os que eſcrevem materias ſcientificas, para ſe fazerem intelligiveis, naõ devem cahir neſſe vicio; porque nas Sciencias, quanto mais os conceitos ſaõ finos, e delicados, tanto mais neceſſitaõ de termos ſimples, e uſados, para fazer mais ſenſivel, e mais facil de perceber a materia, de que trataõ.

Tambem me lembrou, que as Senhoras Portuguezas, em nada ſaõ inferiores ás Eſtrangeiras, antes as excedem muito em fermoſura, entendimento, e diſcrição; e como menos occupádas, mais curioſas, e mais amigas de ſaber, he força ſerem mais attentas no exame da verdade, e he certo, que aplicando-ſe, faráõ na Filoſofia muito mayor progreſſo, do que os homens.

Naõ ha duvida, que ſe eſta Logica foſſe eſcrita em Latim, ſeria de mayor utilidade; porém ſe houver algum curioſo, que o queira fazer, depois de a emendar, e aumentar no que lhe parecer, accommodando a ſua locuçaõ ao uſo das Univerſidades, e mais Eſcólas particulares, fará niſſo hum grande ſerviço ao publico, e para ſi naõ pequena gloria.

Como eſte opuſculo contèm tres Logicas, Racional, Geometrica, e Analitica, neceſſariamente ſe devia dividir em tres partes; e confeſſo, que me achey emba-

embaraçado, qual dellas devia ſer a primeira; e parece, que naturalmente deviamos dar principio a eſta obra pela Logica Geometrica; porque aſſim como a Racional deve preceder á Filoſofia, pelà meſma razaõ ſe devia dar principio pela Logica Geometrica; porèm como nós naõ podemos conhecer as couſas, que eſtaõ fóra de nós, ſenaõ pelas idèas, que dellas temos, foy preciſo tratar dellas em primeiro lugar; e tambem porque muitos ſem Geometria, poderáõ bem entender a mayor parte da Logica Racional, me pareceo devia ſer eſta a primeira parte; mas porque os exemplos tirados da Geometria ſaõ mais claros, e mais preceptiveis, do que quaeſquer outros, aconſelho aos que naõ forem Engenheiros, que antes de dar principio á Logica Racional, eſtudem primeiro as definiçoens, e o primeiro livro de Euclides; porque deſta ſórte ſe convenceráõ da verdade das demonſtraçoens da Logica Racional, e naõ ſe repare neſta antecipaçaõ; por quanto.

Na meſma Logica Racional, que dividimos em quatro livros, que correſpondem às quatro operaçoens do noſſo entendimento, que ſaõ, *Perceber*, *Julgar*, *Diſcorrer*, *e Ordenar*, tratamos do methodo, em quarto lugar, ſendo que já neceſſitamos de ordem, e methodo para a primeira operaçaõ.

Da primeira parte deſta obra, que he a Logica Racional, naõ ha nada eſcrito no noſſo idioma, e tambem naõ temos nada eſcrito da terceira parte, que contém a Logica Analitica, ou Algebra; e podiamos muito bem eſcuſar de dar á luz a ſegunda parte, que contém os Elementos de Euclides, á viſta do livro dos meſmos Elementos, que doutamente compoz, e deu ao prelo, o Muito Reverendo Padre Manoel de Cam-

pos,

pos, digniſſimo Confeſſor de Sua Alteza, o Sereniſſimo Senhor Infante Dom Antonio ; porèm como o methodo, com que os Modernos trataõ os Elementos de Euclides tem mayor affinidade com o methodo Analitico, que ſepára as demonſtraçoens das linhas, das ſuperficies, e dos ſolidos ſeparadamente ; no que Euclides naõ ſeguio a ordem natural, provando as linhas pelas ſuperfices, e as ſuperfices pelas linhas; tendo mais os novos Elementos a conſideravel ventagem de coſtumar o noſſo entendimento a perceber intellectualmente, ainda as meſmas couſas ſenſiveis com demonſtraçoens mais perceptiveis, e claras, como o meſmo Reverendiſſimo Padre reconhece no ſeu quinto livro, me reſolvi a ſeguilos.

Finalmente, como deſde a noſſa infancia eſtamos coſtumados ao conhecimento das couſas corpóreas, e ſenſiveis, razaõ, porque ordinariamente preferimos o conhecimento do corpo, ao conhecimento do eſpirito, de que ſe originaõ a mayor parte dos erros do noſſo entendimento ; para os evitar, recomendo muito aos que ſe aplicarem ao eſtudo da Logica Racional, ponhaõ hum grande cuidado em ſe capacitar do conhecimento da noſſa alma; porque deſſe conhecimento dependem todas as regras, e preceitos de huma verdadeira Logica; e no ſentir de Plataõ, he o verdadeiro meyo de poder chegar a ſaber, ou ter ſabedoria.

Toda a erudiçaõ dos homens, ſem o amor da verdade, naõ paſſa de vangloria, e o amor da verdade, ſem erudiçaõ erra; e aſſim eſtas duas couſas naõ devem andar ſeparadas ; porque ſó juntas compoem a verdadeira Logica, como diz hum Author Moderno.

Quid facit eruditio, ſine dilectione? Inflat.
Quid facit dilectio ſine eruditione? errat.
Igitur ubicumque eſt vera dilectio ibi eſt magna Logica, minimèque vulgaris eruditio.

LI-

LICENCAS
§
DA ACADEMIA REAL.

APPROVAC,AM DO M. R. P. MESTRE D. LUIZ Caetano de Lima, Clerigo Regular, &c.

EXCELLENTISSIMOS SENHORES.

A Reputaçaõ do Author da preſente Logica, ſe acha geralmente taõ eſtabellecida, que baſtaria o ſeu nome no fronteſpicio da obra, para ſe lhe dar a devida eſtimaçaõ. Faz-ſe porém preciſa eſta cenſura; pois que as leys da Academia naõ permitem ſe imprima obra alguma com o nome de Academico, ſem ſer reviſta por ordem dos Cenſores. Para ſatisfazer agora a eſte eſtatuto, he que interponho aqui o meu juizo; e naõ para dar a conhecer ao mundo a excellencia do livro, de que ſe trata. He fruto a preſente Logica da profunda meditaçaõ de muitos annos, empregados por taõ illuſtre Author neſte importante eſtudo, a pezar das muitas occupaçoens, e empregos militares, em que por ordem ſuperior tem paſſado com tanto credito o mayor eſpaço da ſua vida. Com a ſua grande experiencia conheceo a importancia da materia, e com a ſua ſumma penetraçaõ lhe apontou o methodo mais breve, e mais util, facilitando a todos o eſtudo da Logica, cujos preceitos ſaõ nas Eſcólas mais extenſos, e mais eſcuros. Poderá ter o Author alguns emulos, coſtumados a tratar por tradiçaõ extenſamente eſta materia; mas ninguem lhe poderá tirar a gloria de querer introduzir na ſua Patria huma novidade taõ eſtimavel, e até aqui conhecida de muy poucos, ſuppoſto, que em outros paizes recebida com muito aplauſo. Nem tambem lhe poderáõ achacar, como receava Horacio, que por breve ſe arriſca a ſer eſcuro; pois que com ſumma clareza explica tudo, o que propoem no methodo preſente. Eſte he, Excellentiſſimos Senhores, o juizo, que faço deſta obra, reputando-a muy merecedora de que por meyo da impreſſaõ, ſe faça publica a todos. Lisboa, Caſa da Divina Providencia, aos 10. de Agoſto de 1744.

D. Luiz Caetano de Lima.
C. R.

LICEN-

LICENÇAS
DO SANTO OFFICIO.

APPROVAÇAM DO M. R. PADRE MESTRE Fr. Thomás de S. Jozé, da Ordem da Santissima Trindade, Qualificador do Santo Officio, &c.

EMINENTISSIMO SENHOR.

ESte livro, que com o titulo de *Logica Racional, Geometrica, e Analitica*, intenta imprimir Jozé Antonio Plates, he muito capaz de sahir á luz, por ser genuino parto de seu Author Manoel de Azevedo Fortes, Cavalleiro professo da Ordem de Christo, Academico da Academia Real da Historia Portugueza, Sargento mór de Batalhas, e Engenheiro mór destes Reynos, sugeito assaz conhecido, assim na Republica literaria, como militar. Bem reconheço haverá muitos, que fundados nos seus principios, e nas doutrinas, que nas Aulas ouviraõ, e aprenderaõ de seus Mestres, naõ lhes pareça confórme á razaõ, o que este sapientissimo Author diz, e escreve nesta sua Logica; porque para tudo ha Authores, e opinioens, e principalmente naquellas materias, que naõ saõ muito claras, e naõ se crem como artigos de Fé; porque só a estas, em obsequio da mesma Fé se deve cativar o nosso entendimento; porém como este Sapientissimo Author funda com clareza a sua doutrina, e tem por si a muitos, e sabios Patronos, assim antigos, como modernos, e já neste Reyno se encontraõ muitos apaixonados destas doutrinas, e idéas, me parece, que as póde seguir, quem quizer aproveitarse da sua utilidade; porque (como affirma o seu Sapientissimo Author no titulo da obra) he esta Logica

gica *absolutamente necessaria para entrar em qualquer Sciencia, e ainda para todos os homens, que em qualquer particular quizerem fazer uso do seu entendimento, e explicar as suas idéas por termos claros, proprios, e intelligiveis;* e se este he o fim desta obra, naõ póde haver obra mais util, nem Logica mais sucinta, e facil; e assim a julgo muito capaz de sahir á luz; principalmente nella naõ acho cousa, que se opponha á nossa Santa Fè, ou bons costumes. Assim o julgo: Vossa Eminencia mandará o que for servido. Trindade, Lisboa, 28. de Setembro de 1744.

Fr. Thomás de S. Jozé.

APPROVAC,AM DO M. R. P. MESTRE DOUTOR Manoel de Saõ Lourenço Justiniano, Qualificador do Santo Officio, &c

EMINENTISSIMO, E REVERENDISSIMO SENHOR.

MAnda-me Vossa Eminencia rever a obra egregia, filosofica, ou Logica Racional, Geometrica, e Analitica, que compôz o famigerado Engenheiro mór destes Reynos, Manoel de Azevedo Fortes, Cavalleiro professo da Ordem de Christo, Sargento mór de Batalha dos Exercitos de Sua Magestade, Academico da Academia Real da Historia Portugueza, e quer dar ao prelo Jozé Antonio Plates. Alèm de a ver bem qualificada pelo grande, e merecido nome de seu Author, se illustra já com taõ eximias approvaçoens, que só me restou a sua liçaõ, muitas vezes grata, para confirmar o mayor, e devido conceito, em que dignissimamente he reputado este Lusitano Heroe na penna, e na milicia, merecendo os elogios, que a eloquencia deu a Cezar, nas Armas, e nas Letras, verificando

ficando em si, o que a ficçaõ attribuio a Pallas: Addicionára sómente, que se imprimisse em mais idiomas este livro, para se utilisar das suas doutrinas o universo, e se communicar a todos esta arte de saber com facilidade pelo compendioso, breve, e clarissimo methodo, ou modo de explicar; de cuja variedade, ao tenue sentir do meu juizo, procede julgarem, e naõ julgarem alguns, novas, ou innovadas filosofias, as que nomeaõ adulteradas, e adoptaõ por modernas, asseverando naõ se distinguirem os seus systemas, e raciocinios, identicas as conjecturas, com diversas expressoens de termos: Mas como naõ posso, nem prezumo arguir, nem reprovar a viveza de singulares, e raros engenhos, que floreceraõ, e se admiraraõ em todos os seculos, sem avaliar por extravagancia a sua perspicacia, e comprehensaõ, condescendo com os que exercitaõ a liberdade de filosofar, com tanto, que seja conciliavel com os Divinos sagrados dictames da Fè Catholica, rectos louvaveis costumes da Religiaõ Christãa; a que attende exactamente a instrucçaõ desta Logica Racional; pois tambem ensina a sciencia da salvaçaõ, e dos Santos. He o que entendo, e o meu parecer. Santo Eloy de Lisboa, em 7. de Outubro de 1744.

O Doutor Manoel de S. Lourenço Justiniano.

VIstas as informaçoens, póde imprimirse o livro, intitulado: *Logica Racional*, *Geometrica*, *e Analitica*, de que he Author Manoel de Azevedo Fortes; e depois de impresso, tornarà para se conferir, e dar licença, que corra, sem a qual naõ correrá. Lisboa, 9. de Outubro de 1744.

Fr. R. de Alancastre. Sylva. Abreo. Amaral.

DO ORDINARIO.

APPROVAC,AM DO M. R. P. MESTRE Fr. Antonio de Santa Maria, Qualificador do Santo Officio, &c.

EXCELLENTISSIMO, E REVERENDISSIMO SENHOR.

PAra que este utilissimo livro concilie profundas veneraçoens, e respeitos, com mais justificada causa, que os preceitos de Aristoteles, basta, que no rostro da obra se veja o nome de seu Author. Para esta obra deviaõ os Portuguezes desejar o mesmo, que Alexandre desejou para vencer; porque a preexcelsa doutrina, que contém, he capaz de illustrar mais mundos se os houvesse. Desde a cabeça do mundo, principiou o seu Author a dar creditos á Naçaõ, e á sua patria.

A Lisboa, e a Portugal, veyo este famoso Heroe, em letras, e armas, sepultar no tumulo do esquecimento aquelles, que mais venerou a antiguidade, e celebrou a fama.

A fama deste sabio, naõ voou como a dos mais sabios; porque para os seus aplausos, naõ quiz a fama mais azas, que a sua penna, e a sua lingoa: com a lingoa, e com a penna, se tem elevado tanto, que sem lisonja se póde delle affirmar, o que cantou o Poeta:

Ingrediturque Cœlum, & caput inter nubila condit.

Agora porém, quando escreveo esta Logica Racional, Geometrica, e Analitica, o considero transcender

cender a esfera de todos os filosofos, que respeitou o orbe literario, por oraculos das sciencias; porque só elle soube dar methodo claro, e perceptivel a todos os homens, para poderem entrar em qualquer sciencia, fazendo uso do seu entendimento: os mais com os seus dictames o confundiaõ de sórte, que por mais que o trabalho fosse immenso, sempre para a intelligencia ficavaõ no Labyrinto de Creta. Naõ poucos propuzeraõ regras taõ arduas, e complicadas, que excediaõ o No-Gordio. Quantos formaraõ nas suas Logicas, aquella ponte a que genuinamente deraõ titulo; pois quasi todos os que a passaraõ depois de experimentarem nella o precipicio da ignorancia, se vieraõ a achar tropeçando taõ estolidos, como de antes eraõ.

Finalmente, as Logicas, que atégora se viraõ no mundo, humas perdendo por carta de mais, e outras de menos: humas querendo dar muitas regras para ensinarem tudo, nada ensinavaõ; outras propunhaõ taõ poucas normas para aclarar o juizo, que naõ achava o entendimento abertura, para indagar a verdade; e assim todas eraõ inuteis, impertinentes, e ociosas.

Agora nos dá este Author huma Logica, pela qual o entendimento póde explicar as suas idéas, por termos claros, proprios, e intelligiveis: e he este hum taõ relevante beneficio, que por elle só se lhe devia levantar immortal estatua; mas quando a inveja lha negue, basta-lhe por gloria, dignar-se de aceitar na sua protecçaõ esta obra, hum Principe, a quem Deos com especial Providencia, para exemplar dos Principes, creou com todas as perfeiçoens sem igual, ou semelhante. Este mesmo epigrafe merece esta Logica, naõ só; porque naõ tem huma letra, ou huma sylaba, que offenda a nossa Santa Fé, e bons costumes; mas porque com o seu estudo poderáõ os homens

mens facilmente adquirir cabal ſabedoria. Voſſa Excellencia mandarà o que for ſervido. Lisboa, Convento da Boa-Hora dos Agoſtinhos Deſcalços, 13. de Outubro de 1744.

Fr. Antonio de Santa Maria.

VIſta a informaçaõ, pode-ſe imprimir o livro, de que trata a petiçaõ; e depois de impreſſo torne conferido para ſe dar licença para correr. Lisboa, 13. de Setembro 1744.

D. Jozé, Arcebiſpo de Lacedemonia.

DO

DO PAÇO.

APPROVAÇAM DO M. R. PADRE MESTRE Manoel de Campos, Academico da Academia Real da Historia Portugueza, digniſſimo Confeſſor do Sereniſſimo Senhor D. Antonio, Infante de Portugal.

SENHOR.

LI por mandado de V. Mageſtade a Logica Racional, e Analitica, de que falla a petiçaõ, obra verdadeiramente digna de ſeu Author, o Engenheiro mór do Reyno, Manoel de Azevedo Fortes, e feliz producçaõ do ſeu profundo juizo, e vaſta erudiçaõ: e ainda que o natural effeito deſta liçaõ, devia de ſer a admiraçaõ; todavia o preternatural, a que me obriga a obediencia, he a ſeguinte cenſura.

Tem eſta obra tres qualidades, que raramente ſe achaõ juntas nos livros deſta profiſſaõ: Brevidade, Clareza, e Eſcolha. Pelo que reſpeita á brevidade, faz-ſe digno de particular admiraçaõ, ver como o Author em taõ pequeno volume recolhe toda a vaſtidaõ da Filoſofia, ſem que haja parte della notavel, que nelle ſe naõ ache, ou tocada, ou reſumida. De ſórte, que aſſim como em hum mapa *totius Orbis*, ſe vê recolhida com toda a diſtincçaõ a grandeza do mundo; aſſim neſte mapa racional ſe vê recolhido todo o mundo diſputavel, como lhe chamou Salamaõ: *Mundum tradidit diſputationi eorum*, ſem a menor confuſaõ, e com optima deſtribuiçaõ das materias.

Pelo que toca á clareza, tambem ſe faz digno ainda de mayor admiraçaõ, ver como o breve, a quem commummente acompanha o eſcuro, aqui ſe faz claro; os pontos mais ſubtís, e mais difficultoſos ſaõ tocados com tal arte, as materias perplexas com tal deſembaraço, que a qualquer engenho mediocre ſe fazem perceptiveis: ajudando muito a meſma brevidade á clareza, pela ſelecçaõ de eſpecies, e prolixidade, que evita, que he o que ordinariamente ſe reprova na Filoſofia vulgar.

Pelo que reſpeita á eſcolha, naõ ha duvida, que a do Author he madura, e muy confórme com a razaõ; naõ ſómente pelas queſtoens, que ommite, como deſneceſſarias, ſenaõ tambem pelas opinioens, que ſegue nas que toca, accommodando-ſe ſempre ao que ſe repreſenta mais veroſimil, e menos fantaſtico.

O que unicamente lhe poderáõ notar os Eſcolaſticos, fundados no meſmo texto de Salamaõ, que toquey a cima, he, que ſendo o mundo diſputavel, e todo cheyo de opinioens, de ſórte, que na meſma incerteza dellas, e pouca ſatisfaçaõ, que temos das ſentenças, tanto proprias, como alheyas, ſe faz preciſa a diſputa para aclarar a verdade, o Author propoem as ſuas como dogmas, ſem ſe fazer cargo do que ſe póde offerecer em contrario. Porém eſta nota, a meu ver, he ſem fundamento, ſe ſe faz reflexaõ no fim do Author; por quanto eſte nem pertende enſinar as Eſcólas, nem tirarlhe a liberdade das ſuas opinioens, onde: *Unusquiſque in ſuo ſenſu abundat.* Senaõ ſómente fazer huma collecçaõ de todo o diſputavel na Filoſofia, ordenada a ſeu modo (que he aſſaz natural) e ſegundo o que lhe pareceo mais veroſimil, para que os que curſaraõ Eſcólas tenhaõ nella huma excitaçaõ de eſpecies, e os que as naõ curſaraõ tomem ao menos alguma tintura, do que nas Eſcólas ſe diſputa.

Pelo que, ſendo eſta obra taõ util para toda a Republica literaria; e ainda neceſſaria aos homens de Corte, em quem he defeito reprehenſivel naõ ſe moſtrarem de algum modo intelligentes neſtas materias, julgo,

julgo, que ſe deve dar ao Impreſſor a licença, que pede, antes que ſe lhe deve agradecer, e louvar o zelo de querer dar eſta obra ao publico. Eſte o meu parecer. V. Mageſtade ordenará o que for ſervido. Lisboa da Caſa profeſſa de S. Roque, aos 8. de Novembro de 1744.

Manoel de Campos.

QUe ſe poſſa imprimir, viſtas as licenças do Santo Officio, e Ordinario, e depois torne á Meſa para ſe conferir, e taxar; e ſem iſſo naõ correrá. Lisboa, 9. de Novembro de 1744.

Pereira. Coſta.

DO SANTO OFFICIO

VIſto eſtar conforme com o original, pode correr. Lisboa, 9. de Abril de 1745.

Fr. R. de Alancaſtro. Sylva.

DO ORDINARIO.

POde corer. Lisboa, 9. de Abril de 1745.

D. Jozé Arcebiſpo de Lacedemonia.

DO PAÇO.

QUe poſſa correr, e taxaõ em dous mil e quatro centos reis. Lisboa, 30. de Abril de 1745.

Pereyra. Coſta. Almeida.

LOGICA RACIONAL,
GEOMETRICA,
E ANALITICA,

***ABSOLUTAMENTE NECESSARIA PARA** entrar em qualquer Sciencia, e ainda para todos os homens, que em qualquer particular, quizerem fazer uſo do ſeu entendimento, e explicar as ſuas idéas, por termos claros, proprios, e intelligiveis.*

PARTE I.
DA LOGICA RACIONAL.

LIVRO I.
DA PRIMEIRA OPERAÇAM DO ENTENDIMENTO

CAPITULO I.
Da Logica Natural.

DEFINIÇAM

1 *A LOGICA Natural ſaõ aquellas diſpoſiçoens, com que naſcemos para perceber, ou entender as couſas, que tratamos, fezer dellas juizo, e diſcorrer ſobre as ſuas propriedades, ſegundo as idéas, que temos das meſmas couſas, que tratamos.*

2. Deſta ſórte, e naturalmente percebemos o Sol, a Lua, e as Eſtrellas, pelas idéas, que formamos deſtas couſas, e julgamos ſe ſaõ boas, ou más, affirmando, ou negando, e diſcorremos ſobre as ſuas qualidades, inferindo humas de outras; como de ſer o Sol formoſo, e luzido, tiramos por conſequencia, que he agradavel; e eſtas ſaõ as tres primeiras operaçoens do noſſo entendimento, *perceber*, *julgar*, *e diſcorrer*; e ſuccede haver homens, que naturalmente diſcorrem muitas vezes em certas materias com mayor certeza, do que aquelles, que tem aprendido as regras, e preceitos da Logica arteficial.

3 A razaõ he; porque naturalmente temos cinco ſentidos, por onde diſtinguimos as couſas materiaes, e ſenſiveis, como *Ver*, *Ouvir*, *Cheirar*, *Goſtar*, *e Apalpàr*; e os orgãos deſtes ſentidos ſaõ os noſſos olhos, os noſſos ouvidos, o noſſo nariz, a noſſa lingoa, e o noſſo tacto, que he ſentido geral, que ſe difunde por todo o corpo; e ſobre todas eſtas couſas, ainda que imperfeitamente, naturalmente percebemos, julgamos, e diſcorremos.

4 Tambem naturalmente, por nós meſmos, ou pelo ter ouvido a outros, ſabemos, que ſomos compóſtos de alma, e corpo; e pela Fé, eſtamos certos, que a noſſa alma he eſpiritual, e immortal, e que Deos creando-nos, infundio ſobre ella hum rayo de luz, que chamamos *Razaõ*, para nos ſervir de guia; e com effeito, quando á luz da razaõ examinamos as couſas, que cahem debaixo do noſſo conhecimento, naõ nos enganamos.

5 O noſſo entendimento, depois do peccado dos noſſos primeiros Pays, perdeo o conhecimento claro, que

que tinha, e o amor da verdade, e do legitimo bem, e ficaraõ as noſſas paixoens dominando ſobre a razaõ; daqui naſce a imperfeiçaõ, com que entendemos, e percebemos as couſas, formamos ſobre ellas juizo, e ſobre ellas diſcorremos naturalmente; porém com grande deſigualdade; porque huns tem mayor comprehenſaõ, e penetraõ melhor os objectos, que conſidéraõ: outros tem grande agudeza de entendimento; e ainda em muy pouca idade, admiraõ no modo exacto, com que diſcorrem, e falaõ em certas materias; e outros finalmente, ſaõ naturalmente rudes, e tardos em perceber as couſas, ſem penetraçaõ, ou comprehenſaõ alguma; e eſtes ſaõ menos proprios, para as Sciencias.

6 Naõ ha duvida, que ſe nos aplicarmos com as diſpoſiçoens, com que naſcemos, nos poderemos muito bem adiantar, ſe reflectirmos ſobre as noſſas idéas, fazendo familiares, e preſentes as que nos ſaõ evidentes, livrando-nos de precipitaçaõ, e conſiderando os juizos, que formamos, dando huma grande attençaõ a tudo, o que conſiderarmos, meditando tudo com tranquilidade, e vontade conſtante, para prevenir as paixoens, que perturbaõ, e eſcurecem as noſſas idèas, e deſviaõ a noſſa attençaõ do objecto, que examinamos.

7 Quem ſeguiſſe eſta ordem pontualmente, formaria por ſi meſmo a Logica arteficial; porque a experiencia tem moſtrado, que á força de ſe aplicar qualquer homem a huma certa Sciencia, ſe veyo a fazer nella taõ habil, como os que ſe tinhaõ valído da Logica arteficial

8 Porém álem de que iſto he raro, naõ ſe póde negar

negar o quanto mais ſe adiantaria com os preceitos, e regras da Logica arteficial aquelle, que primeiro os eſtudaſſe, antes de entrar em qualquer Sciencia; pois he certo, que faria muito mayor progreſſo em pouco tempo.

9 Todos os dias vemos homens de admiraveis talentos, que ſem os preceitos da Logica, moſtraõ habilidade rara: huns para cantar, outros para edificar, outros para inventar, e conſtruir maquinas, outros para pintar, &c. mas diſſo meſmo devemos concluir, que ſe ſe achaõ adiantados, ſem arte, e ſem preceitos, muito mais ſe adiantariaõ com elles.

10 Devemos huma grande obrigaçaõ aos primeiros, que trabalharaõ em aperfeiçoar as Artes; porque nas regras, que eſtabeleceraõ, nos deixaraõ hum grande ſoccorro; e he muito para ſentir, que os homens ſe naõ aproveitem por falta de aplicaçaõ; porque nenhum homem he taõ rude, que aplicando-ſe, naõ vença os impedimentos, que tem, principalmente os que tem tempo, e bens da fortuna, para ſe inſtruir, e o naõ fazem por negligencia ſua, ou de ſeus parentes, que lhe naõ daõ educaçaõ proporcionada aos bens da fortuna, que Deos foy ſervido darlhes: outros dados a paixoens violentas, de que recebem goſto, nenhuma outra couſa lhes agrada, antes fogem, quanto pódem, de qualquer outra aplicaçaõ.

11 Eſta falta de educaçaõ he muito mais para ſentir na Nobreza, e na primeira Nobreza, quando eſta poem todo o ſeu diſvelo na oſtentaçaõ, e magnificencia do ſeu eſtado, ficando na ignorancia do que mais lhe importa ſaber, que he o conhecimento de ſi meſmo, a ſaber, da ſua alma, e do ſeu Creador, e

naõ

naõ repara a primeira Nobreza, que ao meſmo tempo, outros homens de muito inferior condiçaõ, pela ſua ſciencia, lhe uſurpaõ os grandes empregos, creditos, e honras, que deviaõ ſer o ornato dos ſeus naſcimentos.

CAPITULO II.

Da Logica arteficial.

DEFINIÇAM.

12 *A Logica arteficial he huma Arte, que com varias regras, e preceitos dirige, e aperfeiçoa as operaçoens do noſſo entendimento*, ou tambem, he hum ſyſtema de reflecçoens ſobre as noſſas idéas.

Deſtas reflecçoens naſceraõ as regras da Logica arteficial; porque reflectindo os homens ſobre ſi, e vendo, que humas vezes acertavaõ, e erravaõ outras, foraõ eſtabelecendo as regras, a que déraõ o nome de Logica arteficial.

13 O objecto principal deſta Arte, ſaõ as faculdades da noſſa alma, Memoria, Entendimento, e Vontade: Ao entendimento pertencem as tres primeiras operaçoens, que ſaõ, perceber, julgar, e diſcorrer por ordem; e á noſſa vontade pertencem todas as noſſas acçoens livres, como, querer, naõ querer, determinar, eſcolher, duvidar, e reſolver, &c.

DEFINIÇAM.

14 *A Memoria he aquella faculdade, pela qual a noſſa alma recolhe em ſi as couſas, que tem ſabido, e meditado, e recordando-as, lhas repreſentaõ as idéas, ſegunda vez, e muitas mais vezes, em que a alma repete, o que tem percebido, julgado, ou diſcorrido.*

A mayor parte dos Filoſofos naõ diſtinguem a memoria do entendimento:

Memoria eſt iterata intellectio.

15 Para reſtabelecer a Logica arteficial, que ordinariamente ſe enſina nas Eſcólas á recta ordem, que ſe deve ſeguir, duas couſas ſaõ preciſas. A primeira he, deſcobrir a cauſa dos noſſos erros, conhecelos, e emendallos. A ſegunda he, eſtabelecer regras certas, e inconteſtaveis, que nos ſirvaõ de guia, para bem perceber, bem julgar, e bem diſcorrer; mas tudo por ordem; porque bem ordenar, querem alguns, (e com razaõ) que ſeja huma quarta operaçaõ do noſſo entendimento, que o vá dirigindo para a verdade, e ao meſmo tempo inclinando os actos da noſſa vontade para o bem; porque niſto conſiſte a verdadeira Logica arteficial; cujas regras, bem obſervadas, ſaõ capazes de contribuir á clareza, extenſaõ, e penetraçaõ do noſſo conhecimento, e ao bom uſo, que devemos fazer da noſſa liberdade.

16 Por eſta razaõ ſe póde dizer illegitima a Logica daquelles, que para alcançar a verdade, naõ procuraõ primeiro deſcobrir a origem, e cauſa dos noſſos erros; pois que o primeiro grão de ſabedoria, he carecer de ignorancia:

Primus ſapientiæ gradus eſt ſtultitiæ caruiſſe.

17 A causa principal dos nossos erros, he o máo uso, que fazemos da nossa liberdade; e a causa occasional dos mesmos erros, saõ os nossos sentidos, e as nossas paixoens, que saõ affectos da nossa alma; e assim parece, que para nos livrarmos dos erros, naõ só pela Logica, devemos dirigir as operaçoens do nosso entendimento; mas tambem (e com muito mayor razaõ) devemos dirigir os actos da nossa vontade; porque (como já disse no Antiloquio desta obra) os defeitos do entendimento saõ só erros; porém os da vontade saõ vicios, e saõ peccados.

18 Nós naõ nascemos homens perfeitos, nascemos meninos; e na tenra idade, saõ os orgãos do nosso corpo fracos, e debeis, para as nossas operaçoens, e naõ só, para as do corpo, como mover os pès, ou as mãos; mas tambem para o uso da razaõ, de que pouco a pouco, vamos fazendo experiencia.

19 Hum menino vê a flamma de huma tocha, e lhe quer pegar; mas sentindo o calor, quer fogir; e naõ se podendo ter em pè, cahe: fórma juizo do Ceo, da Terra, e das Estrellas, e de outras muitas cousas; mas com grande imperfeiçaõ, sem advertir, se erra, ou acerta no que julga; porque usa da sua liberdade, e naõ tem impedimento algum; e assim saõ errados os juizos, que fórmaõ os meninos.

20 Julga hum menino por cousa boa, tudo aquillo, que se accommoda com os orgãos do seu corpo, de que recebe gosto, ou utilidade. Desta sórte se recreaõ os meninos com as cousas luzidas, e resplandecentes; porque móvem o principal orgaõ da vista, que saõ os olhos.

21 Pelo

21 Pelo contrario, julgaõ por coufa má, e nociva, tudo aquillo, que offende algum dos orgãos do feu corpo; e tanto mais, quanto mais o offende, ou lhe parece o póde offender; e por efta razaõ, tem odio, e averfaõ ás cobras, lagartos, e outros animaes, que mataõ com o veneno; àlem diffo imaginaõ os rapazes, que tem mais fubftancia, e realidade aquellas coufas, que mais móvem os feus fentidos; e affim julgaõ o ouro, os metaes, e as pedras, ter mais fubftancia, do que o ar, e a agoa; porque fentem neftas coufas mayor dureza, ou refiftencia: finalmente julgaõ por nada, aquillo, que naõ move os feus fentidos; e daõ por certo, que naõ ha coufa alguma dentro de hum vafo, de que fe tirou o licor, de que coftumava eftar cheyo; e eftes erros vaõ crefcendo com a idade, imaginando tudo, como corpóreo, e debaixo de algum efpaço; e muitos adultos tem cahido no erro de imaginarem a Deos extenfo por todo o mundo, a alma humana diffufa por todo o corpo, os Anjos occuparem algum lugar; fendo tudo falfo, como com toda a evidencia moftraremos; porque as coufas efpirituaes, como Deos, os Anjos, e a alma humana, que naõ tem partes, nem extenfaõ, repugna, que tenhaõ, ou occupem efpaço; e fó fe dizem eftar em lugar, pela fua operaçaõ; e daqui nafce toda aconfufaõ das noffas idéas.

22 Julgaõ os rapazes, e ainda os adultos, que as coufas, que cahem debaixo dos feus fentidos, ferem taes, quaes as percebem, e fentem, attribuindo aos objectos dos feus fentidos, aquillo, que fentem na alma, como, o calor, o frio, a luz, as cores, o fabor, e o cheiro, e outras coufas femelhantes; e imaginaõ todas eftas coufas nos objectos, que as caufaõ; affim julgaõ, que eftá no fogo o calor, que os aquenta,

ta; o que he falso; porque o calor, que sentimos, he huma modificaçaõ da alma, como em seu lugar explicaremos; porque naõ está mais o calor no fogo, do que a dor na ponta de hum alfinete, com que me picaõ.

23 Estamos taõ costumados desde a nossa infancia ao uso da imaginaçaõ, que ainda as cousas espirituaes, invisiveis, e indivisiveis, no-las representa a imaginaçaõ debaixo de alguma figura; e daqui nasce toda a confusaõ das nossas idéas; porque mais attentos ás cousas corpóreas, preferimos o conhecimento do corpo, ao conhecimento da alma; razaõ porque devemos pôr hum grande cuidado em distinguir, o que pertence ao entendimento, que saõ as cousas puramente intelligiveis, e espirituaes, em que o corpo naõ tem parte alguma, como, perceber aquillo, que he intelligivel, e o que pertence ás sensaçoens, que a nossa alma sente, excitada dos córpos exteriores, que móvem o nosso corpo, e o que particularmente toca à imaginaçaõ, que nos representa os objectos dos nossos sentidos, naõ estando elles presentes; o que melhor se explicará ao diante.

24 Devemos depor os antecipados juizos, que temos feito sobre cousas, que naõ examinamos, porque hum homem preocupado de huma opiniaõ, naõ he facil sahir della; mas examinando-a á luz da razaõ, facilmente conhecerá o erro, em que tinha cahido, costumando-se a naõ dar por certo, senaõ aquillo, de que tiver huma clara, e distincta idéa.

25 Finalmente para sahirmos do máo estado, em que nos tem posto o máo uso dos nossos sentidos, e passar para o melhor estado, he necessaria huma grande força de espirito; e esta consiste em se transportar

em idéa no eſtado, a que ſe quer ſubir, examinando aquillo, que quer conhecer, e as ſuas differenças, como ſe nunca as tiveſſe ſabido, examinando tudo, como ſe de novo ſe apreſentaſſe, que he conſelho de Seneca:

Magni eſt ingenii revocare mentem à ſenſibus, & cogitationem à conſuetudine abducere. Senec.

CAPITULO III.

Das idéas em geral.

26 ESta palavra, *Idéa*, he por ſi meſma taõ clara, que naõ ha outras palavras, com que melhor ſe póſſa aclarar; e como nós naõ podemos conhecer as couſas, que eſtaõ fóra de nós, ſenaõ pelas idéas, que dellas temos, devemos aqui conſiderallas em ſi meſmas, e a reſpeito dos objectos, que repreſentaõ; e aſſim continuaremos em toda eſta primeira parte; porque a Logica arteficial (como fica dito, numero 12) he hum ſyſtema de reflexoens ſobre as noſſas idéas.

DEFINIC,AM.

IDéa, he aquelle objecto eſpiritual, e intelligivel, que á noſſa alma ſe repreſenta interiormente, que he o Arquetipo da meſma ĩdéa.

27 Eſta repreſentaçaõ he o que baſta, para conhecimento de nós meſmos; porém para explicarmos as noſſas idéas, ou penſamentos aos outros homens, nos ſervimos de palavras, que ſaõ expreſſoens exteriores, e ſinaes das noſſas idéas, como, quando quero

ro ſignificar a idéa, que o fogo excita na minha alma, e que eu ſinto, uſo da palavra *Calor*, dizendo: ſinto calor; porque ainda que as palavras naõ tem nenhuma conexaõ, ou affinidade com os noſſos penſamentos, e ſaõ arbitrarias, e differentes em differentes lingoas; com tudo por convençaõ feita, por exemplo, entre os Portuguezes, tem a palavra *Calor* a força de repreſentar a outro homem a ſenſaçaõ, que eu ſinto dentro na alma, como melhor ſe explicará no capitulo ſeguinte.

28 As noſſas idéas ſaõ de duas ſórtes, humas ſimples, e outras compoſtas, ou complexas. A idèa ſimples, he huma repreſentaçaõ unifórme do objecto, que ſe naõ póde dividir em differentes idéas: deſta ſórte ſaõ todas as idèas intelligiveis, como a idéa, que temos da noſſa exiſtencia, da noſſa vida, e da exiſtencia do Creador.

29 Quando a noſſa alma tem feito proviſaõ baſtante de idéas ſimples, as miſtura, e combina, humas com as outras; deſta miſtura naſcem as idéas complexas, ou compoſtas.

30 Quando o objecto, que a alma repreſenta, he ſimples, tambem he ſimples a idèa; e he ſignificada por huma ſó palavra; porèm quando inclue differentes idèas, repreſentadas ao meſmo tempo, reſulta huma idèa compoſta, e ſe explica por muitas palavras; por exemplo, a idèa de homem, he ſimples; porém ſe quero ſignificar ao meſmo tempo a prudencia, de que he dotado, dizendo: *Homem prudente*; eſta idèa he compoſta de homem, e de prudencia.

31 Hu-

31 Huma idèa he clara, quando à alma se representa o objecto por huma percepçaõ bem regulada, ou por huma sensaçaõ: Huma idèa he distincta, quando a alma percebe huma differença, que a distingue de qualquer outra idèa: Huma idèa confusa, he aquella, que se naõ distingue sufficientemente de qualquer outra: daqui se manifesta, que a obscuridade he opposta á clareza, e a confusaõ he opposta á distincçaõ.

32 Huma idèa determinada, he aquella, que significa huma certa cousa, ainda que essa cousa seja parte de outra, como, quando nós representamos huma só face de hum dado de jogar.

33 Mas quando a idèa se póde aplicar a muitas cousas differentes, se chama vaga, ainda que em si mesma seja determinada; por exemplo, a idèa de arvore, he vaga; porque se póde aplicar ao loureiro, ao castanheiro, &c. porèm esta mesma idèa em si he determinada, e se chama vaga; porque se póde aplicar a outras muitas cousas semelhantes.

34 As idèas se pódem considerar de muitas sórtes: reaes, quimericas, verdadeiras, falsas, completas, e incompletas.

35 Huma idèa se diz real, quando o seu arquetipo realmente existe.

36 Idèa quimerica, he aquella, que se naõ consòrma com o seu arquetipo; porque o naõ tem.

37 Idèa verdadeira, he aquella, que representa claramente o seu arquetipo.

38 Idèa

38 Idéa falſa, he aquella, que repreſenta o ſeu objecto differente do que elle he em ſi meſmo.

39 Todas eſtas diviſoens ſaõ eſcuſadas; porque as noſſas idèas todas ſaõ em ſi meſmas claras, diſtinctas, e confórmes aos ſeus arquetypos, e ſó a reſpeito dos objectos, que repreſentaõ, ſe pódem dizer verdadeiras, ou falſas, claras, ou eſcuras, reaes, ou quimericas; e ſó dividiremos as idèas em reaes, ou determinadas, e vagas.

40 Todas as idèas do noſſo entendimento, cujos objectos exiſtem na natureza, chamamos idèas reaes, e determinadas; e chamamos idèas vagas àquellas, que o noſſo entendimento fórma de couſas, que naõ tem exiſtencia alguma, como a idèa da generoſidade, que ſe póde aplicar a todos os generoſos: a idéa da ſubſtancia, que ſe póde aplicar ao homem, ao bruto, ao ouro, e á pedra, &c. e todas as idèas vagas as fórma o noſſo entendimento.

41 As idèas dos ſentimentos interiores da noſſa alma, que he intelligivel, e hum *Acto*, que ſe ſente, ſaõ inſeparaveis de nós meſmos, e ſaõ huma boa parte da noſſa eſſencia: ſegue-ſe, que eſtas ſaõ idèas innatas contra a opiniaõ de Neuton, e LocKe, e de outros Inglezes modernos.

42 Das idèas naſcem os noſſos conhecimentos, e a verdade, que contèm; e Ariſtoteles nos enſina, que aquelle, que examina as couſas nos ſeus principios, he o que melhor deſcobre a verdade:

Optimè veritatem rei proſpicere, qui à principio res orientes, & naſcentes inſpexerint.

43 Tóda a idèa contèm neceſſariamente duas couſas, a ſaber, a alma, como principio, e ſugeito da idèa, e o objecto, que pela idèa ſe repreſenra; e aſſim ſem o eſpirito naõ podemos entender a idèa, e ſem o objecto, que a idéa repreſenta.

44 Devemos advertir, que no noſſo entendimento, naõ entraõ as palavras, de que nos ſervimos; mas ſó a idèa das couſas, que ſignificaõ, de que a alma he modificada, e o noſſo entendimento percebe as couſas, e as encomenda á memoria, e as palavras ſe deſvanecem no ar, que ſaõ ſons articulados.

45 Os objectos das noſſas idèas ſaõ, Deos, e todas as couſas, que foy ſervido crear; e todas eſtas couſas ſe reduzem a eſpirito, e corpo, ou a ſubſtancia, ou modo da ſubſtancia, e eſta reduçaõ dá huma maravilhoſa facilidade, para diſtinguirmos os objectos das noſſas idèas.

46 Subſtancia, he tudo aquillo, que ſubſiſte per ſi, independente de qualquer outra couſa creada; por exemplo, huma pedra, hum pedaço de cera, he huma ſubſtancia; porque exiſtem no mundo independentemente de qualquer outra couſa; porèm ſer a pedra dura, ou branda, grande, ou pequena, de figura rodonda, ou triangular, tudo iſto ſaõ modos da pedra; como tambem ſaõ modos da cera, ſer quadrada, ou triangular, ou de qualquer outra figura. Os eſpiritos ſaõ ſubſtancias; por exemplo, a minha alma, ou de qualquer outro homem, he huma ſubſtancia independente de qualquer outra ſubſtancia creada, e os ſeus modos, ſaõ os ſeus differentes penſamentos, que ſaõ modificaçoens da meſma alma, ou differentes modos de perceber differentes objectos.

47 De-

47 Devemos aqui notar, que os modos de nenhuma sórte se distinguem das substancias, de que saõ modos; mas saõ a mesma substancia modificada; por exemplo, a dureza da pedra, he a mesma pedra, e fóra da pedra naõ tem nenhuma existencia; nem a figura da cera se distingue, ou póde separar da cera; hum dedo curvo, ou recto, he sempre o mesmo dedo, com differente modo, que delle se naõ distingue.

48 Pelo que fica dito, vemos reduzido tudo aquillo, que póde ser objecto dos nossos pensamentos, a duas cousas sómente; o que melhor se ha de entender nos capitulos seguintes.

CAPITULO IV.

Dos sinaes das nossas idèas.

49 SE nós naõ quizessemos communicar aos outros homens as nossas idèas, naõ necessitavamos de sinaes para lhas dar a conhecer; e para esta communicaçaõ se inventaraõ as lingoas, e as palavras, para que significassem as nossas idèas, e os objectos, que lhe correspondem.

DEFINIC,AM.

SInal, se diz aquillo, cuja idèa, àlem do que representa, nos faz vir no conhecimento de outra cousa muito differente.

50 Hum ramo, ou huma taboleta pendurada, he sinal, que alli se vende vinho; porque àlem de que a idèa,

a idèa reprefenta o ramo, faz vir no conhecimento do vinho, que he coufa muito differente: os finaes, em razaõ da fua virtude fignificativa fe dividem em finaes naturaes, e em finaes arbitrarios, introduzidos pelos coftumes das Naçoens.

DEFINIC, AM.

O Sinal natural, he aquelle, que de fua natureza fignifica alguma coufa differente de fi mefmo.

51 Defta fórte, o Arco Celefte, chamado Iris, fignifica aplacada a ira do Senhor, em final de naõ haver fegundo diluvio. O fumo, que fahe de huma chaminè, he final natural, de que ha lume naquella cafa.

DEFINIC, AM.

SInal arbitrario, he aquelle, que alguma coufa fignifica differente de fi mefmo; porque os homens affim convieraõ, que fignificaffe, ou affim fignifica pelos coftumes das Naçoens.

52 Defta fórte, quando fe repicaõ os finos, he final de algum feftejo, e quando fe repicaõ de outro modo particular, he final, que ha fogo em alguma cafa particular da Cidade.

53 As palavras, de que ufamos, para communicar huns aos outros as noffas idèas, e os feus objectos, faõ finaes arbitrarios, que fignificaõ ao mefmo tempo as coufas, e as idèas, que dellas temos; e affim apenàs pronunciamos qualquer palavra, logo reprefenta a idèa, e a coufa por ella fignificada; por exemplo, logo,

go que ouço a palavra *Sol*, percebo a idèa do Sol, e a palavra, ou ſinal, que o ſignifica.

54 Ainda que as palavras ſaõ arbitrarias, e diſferentes, em differentes lingoas, as couſas, que ſignificaõ, ſaõ ſempre as meſmas em todas as Naçoens do mundo; por exemplo, a palavra *Ouro*, que ſignifica, o mais precioſo dos metaes, ſempre he o meſmo metal, ainda que as palavras, que o ſignificaõ, ſejaõ differentes, em differentes lingoas, como Gregas, Latinas, Francezas, &c. nem por iſſo o ouro he grego, latino, ou francez; e a meſma palavra *ouro*, ſignificaria pedra, ſe niſſo convieſſe qualquer Naçaõ: os numeros da Arithmetica ſaõ diſtinctamente conhecidos de todas as Naçoens; e todos os homens tem as meſmas idéas, ainda que os caractères ſaõ muy differentes, e pódem ſer Gregos, Latinos, Hebraycos; e a idèa do caracter he ſempre a meſma ſem mudança alguma; e as palavras (como já fica dito, numero 44.) que ſignificaõ as couſas, ou numeros, de que tratamos, naõ entraõ na alma, nem a memoria as recolhe; porque ſaõ as palavras huns ſons, que ſe deſvanecem no ar, e as ſuas imagens; e a alma ſó recolhe as couſas ſignificadas, com as quaes ſe modifica, como diz Santo Agoſtinho:

Audio tria eſſe genera quæſtionum: an ſit, quid ſit, quale ſit, ſonorum quidem quibus verba confecta ſunt, imagines teneo, & eas per aerem cum ſtrepitu tranſiiſſe, ac jam non eſſe ſcio; Res vero ipſas, quæ illis ſignificantur ſonis, neque ullo ſenſu corporis attingi, nec uſpiam vidi præter animum meum, & in memoria recondit non imagines earum, ſed ipſas. S. Aug.

Porèm depois de eſtabelecida huma palavra, para ſinal de huma certa idèa, tem entre ſi tal cone-

xaõ

xaõ a palavra com a tal idéa, que já naõ póde, nem deve repreſentar na meſma lingoa outra couſa differente.

55 Para ſinaes das noſſas idèas nos devemos ſervir na noſſa lingoa das palavras, que o uſo tem authoriſado; e ſendo-nos neceſſario uſar de alguma palavra nova, ou de ſignificaçaõ mal determinada, a devemos definir, a ſaber, devemos determinarlhe a ſua preciſa ſignificaçaõ; o que ficará melhor entendido no livro quarto deſta primeira parte.

56 Para formar huma lingoa naõ baſtava, que houveſſe ſons articulados, que ſignificaſſem as couſas, de que tratavamos; porque ſeria neceſſaria huma grande multidaõ de palavras, ſe para cada couſa foſſe neceſſario hum nome particular. Para evitar eſte inconveniente ſe inventaraõ as palavras geraes, das quaes huma ſó palavra, ſignifica muitas couſas particulares; por exemplo, eſta palavra *Subſtancia*, ſe aplica ao homem, ao bruto, ao ouro, ao ferro, &c. e a tudo aquillo, que exiſte no mundo independente de qualquer outra couſa creada.

57 Como todas as couſas creadas ſaõ objectos das noſſas idèas, e ou eſtas couſas ſaõ ſubſtancias, ou ſaõ modos das ſubſtancias; porque naõ ha, nem póde haver outra couſa, que poſſa ſer objecto das noſſas idèas (como fica dito, numero 45) e aſſim aplicamos ás ſubſtancias nomes ſubſtantivos; por exemplo, *Pedra*; e ſe digo pedra dura, a palavra *dura*, he nome adjectivo. As acçoens das ſubſtancias ſe explicaõ pelos verbos, que as ſignificaõ, como, *Querer*, *Deſejar*, e ſaõ ſinaes da ſubſtancia, que quer, ou deſeja.

58 To-

58 Todas as lingoas, como tambem a nossa Portugueza, tem hum indefinito numero de palavras, que naõ daõ idèa precisa, do que representaõ, como esta palavra *Ancora*, que quem a ouve, e a naõ tem visto, naõ acha idèa, que a represente; e seria muito para desejar, que nos Diccionarios se pozessem humas estampinhas, que representassem hum grande numero, que ha, principalmente de instrumentos, para evitar a confusaõ, e ambiguidade das idèas, que semelhantes palavras excitaõ na alma.

59 Para fallar, escrever, ou tambem para disputar, nos devemos servir constantemente das mesmas palavras, e no mesmo sentido; porque de se naõ seguir esta regra, vemos muitos livros cheyos de palavras confusas, e ambiguas, tomadas, hora em hum sentido, hora em outro: destas ambiguidades, se achaõ cheyas as obras dos Poetas, que reduzidas as palavras ao seu verdadeiro sentido, viriaõ a dizer pouco, ou nada; e a mayor parte das disputas se desvaneceriaõ, se os disputantes determinassem primeiro a verdadeira significaçaõ das palavras de que se servem, e naõ seriaõ as disputas (como ordinariamente saõ) puras questoens de nome.

CAPITULO V.

Da origem das nossas idéas.

60. AS nossas idèas saõ a baze, e fundamento de todo o conhecimento humano, ou sejaõ innatas, ou adquiridas por reflexaõ; e humas, e outras saõ modificações da nossa alma; e sem nos conhecermos a nós mesmos, naõ poderemos adquirir

rir conhecimento algum com evidencia, e clareza; e aſſim primeiro nos havemos de examinar interiormente, para ſaber, o que ſomos, e o que podemos; e deſte exame havemos de tirar os mais ſolidos fundamentos, regras, e preceitos, aſſim da Logica, como de todas as mais Sciencias.

61 Para entrar no exame de nós meſmos, nos devemos valer da Fiſica, para ſaber, que couſa he o homem, e as partes de que ſe compoem; e naõ pareça, que eſte conhecimento he alheyo da Logica; porque he verdadeira Logica, tudo aquillo, que dá facilidade, e abertura de entendimento, para bem perceber os objectos, e formar delles idèas claras, e diſtinctas.

62 Todos os Filoſofos dizem, que o homem he compoſto de duas partes, a ſaber, de eſpirito, e de corpo, e que eſtas duas ſubſtancias ſe achaõ unidas no homem; e aſſim devemos examinar ſeparadamente eſtas tres couſas no homem, a ſaber, o eſpirito, o corpo, e a uniaõ.

63 Entrando com a conſideraçaõ no interior de mim meſmo, vejo por hum conhecimento intimo, e immediato, que iſto, que os Filoſofos chamaõ eſpirito, ou alma, he hum acto, que ſe ſente, ou huma ſubſtancia cogitante, e intelligente, que percebe, julga, e diſcorre, que quer, ou naõ quer, que eſcolhe, e reſolve, e ſe determina por ſi meſma.

64 O corpo he eſta maſſa extenſa em comprimento, largura, e profundidade, e claramente vejo, que o meu corpo he huma maquina compoſta de hum infinito numero de moles, e reſaltos imperceptiveis, fabrica

brica admiravel do Creador, diſpoſta, e ordenada em todas as ſuas partes, para todas as funçoens, que ſaõ proprias ao homem; porque apenas a alma quer mover o braço, logo o braço ſe move; ſe quer ver os objectos ſenſiveis, logo ſe abrem os olhos; para levantar alguma couſa, logo ſe eſtende o braço; e ſe queremos andar, logo ſe movem os pés.

65 Eſta maravilhoſa fabrica do corpo organico do homem, para a qual a alma foy creada, e unida, he de tal ſórte diſpoſta em todas as ſuas partes, que tudo aquillo, que lhe he conveniente, he acompanhado de *Goſto*; como tambem he acompanhado de *Dor*, tudo aquillo de que lhe póde reſultar dano; e aſſim o goſto, e a dor intereſſaõ a noſſa alma, a buſcar aquillo, que convém á conſervaçaõ do corpo, a que eſtá unida; por exemplo, quando o corpo neceſſita de ſuſtento, ou de refreſco, naſce na alma huma dor, que chamamos fome, e ſede, que nos ſolicita a comer, e a beber, de que logo naſce o goſto, que ſentimos. Vendo Plataõ eſte commercio da alma, e do corpo, dizia: que o homem era huma alma, que ſe ſervia de hum corpo.

66 Naõ ſe póde bem expreſſar o quanto he grande, e profundo o artefício organico do corpo humano, que ſe póde dizer, que he o chéfe das obras do Creador. Os ſcientes, e os ignorantes, que naõ ſaõ totalmente eſtupidos, ſe enchem de admiraçaõ, vendo a mais leve anathomia; e todo o homem, que o conſidéra por ſi meſmo, acha, que naõ he nada, tudo o que tem lido, e ouvio dizer; porque huma ſó viſta de olhos, lhe diz mais, do que lhe pódem dizer todos os diſcurſos de todos os livros. Em tantos ſeculos, quantos tem paſſado, ſempre os curioſos eſtudá-

raõ o corpo humano; e ainda que tem reconhecido, que naõ ha parte, por mais minima, que ſeja, que naõ tenha ſua particular razaõ, e uſo, ainda atégora lhe naõ chegaraõ a penetrar o fundo.

67 Examinando eu attentamente, ſe eſtas funçoẽs do eſpirito, e do corpo, procedem de hum meſmo principio, que ſeja ſómente corpo com differentes modos, ou ſómente eſpirito; e conſiderando os modos de huma, e outra ſubſtancia, vejo claramente, que naõ procedem as minhas operaçoens de hum ſó principio; e aſſim reconheço em mim duas ſubſtancias inteiramente differentes, e diſtinctas, e da meſma ſórte ſaõ differentes as ſuas propriedades; porque a minha alma, que he em mim o principio da intelligencia, he indiviſivel; pois naõ podemos tomar metade, o terço, ou a quarta parte de hum penſamento; nem ſe póde dizer de hum penſamento, que he rodondo, quadrado, ou triangular; e eſtou taõ certo, que exiſte em mim eſte eſpirito; ou alma, que podendo duvidar de tudo, e ainda duvidar ſe tenho hum corpo, naõ poſſo duvidar de ter hum eſpirito, ou principio de intelligencia, pelo qual percebo, julgo, e diſcorro; e ſe por impoſſivel duvidaſſe, iſſo meſmo me certificaria da minha exiſtencia; pois ſem exiſtir naõ poderia duvidar, como com elegancia notou a Aguia da Igreja:

Quæro abſte utrum tu ipſe ſis, metuis, me in hac interrogatione fallaris, cum utique ſi non eſſes, falli omninò non poſſes. S. Aug.

68 Pelo contrario, o corpo he de ſua natureza movel, diviſivel, e figuravel; e por mais que ſe ſubtilize, e ſe exalte, e reduza a vapor, ou flamma ſubtiliſſima, nunca poderá formar huma idèa, ou penſamento.

69 Do

69 Do que fica dito ſe manifeſta a grande differença, que ha entre a alma, e o corpo, pois ſaõ taõ oppoſtas, e differentes as ſuas propriedades, ou modos; porque naõ ſabemos, que haja ſubſtancia creada, que ſeja meyo entre corpo, e eſpirito: de que ſe faz claro, e manifeſto, que tudo o que he eſpiritual, he modo do eſpirito, e tudo o que he corpóreo, he modo do corpo; e os modos (como fica dito, numero 47.) naõ ſe diſtinguem das ſubſtancias, de que ſaõ modos, e ſaõ as meſmas ſubſtancias modificadas.

70 O corpo, e o eſpirito ſe achaõ unidos no homem, em conſequencia das leys da bondade, e ſabedoria Divina; e aſſim era neceſſario, porque naõ ſendo a noſſa alma ſómente intelligente, mas tambem ſenſitiva, para ſentir, deve ſer advertida pela impreſſaõ, que os córpos exteriores fazem no corpo, a que ella he unida, viſto querer a Intelligencia Eterna, que aſſim como creou eſpiritos, que naõ ſaõ unidos a corpos, como os Anjos, houveſſe tambem eſpiritos unidos a corpos, como as almas dos homens.

71 Para explicar o maravilhoſo commercio, que ha entre a alma, e o corpo, pelo qual de certos movimentos do corpo, reſultaõ certos penſamentos na alma, e de certos penſamentos da alma, ſe ſeguem certos movimentos no corpo, devemos ſaber da Anathomia, que de todas as partes da cutis do noſſo corpo procede hum infinito numero de fibras, e nervos imperceptiveis, que tem ſeu principio no cerebro, cujos differentes movimentos excitaõ na alma differentes ſenſaçoẽs: de que devemos inferir, que a principal ley do Creador, para poder haver commercio entre a alma, e o corpo, he, que todas as vezes, que no corpo, a que a alma he unida, houver certos movimentos,

vimentos, se excitem nella certas sensaçoens, e que de certos pensamentos da alma, resultem no corpo, a que he unida, certos movimentos. Em virtude desta soberana ley, apenas me tocaõ no corpo, logo sinto na alma huma sensaçaõ de gosto, ou de dor; por exemplo, se me picaõ no pé com hum alfinete, logo a minha alma tem huma sensaçaõ de dor, ou sentimento doloroso; e devemos notar, que ainda que a sensaçaõ se faz no cerebro, a alma sente a dor na parte tocada; o que a Divina Providencia ordenou, para que a alma podesse acodir á lezaõ da parte offendida; e assim neste commercio, obra a nossa alma com os pensamentos, e sensaçoens, que saõ modos da alma; e o corpo com os seus movimentos, que saõ modos do corpo.

72 Temos visto o que he a alma, ou espirito, e o corpo; falta-nos examinar em que consiste a uniaõ destas duas substancias. Esta admiravel uniaõ do espirito, e do corpo (que he hum continuo milagre) consiste na mutua, e reciproca dependencia das operaçoens destas duas substancias unidas; e nesta uniaõ, que tem por causa a Omnipotencia Divina, consiste tambem a razaõ formal de homem. Naõ devemos imaginar, que esta uniaõ he alguma entidade real, que medie entre o espirito, e o corpo; porque essa mesma entidade seria impedimento, para se unirem estas duas substancias; porque nunca duas taboas, por exemplo, estiveraõ mais separadas, do que quando se unem com huma pouca de còla; porque esta em lugar de as unir, lhe impede a uniaõ.

73 Entre o corpo, e o espirito naõ póde haver mais que tres sórtes de unioens; porque, ou se uniraõ dous espiritos, hum ao outro, ou dous corpos, hum

ao

ao outro, ou hum eſpirito com hum corpo.

74 Digo primeiramente, que dous eſpiritos eſtaõ taõ realmente unidos hum ao outro, quanto elles o pódem ſer, quando o querer de hum, he o querer do outro, como ſe lê na Eſcritura Sagrada, que os Fieis entre ſi tinhaõ huma ſó alma, e hum ſó coraçaõ:

Fidelium erat cor unum, & anima una.

E aſſim a uniaõ de dous eſpiritos conſiſte na reciproca dependencia das ſuas vontades.

75 Digo em ſegundo lugar, que dous corpos eſtaõ taõ realmente unidos hum ao outro, quanto elles o pódem ſer, quando ao movimento de hum ſe ſegue immediatamente o movimento do outro, naõ mediando nada entre as ſuas ſuperfices; por exemplo, entre a parte A de hum baſtaõ, e a ſua parte B, ha huma perfeita uniaõ; porque ſe naõ póde mover huma, ſem que ſe mova a outra; e aſſim a uniaõ de dous corpos conſiſte na reciproca dependencia dos ſeus movimentos.

76 A experiencia moſtra, que ſe em huma pedra, que péze huma arroba, ſe pozer huma argóla de ferro, bem ſegura, e a outra ſuperfice bem direita, e deſempenada, e eſta ſuperfice ſe pozer ſobre a ſuperfice de outra pedra igualmente liza, e deſempenada, que péze mil arrobas, ficaràõ as duas pedras taõ unidas, que nenhuma força as poderá ſeparar; e ſe na argóla ſe atar huma corda, e ſe puxar por ella perpendicularmente para a levantar, levantará juntamente comſigo a pedra de mil arrobas, e ſó ſe poderáõ ſeparar, ſe fazendo-lhe força por algum dos lados lhe fizerem

entrar alguma porçaõ de ar, que medie entre ambas, para que fiquem ſeparadas.

77 Digo em terceiro lugar, que a uniaõ de hum eſpirito com hum corpo, conſiſte na reciproca, e mutua dependencia das ſuas operaçoens. Em virtude deſta ſoberana ley (como fica dito, numero 71.) de certos penſamentos da alma, ſe ſeguem certos movimentos no corpo, a que ſe acha unida; e reciprocamente de certos movimentos do corpo, ſe excitaõ na alma certas ſenſaçoens.

78 Reſervamos para outro lugar, moſtrar, que do conhecimento de nós meſmos havemos deduzir o conhecimento do Creador. Nos dous capitulos ſeguintes explicaremos, primeiro as operaçoens ſenſiveis da alma, e logo as intellectuaes, ou intelligiveis.

CAPITULO VI.

Das ſenſaçoens, ou ſentimentos da alma.

79 A Mayor parte dos Filoſofos daõ o nome de idèa ás ſenſaçoens; o que he improprio; porque os ſentimentos da alma, do goſto, e da dor, naõ repreſentaõ objecto algum; porque quando ſinto frio, ou quente, molle, ou duro, goſto, ou dor, a minha alma naõ fórma idèa alguma deſtas couſas, e ſó as ſente. Só as ſenſaçoens da viſta ſaõ acompanhadas das idèas, que repreſentaõ os objectos; por exemplo, tocando os raypos do Sol, aquella parte dos olhos, que chamaõ *Retina*, ſe excita na alma huma ſenſaçaõ de luz acompanhada

panhada de huma idèa, que ao mesmo tempo representa o Sol, ou qualquer outro corpo luminoso, e assim:

DEFINIC,AM.

A Sensaçaõ, he hum sentimento na alma, excitado da impressaõ, que os corpos exteriores fazem no corpo, a que a alma se acha unida.

Este sentimento se lhe communica pelo movimento, que esses corpos imprimem nos nervos, e fibras, que de toda a parte se vaõ terminar ao *cerebro*, e chegando ahi, poem em movimento os espiritos animaes, que mais immediatamente excitaõ as sensaçoens, ou sentimentos na alma.

80 As sensaçoens saõ ordinariamente claras, e distinctas, sem confusaõ; por exemplo, pela vista temos as sensaçoens das cores, e da luz, de que procedem. Pelos ouvidos temos as sensaçoens dos sons: Pelos narizes temos as sensaçoens dos differentes cheiros: Pela lingoa temos as sensaçoens dos differentes sabores: Pelo tacto sentimos a impressaõ, que os corpos exteriores fazem no nosso corpo, e este he sentido geral; e todos os mais sentidos se fazem por tacto, mediato, ou immediato, como bem observou Aristoteles; e assim os rayos da luz chegaõ a tocar a retina dos olhos: O som toca, e move o tímpano dos ouvidos: Os corpuscolos, que exhalaõ os corpos odorìferos, vaõ tocar as cartilagens dos narizes: As partículas das viandas, de que nos nutrimos, tocaõ as fibras da nossa lingoa, para os differentes sabores.

81 As sensaçoens modificaõ a nossa alma, quando os objectos estaõ presentes; e a imaginaçaõ naõ he diffe-

differente das ſenſaçoens, ſenaõ porque repreſenta os objectos, ainda quando naõ eſtaõ preſentes.

DEFINIC,AM.

HE *a imaginaçaõ huma faculdade da alma, que ſe repreſenta a ſi meſma os objectos ſenſiveis, naõ eſtando elles preſentes.*

82 Differe da ſenſaçaõ; porque naõ neceſſita da impreſſaõ dos corpos exteriores, nem do movimento das fibras, e nervos do corpo; porque para haver na alma huma imaginaçaõ, baſta, que os eſpiritos animaes ſe movaõ no cerebro, da meſma ſórte, que ſe moviaõ á preſença dos objectos; e eſtas duas faculdades da alma, naõ differem entre ſi, ſenaõ ſegundo o mayor, ou menor movimento; porque nas ſenſaçoens, como he mayor o movimento, os objectos ſe repreſentaõ mais claros, e diſtinctos, e as cores mais vivas; e na imaginaçaõ, como ſaõ os movimentos menores, os objectos ſaõ menos claros, e diſtinctos, e as cores mais apagadas com alguma confuſaõ, como ao diante melhor ſe explicará.

83 Devemos notar, que o homem tem tres generos differentes de operaçoens: em primeiro lugar, tem operaçoens intelligiveis, ou intellectuaes, inteiramente independentes do corpo, e dos ſentidos, e ſaõ modificaçoens da alma puramente eſpirituaes, em que o corpo naõ tem parte alguma, como com toda a evidencia moſtraremos no capitulo ſeguinte: em ſegundo lugar, tem o noſſo corpo organico operaçoens, e movimentos, nos quaes a noſſa alma, naõ tem parte alguma; por exemplo, ainda que a alma, tenha, ou naõ penſamentos, queira, ou naõ queira, o ſangue cir-

circùla nas veas, e nas arterias, o cosimento das viandas se faz no estomago, os humores fermentaõ, e as partes similares se encaminhaõ, para toda a parte, para a nutriçaõ, e para suprirem as particulas, que continuamente se vaõ corrompendo, e se exhalaõ pela insensivel transpiraçaõ: em terceiro lugar, tem a nossa alma operaçoens, que dependem juntamente della, e do corpo, como saõ todas as operaçoens sensiveis; porque do movimento do corpo, a que a alma está unida, resulta nella hum sentimento, ou sensaçaõ. Este ultimo genero de operaçoens, chamaõ os Filosofos *mixtas*; porque dependem juntamente da alma, e do corpo, que saõ propriamente sensaçoens.

84 Gassendo, hum dos Filosofos de mayor fama bem merecida, pelo seu raro engenho, e talento, tomou por empreza ser o restaurador da Filosofia de Epycuro; e segundo a doutrina da quelle antigo Filosofo, pertende, que todas as nossas idéas nos vem dos nossos sentidos, ou immediatamente, como a luz, as cores, o cheyro, que atudo chama *idéas*; ou mediatamente, por hnm dos quatro modos seguintes: em primeiro lugar, por composiçaõ, como, quando compomos huma idéa sensivel com outra, por exemplo, da idéa de monte, e de ouro, formamos a idéa de huma montanha de ouro, e da idéa de hum peixe, e de huma molher, formamos a idéa de huma Serêa: em segundo lugar, por aumentaçaõ, como, quando da idéa de hum homem de mediana estatura, formamos a idéa de hum Gigante: em terceiro lugar, por diminuiçaõ, como, quando da idéa de hum homem de boa estatura, formamos a idéa de hum Pygmeo: em quarto lugar, por comparaçaõ, a saber, acomodando a idéa de huma cousa a outra por semelhança; por exemplo, quando pela idéa de huma

Cidade, que temos visto, nos representa a imaginaçaõ outra, que nunca vimos.

85 A doutrina deste Filosofo tomada geralmente, e confundindo as idéas intellectuaes com as sensiveis, e sentimentos da nossa alma, naõ me parece se deve seguir; porque parece fazer o homem inteiramente corporeo, dando mayor predicamento ao corpo, que tem operaçoens independentes da alma; e a alma, segundo a sua opiniaõ, nenhuma póde ter independente do corpo; e se o corpo unido à alma, naõ pérde nada da sua essencia, nem das suas propriedades, sendo a alma, essencialmente intelligente, e hum acto, que se sente, ou mais claramente huma *percepçaõ* fixa, e invariavel, como hade perder aquillo, que lhe he essencial, e que constitue a sua natureza.

86 Como nós ignoramos a essencia das cousas creadas, devemos definilas pelos seus atributos mais insignes: vejamos agora qual he o atributo mais insigne da nossa alma; porque este atributo se deve achar em todas as suas operaçoens, que saõ, (como fica ditto) perceber, julgar, discorrer, querer, naõ querer, escolher, determinar, &c. E quando julgo, percebo o que julgo; porém nem sempre julgo: quãdo discorro, percebo o que discorro; mas nem sempre discorro: quando quero, percebo o que quero mas nem sempre quero; e assim das mais operaçoens; e naõ posso trocar estas consequencias, nem posso dizer; eu percebo: logo julgo; eu percebo: logo discorro; eu percebo: logo quero, em lugar, que posso dizer; eu julgo: logo percebo; eu discorro: logo percebo: de que se segue, que a percepçaõ fixa, e invariavel, he o atributo mais insigne da

nos-

noſſa alma, e he a alma meſma, que eſſencialmente percebe as couſas intellectuaes, e ſente as ſenſiveis.

87 Os que ſeguem a doutrina de Epycuro, e Democryto, pertendem, que a alma humana em todas as ſuas operaçoens neceſſita de imagens corpóreas, e de impreſſaõ no corpo, a que he unida; mas naõ concordaõ entre ſi donde procede a tal neceſſidade. Huns dizem, que a tal neceſſidade procede da uniaõ do corpo, e do eſpirito, e que por eſta razaõ, naõ póde a alma perceber, julgar, ou diſcorrer, ſem influxo do corpo, a que eſtá unida. Outros com melhor acordo dizem, que naõ procede eſta neceſſidade da uniaõ referida; mas ſim, que nos foy impoſta em pena da culpa de noſſos primeiros pays: ao diante moſtraremos o pouco fundamento, com que eſtes Filoſofos diſcorrem, naõ diſtinguindo (como devem) as operaçoens intellectuaes das ſenſiveis, que ſaõ ſó, as que neceſſitaõ de alguma impreſſaõ, que os objectos exteriores fazem no noſſo corpo.

88 Devemos ſaber, que temos duas ſórtes de ſentidos, a ſaber, os ſentidos exteriores, que ſaõ (como fica dito) os olhos, os ouvidos, os narizes, &c. Os ſentidos interiores, ſaõ modificaçoens da alma, ou ſaõ a alma meſma modificada, que naõ neceſſita de impreſſaõ; nem he neceſſario, que os objectos eſtejaõ preſentes; e alguns Filoſofos querem, que entre os ſentidos interiores, haja hum, a que chamaõ *Sentido commum*, que une as differentes ſenſaçoens, a hum ſó objecto; porèm eſte ſentido he deſneceſſario; porque iſto ſe faz ao meſmo tempo á preſença do objecto, e no meſmo inſtante, que os ſentidos exteriores obraõ; porèm o acto de imaginar continùa depois que acaba a impreſſaõ exterior; e he a noſſa imaginativa ſentido interior.

89 Para

89 Para bem conhecer a differença, que ha entre os ſentidos interiores, e exteriores, devemos conſiderar, que os ſentidos exteriores, naõ ſó nos fazem perceber certos objectos fóra de nós; mas além diſſo, nós os percebemos dentro de nós meſmos, a ſaber, dentro da alma, taes, quaes os ſentidos exteriores os fazem perceber; e iſto ainda depois que os objectos naõ eſtaõ preſentes; por exemplo, eu poſſo fazer huma figura triangular ſobre o papel, e a vejo claramente com os meus olhos, e ainda depois de fechados, a eſtou vendo da meſma côr, da meſma grandeza, e na meſma ſituaçaõ; e iſto he propriamente, o que chamamos imaginar hum triangulo, com eſta differença, que como eſta continuaçaõ interior ſe faz por huma imagem, naõ póde ſer taõ viva, como quando o objecto eſtava preſente; porque na imaginaçaõ (como já fica dito, numero 82.) ſe repreſentaõ os objectos menos diſtinctos, e as cores mais apagadas, e em razaõ das imagens dos objectos ſe repreſentaõ eſtes de huma certa grandeza, de huma certa figura, e com certas qualidades ſenſiveis, por exemplo, grande, ou pequeno, branco, ou negro, duro, ou molle, frio, ou quente; e iſſo em certo gráo, de mais, ou de menos.

90 Devemos advertir, que ſuppoſto diſtinguimos os ſentidos interiores dos exteriores, com tudo as operaçoens de huns, e outros, ſe fazem dentro da alma, e ſaõ a alma meſma modificada dos ſentidos interiores, e exteriores, e principalmente dos ſentimentos do goſto, e da dor, de que naſcem as noſſas paixoens.

91 Nas ſenſaçoens devemos obſervar tres couſas, a ſaber, o objecto exterior, que faz impreſſaõ no noſſo corpo, e o meyo, por onde paſſa, e move

os

os orgaõs do nosso corpo, por exemplo, o calor, que move o nosso corpo, e poem em movimento as suas fibras, e nervos, e estas duas cousas preparaõ a sensaçaõ; e a terceira he a alma mesma, que sente; porque nós sabemos, que sentimos; mas ignoramos o modo, e fórma, com que se movem os nossos orgaõs.

92 Quando vemos, e ouvimos, ou gostamos alguma vianda, naõ sabemos o que passa no nosso corpo, nos seus nervos, e fibras: Quando ouvimos, naõ conhecemos as undulaçoens do ar, nem o modo, com que o mesmo ar fere o tympano do ouvido; porèm ainda que nos naõ daõ conhecimento algum do objecto, servem para nos instruir do que a alma deve abraçar, ou fogir, para conservaçaõ do corpo, a que está unida.

93 Esta instrucçaõ de nada nos serviria, se a naõ acompanhassemos da razaõ; por exemplo, a dor nos adverte, que o nosso corpo padece em algum dos seus membros, para que a alma fuja da causa do mal, e lhe dê remedio; e por esta razaõ a nossa alma sente a dor, referindo-a ao membro offendido, em que a dor naõ existe; mas sómente na alma, que assim advertida aplica o remedio à parte leza. Da mesma sorte aplicamos nós aos manjares o gosto saboroso, que elles naõ tem, porque este sentimento he a alma mesma modificada.

94 A economia dos orgaõs do nosso corpo, he de tal sorte disposta, que as cousas, que lhe saõ convenientes, saõ sempre acompanhadas de gosto; como tambem he acompanhado de dor, tudo aquillo, que o póde offender; e assim o gosto e a dor interessaõ a

noſſa alma a procurar as couſas neceſſarias para a conſervaçaõ do corpo.

95 A inſtrucçaõ, que nós tiramos das noſſas ſenſaçoens, he muito util, ſendo acompanhada da razaõ, que em tudo deve preſidir; por quanto os goſtos, que naõ ſaõ regidos pela razaõ, ſempre nos enganaõ, naõ ſó no que reſpeita a noſſa alma, como quando pelos goſtos ſe aparta da virtude; mas tambem no que reſpeita ao corpo, que levado do goſto de comer, e beber enche o eſtomago, de ſorte, que naõ podendo digerir as viandas, perde a vida, como a muitos tem ſuccedido.

96 Ainda que (como temos dito, numero 83.) o noſſo corpo tem alguns movimentos, em que a alma naõ tem parte; com tudo, póde ſuſpender eſſes movimentos; porque naõ ſó a minha alma tem imperio ſobre os membros exteriores, que promptamente, e com muita facilidade lhe obedecem; mas tambem ſobre os interiores; por exemplo, tem a minha alma imperio ſobre a digeſtaõ do eſtomago; porque como he ſenhora dos membros exteriores, lhe póde regular a quantidade do ſuſtento, e reduzilo a qualquer abſtinencia, pondo-o no coſtume de jejuar; e dando exercicios penoſos ao corpo, o fará domavel pelo coſtume. Da meſma ſórte póde regular o ſono, para o fazer ſervir ao que for juſto: finalmente póde a alma fazer ſervir o corpo ás operaçoens do eſpirito.

97 Do que fica dito ſe moſtra a grande differença, que ha entre eſtas duas partes, alma, e corpo; porque muitas vezes ſe combatem nas ſuas operaçoens; e para hum combate ſaõ neceſſarios, ao menos, dous; porque nenhum ente ſe combate a ſi meſmo: Em huma

ma acçaõ de gloria, por exemplo, em que a alma ſe empenha á viſta de hum evidente perigo, faz o corpo todo o esforço para o evitar, e fogir; porém a alma o obriga a naõ dar paſſo a traz, e o expoem á ſua total ruina.

98 Quando fallamos do paſſado, do preſente, do que temos viſto, e do que poderemos ver, a imaginaçaõ o figura ſempre, como preſente: Nós entendemos muito bem, o que ſignifica a relaçaõ do paſſado, e do preſente; porèm nem o vemos, nem o imaginamos; porq̃ a ſua idèa naõ repreſenta, nem groſſura, nem comprimento, nem cor alguma; e he eſta idèa huma modificaçaõ eſpiritual da alma; e a mayor parte dos noſſos erros naſcem de naõ obſervarmos bem a grande differença, que ha entre as operaçoens intellectuaes, e as ſenſiveis.

99 O noſſo eſpirito he de tal ſórte coſtumado ás couſas ſenſiveis, que movido dellas preſume ſaber, o que ignora, ainda que ſaiba muito bem diſtinguir entre ſaber, e ignorar, pois ſaõ couſas oppoſtas; mas por falta de bem conſiderar, antes quer ſuppor, que ſabe, o que certamente naõ ſabe, do que de conſiderar aquillo, a que dá credito; e a noſſa ignorancia he tal, que ignoramos, até as noſſas proprias indiſpoſiçoens.

100 Hum homem, que naõ quer crer, que he ſoberbo, que he fraco, que he preguiçoſo, &c. crê ligeiramente, que tem razaõ em tudo, o que obra; e da meſma ſórte dá credito a tudo aquillo, que ſe accommoda com as ſuas inclinaçoens, e temperamentos; e ainda que a conſciencia lhe argua os defeitos, elle ſe confunde em ſi meſmo, e confunde juntamente os ſenti-

ſentimentos dos ſeus defeitos, para ſe deſobrigar de os reconhecer.

CAPITULO VII.

Das operaçoens, e idéas intellectuaes.

101 AS operaçoens do entendimento puro, ſaõ aquellas, que tem por objecto alguma razaõ conhecida, como verdadeira, ou como tal reputada: por eſta palavra *razaõ*, devemos entender a percepçaõ, ou o conceito de couſa verdadeira; e eſta razaõ conhecida em hum objecto da noſſa intelligencia, he a conformidade, que o objecto tem com a idèa, que o repreſenta.

102 Nós temos duas operaçoens intellectuaes, a ſaber, as do entendimento, e as da vontade; e humas, e outras tem por objecto alguma razaõ conhecida. Neſte ſentido, tudo o que exiſte he verdade: o que naõ exiſte, naõ he nada, nem póde ſer objecto de idèa alguma. Da conformidade, que os objectos tem com as idèas, que os repreſentaõ, reſulta a verdade das propoſiçoens.

103 O noſſo entendimento, a noſſa razaõ, e o noſſo eſpirito, tudo junto, he aquelle rayo de luz, que o Creador infundio na noſſa alma, no meſmo inſtante, que a creou, e he a luz, que nos deve guiar em todas as noſſas acçoens.

104 Eſte rayo de luz, ou a noſſa alma, quando percebe, e entende claramente o objecto, que percebe, chama-ſe *Entendimento*: Quando percebe, e dirige

ge para a verdade, chama-se *razaõ*: quando vivamente penetra os objectos, e as suas propriedades, chama-se *intelligencia*: quando percebe, e julga, e dirige para o bem, chama-se *juizo*: quando a idéa do objecto nos desvia do mal (que he o peccado) chama-se *consciencia*: quando finalmente a idéa do objecto nos mostra o mal, que temos feito, chama-se *arrependimento*, syndereze, ou remorso de consciencia.

105 Tambem mais ordinariamente se chama entendimento aquella faculdade intellectual, que a nossa alma tem de perceber os objectos intelligiveis, sem dependencia alguma de imagem corporea, ou dos nossos sentidos: quando eu, por exemplo, pronuncío estas palavras: *Duvida*, *certeza*, *absolver*, *condemnar*, entendo bem o que digo, e sey, o que estas palavras significaõ; porèm a sua intelligencia naõ me representa imagem alguma corporea.

106 Quando duvido, ou suspendo de fazer juizo sobre alguma cousa (que vale o mesmo) tenho huma clara idéa da duvida, e a distingo de qualquer outro modo de perceber, e naõ se póde dizer, que esta idéa me passou pelos sentidos, por exemplo, pelos olhos; porque huma duvida naõ he córada, figurada, ou luminosa: nem pelos ouvidos; porque huma duvida, naõ he sonora: nem pelos narizes; porque huma duvida, naõ he odorifera: nem pela lingoa; porque huma duvida, naõ tem sabor algum: nem finalmente pelo tacto; porque huma duvida, naõ se pode dizer dura, ou molle, quente, ou fria, nem he divisivel; antes a idéa de huma duvida exclue todos os attributos do corpo, como com elegancia disse hum grande Doutor da Igreja:

Quales sunt cogitationes tuæ, non sunt coloratæ, *ut videantur, ſicuti nec ſonant, ut audiantur? &c.*

Logo a duvida he huma idéa, e acto puro do entendimento.

107 O meſmo diremos de todas as mais idéas intellectuaes, como ſaõ as idéas, que a noſſa alma tem da ſua natureza, da ſua vida, e da ſua exiſtencia; porque tudo iſto percebe, ſem imagem alguma corporea, e ſem influxo dos noſſos ſentidos.

108 Entre as idéas do noſſo entendimento, e as fantaſmas da noſſa imaginaçaõ, ha huma grande differença; porque o entendimento percebe claramente o ſeu objecto; e na imaginaçaõ ſe repreſentaõ os objectos confuſos; por exemplo, eu pelo entendimento conheço huma figura de cento e vinte lados iguaes, e poſſo determinar, como ſe gèra, e quaes ſaõ as ſuas propriedades; porém a figura, que a imaginaçaõ repreſenta naõ he diſtincta, e tanto ſe parece, com huma figura de cento e vinte lados, como com outra de duzentos e quarenta; porque o entendimento determina todos aquelles lados, e os conta juſtamente; o que a imaginaçaõ naõ pode fazer, nem ainda intentar.

109 Quando na Gazeta nos fallaõ de ſincoenta Batalhoens, e de oitenta Eſquadroens, de hum foſſo de quatorze braças, ou de huma planice de ſeis centos paſſos, todos eſſes numeros, e ainda outros muito mayores ſe repreſentaõ ao entendimento, e os percebe com diſtincçaõ, em lugar, que a imaginaçaõ os repreſenta confuſos, e ſem diſtincçaõ.

110 O noſſo entendimento, naõ ſó fórma idéas pre-

precisas de tudo, o que a imaginaçaõ representa confusamente; mas tambem lhe emmenda, e retifica as contradicçoens; por exemplo, a imaginaçaõ nunca nos hade representar os Antipodas, se naõ com os pés para cima, e a cabeça para baixo; porém o entendimento se convence, que os Antipodas, naõ tem tal situaçaõ; mas sim tem a mesma, que nós temos, a saber, os pés mais perto do centro da terra, do que a cabeça.

111 A Arithmetica nos ensina a calcular, e as regras sempre sahem certas, e justas; mas nós naõ ficamos certos, e convencidos da verdade destas regras; porque as fizemos, ou as vimos fazer muitas vezes, senaõ; porque as regras saõ deduzidas das idéas geraes dos numeros, e sua disposiçaõ.

112 As cousas, que nós percebemos pelos sentidos, nem sempre parecem as mesmas à nossa vista; por exemplo, os olhos naõ podem ver hum bastaõ por mais direito, que seja, que lhe naõ pareça quebrado dentro da agoa; porém o entendimento emmenda os deffeitos dos olhos, e dos mais sentidos.

113 Pelo contrario, quanto mais os objectos das nossas idéas saõ claros, e intelligiveis, tanto mais os conhecemos por verdadeiros, e atodo o tempo saõ sempre os mesmos, sem variedade alguma, e o que foy verdade ha mil annos, ainda hoje he verdade, e com as verdades intelligiveis se fortifica mais o entendimento, e pelo sensivel se enfraquece, e se dissipa, como divinamente disse Aristoteles, que o sensivel sendo forte offende, e que o intelligivel recrêa o entendimento: donde conclue aquelle grande Filosofo, que o entendimento naõ depende dos orgaõs

orgaõs do corpo, para as ſuas operaçoens intellectuaes, e que de ſua natureza he ſeparavel.

114 As noſſas ſenſaçoens continuamente naſcem, e ſe deſvanecem, e nem ſempre ſe ſentem do meſmo modo; porque o que hoje nos dá goſto, á manhãa nos deſagrada; porem o que hoje foy bem entendido, ou bem demonſtrado, ſempre he o meſmo, ſem variedade alguma.

115 Nòs conhecemos clara, e diſtinctamente as primeiras verdades, e primeiros principios, que conſiderados em qualquer ponto da eternidade, ſaõ independentes dos juizos dos homens, e ſempre os meſmos.

116 Pergunto: Donde vem ao meu eſpirito eſſas verdades eternas, que dirigem o meu diſcurſo, e pelas quaes eu deſcubro as proporçoens ſecretas das figuras, e do movimento; pois he certo, que as figuras dos triangulos, dos circulos, e dos quadrados, que eu riſco ſobre o papel, naõ imprimem na minha alma as ſuas proporçoens, nem me daõ a idèa da ſua juſteza; e eu nunca vi, nem circulos, nem triangulos perfeitamente regulares, pois que os naõ ha, nem neſte mundo, nem fóra delle: de que ſe ſegue, que a noſſa alma tem operaçoens intellectuaes, que de nenhuma ſórte dependem do corpo, nem dos noſſos ſentidos. Segue-ſe mais, que a idèa, que eu tenho da perfeiçaõ, e regularidade, he Deos meſmo, que na ſua verdade eterna, me moſtra o que he ſervido, que eu entenda; e bem claro eſtá, que eſta intelligencia da regularidade, he acto puro do meu eſpirito, que a minha alma teria, ainda naõ ſendo unida ao corpo.

117 Naõ

117 Naõ dariamos nunca fim a efte capitulo, fe houveffemos de trazer nelle todas as fortiffimas razoens, com que fe moftra, que as noffas operaçoens intellectuaes naõ tem dependencia alguma dos noffos fentidos, e mais principalmente a idèa, que temos do infinito, a faber, do ente fummamente perfeito, que refervamos para outro lugar: agora paffaremos a tratar das paixoens da alma, de que nos devemos livrar, fe queremos alcançar a verdade.

CAPITULO VIII.

Das paixoens da alma.

118 AS paixoens da noffa alma, faõ a caufa mais principal dos noffos vicios, que naõ fó nos impedem de bem julgar do verdadeiro, e do falfo; mas tambem do bem, e do mal; porque com violencia nos movem para o bem fenfivel, antepondo-o ao bem racional.

119 O gofto, e a dor, de que nafcem as noffas paixoens, naõ nos movem por conhecimento algum; mas fómente, por fenfaçaõ, ou fentimento; por exemplo, o gofto de comer, ou beber, he independente de todo o conhecimento, e de toda a fórte de difcurfo, e por iffo as paixoens nos movem defordenadamente, e fem razaõ; porque fe as noffas paixoens deffem lugar á razaõ, naõ feriaõ (como faõ) taõ defordenadas.

120 Como as paixoens nafcem mais ordinariamente do gofto, e da dor, os feus effeitos faõ contrarios:

o goſto move poderoſamente, quando a alma o tem preſente na idèa.

121 O ſentimento da dor, moleſta, e cauſa repugnancia; e aſſim ſe nos perguntarem, que couſa ſaõ as paixoens da alma, lhe daremos a definiçaõ ſeguinte.

DEFINIC, AM.

122 *AS paixoens, ſaõ ſentimentos da noſſa alma, modificada do goſto, ou da dor, que ſente, ou imagina em qualquer objecto.*

123 O amor, he a paixaõ mais principal da noſſa alma, que ſe deſeja unir á couſa amada, que tem preſente na idèa; por exemplo, quem ama o exercicio da caſſa, ou do jogo, deſeja unirſe a eſtas couſas, e as quer ter em ſeu poder.

124 O odio, pelo contrario, he huma paixaõ com deſejo de ſe apartar do objecto aborrecido; por exemplo, quando temos odio a huma certa peſſoa, a alma deſeja naturalmente apartarſe della.

125 A averſaõ, he huma paixaõ, pela qual a alma ſe deſvia da peſſoa, a quem he mal affecta.

126 O deſejo, he huma paixaõ, que nos move a buſcar o objecto amado, que temos auſente.

127 A alegria, he huma paixaõ, pela qual a alma goza a poſſe do bem, que tem preſente.

128 A triſteza, he huma paixaõ, pela qual a alma

ma atormentada da idèa, que a afflige, se desvia, e aparta, quanto póde.

129 Naõ devemos confundir a alegria, e tristeza com o gosto, e a dor, como muitos fazem, sendo paixoens bem differentes; porque o gosto, e a dor, naõ movem a alma, senaõ quando os objectos estaõ effectivamente presentes, e tem o gosto, e a dor parte determinada, por exemplo, o gosto na lingoa, e a dor em qualquer parte do corpo; porém a alegria, e a tristeza naõ tem parte determinada, nem lhe he necessaria a presença dos objectos, que a causaõ.

130 A audacia, ou atrevimento, he huma paixaõ, pela qual a alma se esforça, para se unir ao objecto amado, difficultoso de adquirir.

131 O valor militar, he aquella constancia da alma, com que sofre o perigo presente, que naõ póde evitar.

132 O temor, he huma paixaõ, pela qual a alma se desvia de hum mal, que difficultosamente se póde evitar.

133 O receyo, he huma paixaõ, que move a alma, sem estar presente o objecto; porèm a idèa o representa, como futuro, e que poderá succeder.

134 A esperança, he huma paixaõ, pela qual a alma considéra o objecto amado, como possivel de adquirir, e tambem, como difficultoso; mas com menos certa esperança; porém sendo a esperança facil, e segura, se converte em alegria.

135 A deſeſperaçaõ, he huma paixaõ, que a alma ſente, quando a idèa lhe repreſenta o objecto amado, impoſſivel de adquirir.

136 A colera, he huma paixaõ, pela qual a alma ſe esforça de reſiſtir, e rebater com violencia, o objecto, que lhe faz mal, com vontade de ſe vingar delle.

137 A vergonha, he huma eſpecie de triſteza na alma, quando a idèa a repreſenta, expoſta a odio, e deſprezo, por alguma falta commetida, ou por algum defeito natural, com deſejo de o encobrir, ou de ſe juſtificar.

138 A inveja, he huma eſpecie de triſteza, que a alma ſente de ver poſſuir a outrem o bem, de que ſe vê privada.

139 A emulaçaõ, he hum deſejo na alma de fazer, o que tem viſto obrar a outros, e hum ſentimento audacioſo, que a incita a emprender o meſmo com confiança Se eſta paixaõ he ſimples, ſem averſaõ, ou inveja aos que vio obrar, he mais virtude, que vicio.

140 A inquietaçaõ, ou deſaſſocego, o cuidado, o medo, o ſuſto, o horror, e o eſpanto, ſaõ differentes gráos do temor.

141 Todas eſtas paixoens ſaõ idèas, de que a alma he modificada; e a variedade procede dos differentes modos, com que as meſmas idèas repreſentaõ os objectos.

142 As noſſas paixoens todas ſe reduzem ao amor, que

que as comprehende, e excita todas; por exemplo, a aversaõ, que temos a qualquer objecto nasce do amor, que temos por outro.

143 Aborrecemos a doença; porque amamos a saude: temos odio a algum; porque nos impede possuir outro bem, que amamos: a alegria, he o amor do bem, que possuimos. A tristeza, he o amor do bem, de que nos vemos privados.

144 A colera, he hum amor repentino do bem, de que nos querem privar, e nós nos esforçamos a defender. Finalmente, sem amor naõ ha paixaõ alguma, e delle nascem todas.

145 As nossas paixoens, naõ sendo guiadas da razaõ nos encaminhaõ para os vicios, e nos desviaõ da virtude; porém na nossa maõ está reprimilas, que bem o podemos fazer para nos livrar do peccado; e com effeito muitas vezes as reprimimos em contemplaçaõ dos homens, como diante de hum Principe, ou de qualquer outra pessoa de grande respeito; pois que qualquer paixaõ, que nos venha na sua presença, naõ só a reprimimos; mas nos havemos de maneira, que nem ainda conheça, que em nós houve a mais minima alteraçaõ. E se nós vencemos as nossas paixões na presença dos homẽs, com muito mayor razaõ as venceremos, se nos pozermos na presença de Deos, que para bem usarmos da nossa liberdade, nos devemos considerar sempre na sua Divina presença em todas as nossas acçoens.

146 Se nos disserem, que ha humas paixoens taõ repentinas, que naõ daõ lugar a reflectir sobre o que he justo obrar, por exemplo, as paixoens da ira, ou

da colera repentina, lhe responderemos, que em semelhantes casos, Deos, que he summamente bom, e summamente misericordioso, e que conhece a fragilidade da nossa natureza, nos perdoará aquelles primeiros movimentos, principalmente, senaõ insistirmos nelles, e procurarmos naõ fazer habito de nenhum genero de paixoens.

147 Se nos perguntarem, como havemos de distinguir, por exemplo, a paixaõ da colera, da agitaçaõ dos espiritos animaes, e do sangue; ou como havemos de distinguir o sentimento da dor, do movimento dos nervos; pois que, posto esse movimento, o sentimento se segue no mesmo instante, nem ha sentimento algum, sem que o movimento o preceda.

148 Responderemos, dizendo, que ha huma grande differença entre o movimento, que naõ he mais, que huma mudança de lugar, e o sentimento, que he huma percepçaõ da alma; e estas duas cousas naõ tem nada cõmum; porque no corpo naõ ha mais, que movimento, nem tem outro genero de acçaõ, e a nossa alma percebe, e sente.

149 Quando por huma ferida, se separaõ duas partes do braço, ou da maõ, o movimento está nas partes, que se separaõ; e o sentimento está na alma, e naõ nas partes separadas do corpo, que se dividio; e aquella separaçaõ está taõ longe de se fazer na alma, como a que se faria em qualquer outro corpo, a que a alma naõ está unida; e por isso a naõ sente.

150 A razaõ, porque o Author da nossa alma unio differentes gráos de gosto, e de dor ás impressoẽs, que ella recebe dos objectos exteriores, devemos entender,

tender, que ſoy, para que achando nós tanto deſprazer, e taõ pouca ſatisfaçaõ nos goſtos, que as creaturas nos pódem dar, buſquemos a noſſa felicidade naquelle objecto immenſo, que he ſó quem nos póde ſaciar de gloria.

151 Finalmente, como as noſſas paixoens ſaõ a cauſa dos noſſos erros do entendimento, e dos vicios da noſſa vontade, devemos pôr hum grande cuidado em vencelas; mas naõ devemos combater as paixoens direitamente, ſenaõ por diverſaõ, aplicando-nos a outras couſas, em que naõ ha perigo, ainda que ſejaõ de goſto, e divertimento: he tambem remedio contra as paixoens frequentar homens doutos, e juntamente bem procedidos; porque aſſim, pouco a pouco, ſe hiráõ acalmando os eſpiritos, que movem as paixoens; porque o Author da natureza, parece, quiz eſtabelecer, que por huma juſta recompenſa ſe facilitem as boas obras á medida, que ſe praticaõ; e o mal por juſto caſtigo, quanto mais ſe pratique, mais difficultoſo ſeja de emendar.

CAPITULO IX.

Das operaçoens, ou actos da noſſa vontade.

152 DEpois de termos bem entendido os objectos das noſſas idéas, nos achamos em eſtado de os querer, ou naõ querer; porque ninguem quer aquillo, que naõ conhece: *Nihil volitum niſi præcognitum.*

153 Ainda que os actos da noſſa alma, ſe naõ pódem exactamente definir; porque naõ tem partes, que lhe

lhe possaõ servir de genero, e de differença; temos porém huma certeza, e evidencia immediata, que a experiencia confirma, de que os actos da nossa vontade saõ livres; mas naõ saõ (como os do entendimento) independentes dos movimentos do corpo; porque (como fica dito, numero 64) apenas a alma quer mover o braço, logo se move, ou se repousa sem força alguma; e naõ podemos duvidar do imperio, que a nossa alma tem sobre o corpo, a que está unida; pois que immediatamente lhe obedece; estando porém os membros, e orgãos em sua devída consistencia; o que fez dizer a hum Filosofo moderno, que a liberdade da alma devia ser tratada, como hum dos primeiros principios, que naõ necessitaõ de prova; e só a hum homem insensato, seria necessario provarlhe o seu livre arbitrio, advertindo-lhe, que elle mesmo o sente, e vê taõ claramente, como vê as acçoens, a que se determina.

154 Nós somos naturalmente determinados a querer o bem em geral; e assim temos liberdade, para escolher os bens em particular; por exemplo, todos os homens desejaõ a felicidade, que he o bem geral, a que a natureza determina; porém huns poem a sua felicidade em huma cousa, outtos em outra: huns na vida retirada, outros na vida commua: huns nos deleites, e riquezas, outros na virtude, &c.

155 Nós naõ temos liberdade, a respeito da felicidade, e summo bem, que he Deos mesmo; porque tendo presente a idéa daquelle objecto immenso, naõ podemos deixar de o amar; mas temos huma inteira liberdade, a respeito dos bens particulares; porque, como nenhum delles nos póde saciar, fica-nos liberdade para a escolha; e esta escolha, he

o que

o que chamamos livre arbitrio, ao qual daremos a definiçaõ ſeguinte.

DEFINICAM.

O Livre arbitrio, he aquella faculdade, que a noſſa alma tem, para querer, ou naõ querer o objecto, que a idéa lhe repreſenta.

156 Como nós ſomos livres, para fazer, ou naõ fazer qualquer couſa; por iſſo meſmo nos ſazemos dignos de louvor, ou de vituperio: de remuneraçaõ, ou de caſtigo, ſegundo obramos bem, ou mal. Nimguem caſtiga hum homem, por ſer corcovado, ou manco, feyo, ou torto; mas ſim por ſer ladraõ, ou matador, que ſaõ acçoens, que dependem da ſua vontade.

157 Se houveſſe algum impio deſtes eſpiritos atrevidos, que negaõ a liberdade nos homens, e houveſſe outro homem, que a eſte tal impio lhe levantaſſe hum falſo teſtemunho, e lho provaſſe com teſtemunhas falſas, e ſe viſſe pelo tal crime condemnado a huma morte afrontoſa, naõ deixaria de ſe queixar de huma taõ grande perfidia; porèm queixando-ſe, he certo, que faria huma evidente prova da ſua liberdade; porque ſe o acuſador naõ tinha liberdade, ſem razaõ ſe queixa o acuſado, que porém hade proteſtar, que ſe queixa com muita razaõ.

158 Hum homem, a quem ſuccede huma deſgraça inevitavel, queixa-ſe, como de deſgraça, a que deu occaſiaõ, e ſe poem a ſy meſmo a culpa: aquella triſteza, que nos cauſaõ os noſſos defeitos, ſe chama arrependimento; e nimguem ſe arrepende de ſer aleijado, ou manco; mas ſim de ter obrado mal; e

eſte arrependimento procede dos remorſos de conſciencia, que ſaõ hum ſinal evidente da noſſa liberdade.

159 Devemos confeſſar, que a liberdade he hum grande bem, ſe uſamos bem della; e ſe uſamos mal, naõ ha couſa peyor; porque nos aparta do bem; e do ſeu bom, ou mao uſo, reſulta a virtude, ou vicio.

160 As principaes virtudes ſaõ: a Prudencia, que nos enſina a reflectir, ſobre aquilo, que he bom, ou máo: a Juſtiça, que nos inſpira huma vontade conſtante de dar a cada hum, o que lhe pertence, ſegundo o ſeu merecimento, que involve as obrigaçoens da urbanidade, da liberdade, da bondade, e da cortezia: o Valor, ou a força, que nos faz vencer as difficuldades, que acompanhaõ as grandes emprezas: a Temperança, que nos enſina a ſer moderados em tudo; mas muito mais no que reſpeita aos goſtos dos noſſos ſentidos.

161 Todo o homem, que quer ſer bom logico, naõ ſó lhe convem conhecer eſtas virtudes pelos ſeus nomes; mas he preciſo, que medite nellas, e que as obſerve; porque ſem iſſo naõ póde ſer homem de bem; e naõ ſendo homem de bem, naõ pode ſer bom logico; e para o ſer, deve uſar bem da ſua liberdade. Quando qualquer eſtudante entrar no eſtudo da Logica deve conſiderar, que he o que eſtuda, e ofim paraque ſe aplica; que ſem duvida dirá, que he para ſer Filoſoſo, e alcançar ſabedoria; e aſſim neſte eſtudo deve proceder muy conforme á dignidade da profiſſaõ, e ter por principio o temor de Deos, e permanecer nelle.

Initium ſapientiæ timor Domini.

162 Al-

162 Alguns Filosofos modernos, e Inglezes, saõ de parecer, que por razoens naturaes, se naõ pode mostrar, que a nossa alma he livre; e que só temos essa certeza pela fé. Deos nos falla pela fé, e pela razaõ; e suposto, que a verdade da revelaçaõ Divina he muito mais segura, do que aquillo, que a razaõ nos dicta; porque em fim a nossa razaõ, ainda que bem dirigida, sempre pende para a verdade; pode porèm ser perturbada, pelos affectos da vontade; com tudo, como o conhecimento, que nós temos da nossa liberdade, he immediato, deve preferir, naõ à verdade da revelaçaõ, que procede da sabedoria eterna do Ente perfeitissimo, que naõ pode enganar, nem ser enganado; mas a qualquer outra demonstraçaõ, que o entendimento póde formar guiado da luz da razaõ: o que nòs conhecemos immediatamente, he mais certo, do que aquillo, que alcançamos por demonstraçaõ; para a qual he necessario buscar huma terceira idèa, que poderá naõ ter com o bjecto a conformidade necessaria, para se affirmar, ou a opposiçaõ, para se negar: de que se segue, que de cousa alguma abaixo da fè, podemos ter mayor certeza, do que da nossà liberdrde.

CAPITULO X.

Das idèas universaes, e Cathegorias de Aristoteles.

163 O Filosofo Archytas Tarentino, considerando a grande variedade dos objectos das nossas idèas, quiz reduzir a certas classes, tudo o que podia ser objecto dos nossos pensamentos; e assim reduzio tudo a dez classes, que chamaõ Cathegorias, ou Predicamentos, a saber,

a *Sub-*

a *ſubſtancia*, *quantidade*, *qualidade*, *relaçaõ*, *acçaõ*, *paixaõ*, *onde*, *quando*, *ſitio*, *e veſtido;* como ſe nos perguntaſſem, que tal he huma tal couſa? Reſponderiamos, ſe era ſubſtancia, ou outra qualquer couſa das dez aſſignadas: a Ariſtoteles naõ lhe pareceo mal eſte modo de diſtinguir os objectos, e o eſcreveo, como ſe elle foſſe o inventor.

164 Pelo exemplo ſeguinte, diremos o que ſe deve entender por *Cathegoria*, tomando, por exemplo, ao noſſo Soberano: em primeiro lugar, que couſa he ElRey Noſſo Senhor? He huma ſubſtancia intelligente, unida a hum corpo organico ordenado, e diſpoſto em todas as ſuas partes, para todas as funcçoens, que lhe ſaõ proprias: em ſegundo lugar, pela quantidade diremos, que he de huma galharda eſtatura: em terceiro lugar, pela qualidade, diremos, que he o mais ſabio Rey do univerſo: em quarto lugar, pela relaçaõ diremos, que he filho de ElRey Dom Pedro ſegundo, de glorioſa memoria: em quinto lugar, pela acçaõ, diremos, que todas as ſuas ſaõ egregias, e da mayor magnificencia as obras, que tem feito: em ſexto lugar, pela paixaõ, diremos, que todas as ſuas inclinaçoens propendem para a magnificencia do culto Divino: em ſetimo lugar, onde eſtà? Diremos no ſeu Paço de Lisboa: em oitavo lugar, quando, diremos, que actualmente: em nono lugar, que ſituaçaõ tem? Diremos, que humas vezes ouve aos ſeus vaſſallos ſentado, e outras em pè: em decimo lugar, que veſtido traz? Diremos, que coſtuma andar regiamente veſtido.

165 Ainda que o numero das cathegorias ſaõ ſómente duas, a ſaber, a ſubſtancia, e o modo da ſubſtancia; com tudo naõ ſe devem deſprezar as dez cathe-

thegorias de Archytas, nem fazer dellas tanto caſo, como ſe faz em algumas Eſcolas, fazendo dellas varias diviſoens, e ſubdiviſoens, e movendo varias queſtoẽs ridiculas, que mais ſervem de atrazar, do que adiantar aos principiantes.

166 Tambem em algumas Eſcólas ſe faz grande caſo da *Arvore Porphyriana*, aſſim chamada, por ſer Porphyrio ſeu inventor: Eſte Filoſofo divide as idèas univerſaes em cinco eſpecies, a ſaber, *Genero*, *Eſpecie*, *Differença*, *Proprio*, *e Accidente.*

167 O Genero, he huma idèa geral, que ſe aplica a muitas couſas, que ſaõ de differentes eſpecies, por exemplo, a idèa da ſubſtancia, que póde ſer atributo, ou predicado, do eſpirito, do corpo, do ouro, e da pedra, e ainda de Deos, e dos Anjos, que tudo iſto ſaõ ſubſtancias, mas com eſta differença, que ſó Deos he a verdadeira ſubſtancia, de que todas as mais ſaõ dependentes; poſto que as ſubſtancias creadas ſaõ entre ſi independentes humas de outras: A eſpecie he huma idéa, que ſe póde aplicar a muitas couſas, que ſó ſaõ differentes no numero, como a idèa de homem, que ſe póde aplicar a Pedro, e a Paulo, que ſaõ individuos: Differença, he aquelle predicado, pelo qual huma couſa ſe diſtingue da outra, como a idéa de racional, a reſpeito do homem, e do bruto: Proprio ſe diz aquelle attributo, que ſe aplica a differentes eſpecies, ou a differentes individuos, quando neceſſariamente lhe convém: O accidente, he aquelle predicado, que ſe póde aplicar a muitas eſpecies, ou individuos accidentalmente, como a figura circular na cera, que podia ſer quadrada.

168 Eſte Author faz a *ſubſtancia* genero ſupremo:

Vivente, *e corpo*, generos ſubalternos: *animal* genero infimo: o *Homem* eſpecie áttoma, ou ultima, a que ſe ſeguem os individuos Pedro, Paulo, &c.

169. Eſta arvore tem ſeus defeitos, e o principal he; porque divíde a *ſubſtancia* em dous membros: hum poſitivo, e outro negativo contra as regras da boa diviſaõ, dizendo, que a ſubſtancia, he corpórea, ou incorpórea, devendo-a dividir em ſubſtancia cogitante, e extenſa, ou em eſpirito, e corpo. Se diſſerem, que por *incorpóreo* entendem o eſpirito; porque o naõ declaraõ, e o fazem poſitivo?

170 Devemos ter ſempre preſente, que tudo quanto ha no mundo, de que o noſſo entendimento poſſa formar alguma idèa, naõ póde deixar de ſer huma de duas couſas, a ſaber, ou ſubſtancia, ou modo da ſubſtancia, que vem a ſer a couſa, e o modo da couſa.

171 A noſſa alma percebe, como couſa, quando o objecto da ſua idèa exiſte independente de qualquer outro; e como fundamento das ſuas propriedades, ou modos da couſa, ſem attençaõ á meſma couſa; por exemplo, quando percebo a Lua, como ſubſtancia, que exiſte per ſi, a percebo, como couſa, que ſe diſtingue de qualquer outra.

172 Quando percebo a Lua, como rodonda, a percebo, como *modo*, a ſaber, como modificada da figura rodonda, a qual figura ſe naõ diſtingue da Lua, e he a meſma Lua com aquelle ſeu modo.

CAPI-

CAPITULO XI.

Das idèas universaes abstractas, e modo de conhecer por abstracçaõ.

173 AS idéas universaes saõ aquellas, que se pódem aplicar a muitas cousas differentes entre si, e pelas quaes conhecemos os módos das cousas, sem attender ás cousas, de que saõ modos, como branco, negro, justo, injusto, bom, máo, &c. por exemplo, a brancura considerada sem fazer attençaõ á cousa branca.

174 As idéas abstractas nos vem da reflexaõ, que a nossa alma faz sobre as substancias, e seus modos, considerando-os, como separados; porque, como o espirito humano he limitado, e de hum sò jacto, naõ póde alcançar tudo, o que pertence ao objecto da sua idéa, o vay examinando por partes, para que deste exame proceda huma idéa clara, e distincta de todas as suas propriedades.

175 Muito convém a hum Logico considerar os modos das cousas, como separados dellas, ainda que sejaõ realmente inseparaveis: desta sórte consideraõ os Geometras no corpo o comprimento sem largura, nem profundidade, separando estes modos, por acçaõ do espirito. Este modo de perceber as cousas, he propriamente o que os Filosofos chamaõ conhecer por abstracçaõ. No exemplo seguinte veremos, como as idèas das cousas singulares, por abstracçaõ sóbem a universaes, e de universaes descem a singulares.

176 Quan-

176 Quando consìdèro o triangulo B descrito no papel, como em tal lugar, em tal tempo, e com as mais circunstancias individuaes, pelas quaes este triangulo B se distingue de qualquer outro, e se diz ser este, e naõ outro qualquer, a idéa, que o representa he idéa singular. Mas senaõ fizer attençaõ alguma ás particulares circunstancias do triangulo B, e considerar sómente os seus lados, esta idéa naõ só me representa o triangulo B; mas tambem qualquer outro triangulo terminado por tres lados; e já esta idéa se póde aplicar a mais cousas, e vay sobindo a universal.

177 Porém senaõ attender á igualdade dos lados, considerando sómente os seus tres angulos, e os seus tres lados, resulta huma idèa, que naõ só me representa os triangulos equilateros; mas todos os mais triangulos de tres angulos, e tres lados; e esta idéa já he mais universal, do que a precedente.

178 E se sómente attender aos tres lados do triangulo, sem attender a serem, ou naõ linhas rectas os seus lados, já esta idéa he mais universal, do que as duas precedentes, e capaz de representar, naõ só os triangulos rectilineos; mas tambem os curvilineos compostos de linhas curvas.

179 Se se considerar o triangulo, como hum espaço terminado, sem attender quantos, ou quaes saõ os lados, que o terminaõ, resultará a idéa de huma figura em geral, que se póde aplicar ao triangulo, ao circulo, ao quadrado, e geralmente a qualquer figura, que seja. Por este modo sóbem as idéas de singulares a universaes. Pelo contrario, se á idèa da figura se ajunta a idéa do triangulo, ajuntando-lhe a re-
ctidaõ

ctidaõ dos lados, reſulta huma idéa menos univerſal, que repreſenta o triangulo rectilineo; e ajuntando-lhe a igualdade dos lados, já a idéa he menos univerſal, que repreſenta ſómente os triangulos equilateros.

180 Finalmente, ſe ao triangulo equilatero accreſcentamos as circunſtancias individuaes, do tempo, do lugar, da ſituaçaõ, &c. reſulta a idèa ſingular, que ſómente ſignifica o triangulo B deſcrito no papel.

181 Quando huma idéa ſe compára com outra, a que ſe refere, ſe chama *relaçaõ*: como a idéa de Pay, que diz reſpeito, ordem, ou relaçaõ aos filhos; e a idéa de Rey, que diz reſpeito aos vaſſallos. Eſtas idéas relativas de Pay, ou de Rey ſignificaõ direitamente o Pay, ou o Rey, e obliquamente os filhos, ou vaſſallos.

182 Muitas propoſiçoens geraes paſſaõ por maximas, ſó pela elegancia, de que ſe achaõ reveſtidas: como neſta propoſiçaõ: *O que dá, deve em continente eſquecer o beneficio; e o que o recebe, deve ſempre eſtar lembrado.*

183 Naõ parece boa maxima, que o bem feitor continùe a fazer bem, ſem diſtinguir os ingratos dos reconhecidos, que tem merecimentos.

184 Saõ raros os homens, que ſe ſabem conter nas ſuas acçoens, e nos juſtos limites, que ellas pedem: huns tudo approvaõ, outros tudo criticaõ, e regeitaõ: huns preſumem, que tudo ſabem, outros naõ querem convir, nem ainda naquillo meſmo, que eſtaõ vendo.

185 As propoſiçoens geraes favorecem igualmen-

te a preguiça, e a vaidade dos homens: a preguiça pela repugnancia, que ha em examinar as cousas miudamente, e por se enfadar do estudo; e a vaidade satisfeita de generalidades, se jacta de haver adiantado muito em pouco tempo.

186 Devemos notar, que quando hum mesmo termo vago se aplica a dous sugeitos no mesmo sentido, se chama *Univoco*: como, quando dizemos, que certa fruta he sádia; que na Primavera os prados, se estaõ rindo; que huma certa vista he alegre; porém se o termo, ou palavra, significa duas cousas differentes, que naõ dizem respeito huma a outra, a tal palavra se chama *equivoca*,

187 As abstracçoens nos fazem imaginar entidades quimericas, a que damos os nomes substantivos abstractos, como *Valor*, *Prudencia*, *&c.* e naõ só os nomes das virtudes; mas tambem dos vicios, e das paixoens; e estas entidades fingidas, servíraõ de idolos aos Antigos, que as erigiraõ em Divindades, e chegaraõ a edificar Templos ao Medo.

188 Estes nomes substantivos abstractos deraõ occasiaõ aos Filosofos de considerarem dous principios no corpo: hum de conformidade, e outro de differença; e chamaraõ ao primeiro *Materia*, e ao segundo *Fórma*, suppondo no corpo duas substancias, sendo a Fórma imaginaria, e na realidade só modo da substancia.

Para intelligencia da errada opiniaõ das fórmas substanciaes, devemos notar, que todo o corpo de qualquer especie, que seja, lùcido, transparente, ou opáco, he composto de huma infinidade de corpuscu-

los,

los, ou partes imperceptiveis de differentes figuras, que segundo em qualquer corpo estaõ dispostas, e mais, ou menos unidas humas ás outras, pelas suas superfices, e mais, ou menos compactas, e juntas a outras de differentes grandezas, resultaõ duas sórtes de configuraçoens; e esta, que temos dito, se chama configuraçaõ interna, pela qual os corpos essencialmente differem huns dos outros; por exemplo, o ouro he differente do ferro pela sua configuraçaõ interna, por estarem os corpusculos, de que se compoem, por exemplo, mais unidos, sem outros intermedios, de que resulta o ouro mais compacto, que o ferro, e por consequencia mais pezado. A configuraçaõ interna, pela qual os corpos differem essencialmente huns dos outros, naõ he conhecida dos Filosofos; mas com evidencia se conjectura, pela mistura, que se póde fazer de muitos córpos grosseiros, que juntos, se vem a conglutinar, e a fazer hum corpo taõ differente de qualquer outro, como o ouro do ferro.

A figura dos córpos, e a exterior contextura das suas particulas, se chama configuraçaõ exterior, pela qual os corpos pódem ser semelhantes huns dos outros; por exemplo, o ouro, e o lataõ pódem ser semelhantes por terem a mesma figura, e serem do mesmo tamanho; porèm as configuraçoens internas de hum, e outro saõ muito differentes, e tem muito differentes propriedades: de que se manifesta, que basta, que hum corpo mude de configuraçaõ interna para já naõ ser o mesmo, e ser outro differente, sem ser necessaria fórma substancial; por exemplo, do graõ do trigo se faz farinha: da farinha se faz massa: da massa se faz paõ: o paõ no estomago se faz chylo: o chylo passa a ser sangue: o sangue a ser carne, nervos, ossos, &c. Al-

Alguns Filosofos modernos reduzem a sete as dez cathegorias, de que já tratámos, a saber, *Espirito*, *Corpo*, *Quantidade*, *Movimento*, *Repouso*, *Configuraçaõ interna*, e *Figura*, nos versos seguintes:

Mens, Mensura, Motus, Quies, Præpositura, Figura,
Sunt, cum Materia, Cunctarum, Exordia Rerum.

189 Os que admitem fórmas substanciaes, naõ daõ a razaõ, donde ellas procedem; e como dizem, que saõ substancias, devem confessar, que Deos as crêa de novo, a cada mudança dos córpos; por quanto naõ pódem dizer, que ellas estaõ na materia; porque desta sórte teria a materia actualmente em si todas as fórmas imaginaveis; nem lhes póde valer o dizerem, que a materia tem todas as fórmas em potencia; porque tudo o que he substancial, he substancia, como tudo, o que he espiritual, he espirito; e assim sendo a fórma substancia, ou seja completa, ou incompleta, só Deos a póde crear.

190 Quando hum termo vago significa huma mesma cousa, mas com mayor, ou menor extensaõ, póde ser equivoco, se o tomarem huma vez com mayor significaçaõ, e outra vez com menor. Todos os termos de comparaçaõ, saõ sugeitos a se ampliarem, ou restringirem, como *Agradavel*, *Doloroso*, *Difficil*, *insofrivel*; e a estes saõ semelhantes os nomes das virtudes; porque se diz virtuoso aquelle, que he mais apartado dos vicios, e menos carregado de defeitos; o que nasce da imperfeiçaõ, em que vivemos; e o remedio he fugir de equivocos, e de metáforas, que ordinariamente nos fazem cahir em muitos erros; e para os evitar devemos sempre usar de termos determinados, ainda que ha objectos, sobre os quaes nos devemos

vemos contentar de idéas vagas; porque para tudo as naõ póde haver determinadas; por exemplo, quando temos por objecto as perfeiçoens do Ente supremo, e os segredos da sua Divina Providencia, naõ devemos determinar cousa alguma; e se com as nossas reflexoens nos quizermos adiantar em conhecimento, deve ser com grande humildade de coraçaõ, com huma grande desconfiança da nossa capacidade, e com toda a modestia, e moderaçaõ, para nos naõ expormos ao perigo de sentir mal do Soberano Bem:

Etiam de Deo vera dicere, periculosum est: veriùs enim cogitatur, quam dicitur, & veriùs dicitur, quam cogitatur.

191 Esta palavra objecto he vaga, e equivoca; porque huma vez significa aquillo, que a idèa nos representa interiormente, que verdadeiramente he objecto da mesma idèa, e que encerra em si tudo aquillo, que representa: esta idèa se diz total. Outras vezes representa qualquer cousa, que existe fóra de nós, e que encerra muitos attributos, dos quaes nós sómente sabemos alguns, e naõ todos; por exemplo, huma arvore he objecto do meu pensamento, ainda que eu naõ dê attençaõ mais, que a algumas das suas propriedades; e assim este objecto naõ me dá a conhecer tudo o que a arvore encerra em si, e se póde chamar idèa parcial; e nos devem servir as idéas parciaes para poder adquirir as idèas totaes.

192 Huma idèa se diz completa, quando nos representa hum grande numero de attributos, e realidades do seu objecto, que existe fóra de nós; por exemplo, a idéa de hum corpo cubico, como hum dado de jogar, de hum palmo quadrado, em todas as suas seis superfices, pulído, e posto em repouso

em hum eſpaço determinado, he objecto completo da minha idèa; porèm as idèas dos numeros em geral da figura, e finalmente todas as noſſas idèas vagas ſaõ incompletas; e a razaõ he; porque tudo o que exiſte no mundo he determinado, e ſingular.

193 Quando as idèas ſaõ vagas, devemos procurar de as determinar, deſcendo ao ſingular, e particular das meſmas idéas, para nos naõ enganarmos com ellas; porque os que ſe naõ acautelaõ das abſtracçoens, vaõ mal guiados; porque ellas ſe intrometem, naõ ſó nas ſciencias; mas tambem nas acçoens mais ſérias dos homens, e as deitaõ a perder; por exemplo, muitos homens ſe confeſſaõ mal; porque ſe confeſſaõ por abſtracçaõ, pondo de parte por alguns dias, e talvez horas, as inclinaçoens, as quaes naõ tem renunciado, e depois de confeſſados as tornaõ a exercitar; e com eſta confiſſaõ ficaõ muy contentes, e com tanta confiança, como ſe tiveſſem largado os vicios, que ſó por pouco tempo deixaõ eſquecidos. Finalmente, fazem abſtracçaõ dos ſeus commercios, das ſuas paixoens, e dos ſeus tratos, e ſe eſquecem de que tem amigas, de que tem ambiçaõ, de que tem odio, de que tem avareza, inveja, &c. e acabada a confiſſaõ tornaõ ao que de antes eraõ.

194 Tambem ha caſos, em que as abſtracçoens pódem ſer muito uteis; por exemplo, hum Juiz deve fazer abſtracçaõ, e pôr de parte a authoridade, a riqueza, a amizade, a inimizade, e recomendaçoens dos pleiteantes; e podemos dizer, que a felicidade da vida conſiſte no bom uſo das abſtracçoens; e eſſa meſma felicidade perdem os que naõ uſaõ bem dellas. A mayor parte dos homens naõ fazem attençaõ alguma aos ſeus defeitos; e attentos ſó ao ſeu merecimento,

mento, naõ fazem abſtracçaõ dos defeitos, com que ſe achaõ: Pelo contrario daõ huma grande attençaõ ao que lhes falta, e o reputaõ por couſa muito grande; e eſta he a razaõ; porque ninguem ſe contenta com a ſua ſórte.

195 Ainda que uſando mal das idèas abſtractas podemos cahir em muitos erros, a noſſa vontade nos pòde bem ſervir para os evitar; porque póde aplicar a attençaõ aos objectos para os bem entender; porque a meſma attençaõ, he huma aplicaçaõ voluntaria da noſſa alma, ſobre qualquer objecto, a que o entendimento ſe aplica a contemplar, ou a diſcorrer. O diſcurſo propriamente começa pela attençaõ, e reflexoens; e a attençaõ começa ella meſma, pela vontade de conſiderar, e entender.

196 Os homens conſiderados, e attentos, devem fogir da diſſipaçaõ dos penſamentos vagos, que ſe preſentaõ ao eſpirito; e por eſſe meyo ſe livraráõ de cahir nos erros; porque naõ he poſſivel, que ſejaõ ao meſmo tempo attentos, e diſſipados. Para fazer calmar os penſamentos vagos, que nos diſſipaõ, a meſma attençaõ he o mais efficaz remedio.

CAPITULO XII.

Do infinito, do tempo, do eſpaço, e da duraçaõ.

197 ALguns Filoſofos modernos dizem, que nós adquirimos a idèa do infinito por hum grande numero de addicçoens repetidas ſem fim: como a idéa da immenſidade do mundo, a que naõ podemos aſſinar limites; porque

Deos

Deos creou mayor porçaõ de extençaõ corpórea, do que o noſſo entendimento he capaz de perceber. Eſtas idéas do infinito, como de hum numero tal, que naõ poſſa haver outro mayor, de huma diſtancia ſem fim, naõ ſaõ a idèa do infinito, nem o repreſentaõ; antes lhe ſuppoem principio, donde ſe começa a medir, ou a contar.

A idéa, que nós temos do infinito he determinada, e naõ lhe ſuppomos principio, nem fim, e nada lhe podemos accreſcentar, nem diminuir; porque he idéa ſimpliciſſima, ſem reſtricçaõ, nem augmento algum, e ſignifica, e he a idéa do Ente perfeitiſſimo, e a ſua cauſa exemplar he o meſmo Ente perfeitiſſimo, a ſaber, Deos meſmo, nem de outra parte nos podia vir eſſa idèa; porque a baixo de Deos, tudo he imperfeito; porque tudo ſe reduz a corpo, e eſpirito; e o eſpirito teme, recêa, e aſpira, ſignal da ſua imperfeiçaõ; e o corpo he movel, diviſivel, e figuravel; e como tal, imperfeito.

198 Eſta idèa, que nós temos do infinito nos moſtra evidentemente a exiſtencia de hum Ente, cujas perfeiçoens infinitas ſaõ incomprehenſiveis, que he objecto immenſo, e que imprimio nas noſſas almas os impenetraveis ſentimentos da infinidade.

199 Naõ pertendemos tratar neſte lugar da exiſtencia do Creador, da ſua natureza, e attributos, theologicamente; mas ſómente atè onde póde chegar a luz da noſſa razaõ, e ella nos moſtra, que devemos preferir o ſyſtema de huma cauſa primeira, e eterna, ao ſyſtema de huma ſubordinaçaõ de cauſas ao infinito; porque a eſte ſe lhe naõ póde aſſinar primeira cauſa, que ſeja principio das mais; e o ſyſtema de

huma

huma causa primeira se aplica a hum sugeito digno, que he o Ente perfeitissimo, necessario, e he a mesma realidade.

O conhecimento immediato, e evidente, que nós temos da nossa existencia, he huma consequencia incontestavel da existencia do Creador; pois he de muito mayor evidencia, do que de tudo o mais, que conhecemos fóra de nós; porque em cousa alguma creada achamos perfeiçaõ, ou realidade absoluta, ou que possa ser causa de alguma realidade, sendo (como he) evidente, que o homem se naõ fez a si mesmo, e que o ser, que tem, o recebeo de outrem, como tambem as qualidades, que tem de perceber, e conhecer: de que se segue, que de toda a eternidade existe hum Ente supremo, revestido das faculdades de perceber, e conhecer.

200 Quem duvidar desta verdade, necessariamente hade confessar, que houve hum tempo, em que naõ havia percepçaõ, nem conhecimento algum.

201 Qual foy logo a origem do conhecimento? Naõ se póde dizer, que nos veyo da materia; porque huma cousa cega, sem perfeiçaõ, nem conhecimento, he taõ impossivel produzir hum ente intelligente, como he impossivel, que hum triangulo faça tres angulos mayores, que dous rectos; mas donde tiraria a materia a sua existencia; pois dado, que a materia fosse eterna, mas sem movimento, seria eternamente immovel; mas ainda movendo-se de toda a eternidade, nunca della nos podia vir conhecimento; porque (como já fica mostrado, numero 68) a materia por mais que se mova, se divida, e se exalte em va-

por, ou flamma ſubtiliſſima, nunca poderá chegar a formar hum penſamento,

202 Tambem ſe naõ póde dizer, que a origem do conhecimento nos veyo do eſpirito; porque ſeria o eſpirito perſeitiſſimo, a que nada faltaſſe; mas nós eſtamos certos com toda a evidencia, que o noſſo eſpirito naõ he perſeitiſſimo; porque nem tudo entende, e por experiencia ſe convence da ſua imperfeiçaõ, e do meſmo, que lhe falta; pois deſeja, teme, e aſpira; e o noſſo eſpirito naõ ſe receya de ſi meſmo: logo receya, e teme outra couſa mais poderoſa, e mais intelligente, e aſpira á felicidade, e intelligencia, que lhe falta.

203 Se conſiderarmos huma planta, que traz comſigo a ſua ſemente, de que outra planta ſe fórma, como hum graõ de moſtarda, devemos confeſſar, que naquella ſemente ha hum principio occulto, que diz ordem, diſpoſiçaõ, e ſabedoria; pois vemos, que daquella pequena ſemente vay ſahindo o tronco, os ramos, as flores, e o fruto, e tudo ſe vay deſenrolando com huma grande regularidade: como logo podemos deixar de reconhecer ao meſmo tempo, que ſó huma ſabedoria infinita podia encerrar toda huma grande arvore em taõ pequena ſemente.

204 Sem huma grande temeridade, ninguem póde dizer, que conhece hum ſó dos objectos do mundo inteira, e exactamente; e antes devemos entender, que a ſabedoria Divina do Creador em cada huma das ſuas obras encerra muito, e muito mais, do que o noſſo eſpirito limitado he capaz de conhecer; e a experiencia nos moſtra, que em qualquer objecto, encontramos huma infinidade inexplicavel. A diviſaõ da

da materia procede ao infinito: a ſuppoſiçaõ dos atomos, he cheya de contradiçoens; porque o movimento de ſua natureza ſucceſſivo, naõ póde correr em hum inſtante diviſivel, couſa determinada: o eſpaço, ou ſeja real, ou imaginario, he certo, que naõ tem limites, nem ſe lhe pòdem aſſinar.

205 A eternidade, a immenſidade, ſaõ palavras abſtractas, que naõ ſignificaõ realidade; porque a eternidade naõ he o eterno, a immenſidade, naõ he o immenſo; pois he certo, que *Eterno*, *Immenſo* ſaõ palavras, que ſignificaõ realidade, a ſaber, o Altiſſimo.

206 A palavra *Nada*, naõ excita na alma idèa alguma; mas ſim negaçaõ de idèa; porque o nada he inintelligivel; e aſſim os nomes, que ſignificaõ auſencia de realidade, deviaõ ſer negativos, e a mayor parte ſaõ poſitivos; como tambem nos ſervimos muitas vezes de termos negativos para ſignificar realidades, como, por exemplo, *Mortal*, *Immortal*, *Finito*, *e Infinito*, *Corruptivel*, *Incorruptivel*, *&c.*

207 Tórno a advertir o muito cuidado, que devemos pôr nos termos, de que nos ſervimos, principalmente, quando fallamos do Ente ſupremo, para lhe naõ attribuir predicado indigno da ſua ſoberana perfeiçaõ.

208 Quando dizemos, que Deos naõ póde fazer couſas contraditorias, parece, que queremos limitar a Omnipotencia Divina; e o contrario devemos entender, a ſaber, que a ſua perfeiçaõ he infinita, e infinitamente livre de todo o defeito; porque naõ poder Deos contradizerſe, he eſtar perfeitamente de acordo comſigo meſmo: naõ ſe poder enganar, he conhecer tudo perfeitamente.

209 Nos

209 Nos Authores se achõ algumas palavras, que erradamente se aplicaõ a Deos, como, por exemplo, *o Tempo, a Duraçaõ, e o Espaço.*

210 Alguns Filosofos dizem menos consideradamente, que o tempo he huma porçaõ da eternidade; e porque as suas partes saõ successivas, e separadas humas de outras, concluem, que o tempo he huma reproducçaõ continuada, e huma creaçaõ continuamente repetida: se consultarmos a nossa razaõ, serà facil determinar, o que esta palavra *Tempo* significa; porque como he termo abstracto, o devemos reduzir a determinado.

211 Todos convem, que o tempo he huma duraçaõ successiva; e qualquer outra definiçaõ, que lhe queiraõ dar, poderá ser mais ornada; mas naõ ha de ser mais verdadeira. A duraçaõ he huma existencia continuada da cousa, que dura, e a existencia he a cousa mesma, que existe, porque, quando eu pègo, por exemplo, em hum bastaõ, naõ tenho duas cousas na maõ, que sejaõ duas realidades existentes; mas se eu considèro esse bastaõ sómente, como huma cousa, que existe no mundo, resultarà no meu espirito huma idèa vaga, e abstracta, que se póde aplicar a muitas cousas semelhantes: logo o tempo de huma cousa, he a mesma cousa, que successivamente dura, e existe, e recebe differentes variaçoens, com que diversamente se modifica.

212 Plataõ diz, fallando do Ente eterno, que elle *FOY*, que *HE*, e que *HA DE SER*, e que nós tomamos imagens emprestadas do tempo; sendo, que do Ente eterno, só propriamente se póde dizer, que *HE*, a saber, que existe. As variaçoens saõ differentes hu-

mas das outras; ſem iſſo naõ ſeriaõ variaçoens; mas a ſubſtancia, que as recebe, e com ellas ſe modifica, reſta ſempre a meſma ſubſtancia: hum modo do tempo ſe deſvanece, e outro toma o ſeu lugar; porém a ſubſtancia naõ ſe deſvanece.

213 O Eſpaço, he huma idèa ſimples, que adquirimos pela viſta, e pelo tacto: chama-ſe *Diſtancia*, quando ſe conſidéra ſó o ſeu comprimento terminado entre dous córpos: chama-ſe *Capacidade*, conſiderado pela ſua largura, comprimento, e profundidade.

214 Tambem ſe chama *Extençaõ*, quando ſe conſidèra terminado pelas extremidades da materia, que compoem eſte mundo; porém a eſſes limites da materia creada, naõ podemos nós chegar, nem ainda com o penſamento: de que ſe moſtra, que a idéa da extençaõ ſuppoem a idéa do corpo; e ainda que poſſamos perceber o eſpaço ſem corpo, nunca poderemos perceber o corpo, ſem eſpaço:

Tolle ſpatium corporibus, non erit ubi ſint, ideò neceſſe eſt, ut non ſint. S. Aug.

CAPITULO XIII.

Dos Principios, primeiras verdades, e Axiomas.

215 PRimeiras verdades ſe dizem aquellas propoſiçoens, em que todos os homens convèm, e que ſe percebem com qualquer leve attençaõ, como, o *Todo he mayor, que a ſua parte. Tudo o que obra exiſte. He impoſſivel, que huma couſa ſeja, e naõ ſeja ao meſmo tempo.*

216 Seria impoſſivel, que o noſſo eſpirito podeſſe conhecer couſa alguma com certeza, ſe naõ tiveſſe algumas propoſiçoens evidentes, que lhe ſerviſſem de ſoccorro, para prova de outras, que neceſſitaſſem de ſer provadas; e parece, que o Author da natureza quer, que nós as recebamos por regras, e principios do noſſo conhecimento.

217 Todas as queſtoens eſcuras, ſe deſembaraçaõ por meyo dos principios.

218 As propoſiçoens eſcuras ſe aclaraõ, e deſembaraçaõ por meyo dos primeiros principios; porém como o numero delles he infinito, e entre todos nenhum ſe póde dizer primeiro, ſuccede muitas vezes, que as queſtoens compoſtas ſe decidem, e aclaraõ melhor por concluſoens, que tem precedido, do que pelos primeiros principios, que naõ tem nenhuma dependencia huns dos outros; e para os ter todos preſentes, ſeria neceſſario hum eſtudo particular, que ſeria mais bem empregado em outros preceitos, e regras mais eſſenciaes, ſeguindo-os com ordem exacta.

219 Como os principios ſaõ humas maximas geraes, dizem alguns Filoſofos, que as propoſiçoens particulares reſultaõ das propoſiçoens geraes; o que he falſo; pois antes pelo contrario, as propoſiçoens geraes tiraõ toda a ſua força das particulares; porque, por exemplo, primeiro nos perſuadimos, que hum corpo he determinado, do que aſſentemos por principio geral, que todo o corpo he diviſivel; e primeiro nos ſeguramos, de que dous comprimentos medidos com huma meſma medida, ſaõ iguaes, do que aſſentemos por maxima, ou axioma, que *as couſas, que ſaõ iguaes a huma terceira, ſaõ iguaes entre ſi.*

220 O

220 O que claramente ſabemos, he, que as propoſiçoens determinadas, ſaõ para o noſſo conhecimento mais naturaes, do que as propoſiçoens geraes, e vagas; porque quando queremos aclarar o ſentido de huma propoſiçaõ geral, recorremos a exemplos tirados de propoſiçoens particulares.

221 Entre os Filoſofos modernos ſe diſputa muy ſériamente, ſe os primeiros principios ſaõ verdades innatas, ou ſómente adquiridas por reflexaõ.

222 Os que ſeguem, que ſaõ verdades innatas, que o Creador infundio na noſſa alma, quando a creou, me naõ parecem fundados em boa razaõ; porque ſendo verdades innatas, todos os homens igualmente as teriaõ, e ſe lhes poderia determinar o numero; o que he impoſſivel; porque tanto he primeiro principio, e primeira verdade: *He impoſſivel, que huma couſa ſeja, e naõ ſeja ao meſmo tempo*, como: *Dous, e dous ſaõ quatro*; e aſſim os que ſeguem eſta opiniaõ, naõ ſe livraõ da eſtravagancia dos Platonicos, que affirmavaõ, que todos os noſſos conhecimentos eraõ reminicencia; ſendo certo, que ha hum grande numero de principios, que os Filoſofos naõ tem obſervado, e outros, que talvez lhe naõ occorreráõ nunca.

223 O que nós podemos dizer com certeza neſta materia, he, que cada hum de nós naſceo com as faculdades, e diſpoſiçoens, que nos capacitaõ de formar facilmente as noſſas primeiras idèas, e de as ajuntar, fazendo dellas primeiros principios, ou primeiras verdades, todas as vezes, que a occaſiaõ ſe apreſenta, ainda que nem todos os homens naſceraõ com todas eſſas diſpoſiçoens, nem cada hum em particular; porque huns tem mayor vivacidade, penetraçaõ, e ex-

tençaõ

tençaõ de intelligencia, do que outros; e tambem porque essas disposiçoens crescem com o exercicio; e esta he a razaõ; porque huma proposiçaõ será primeiro principio para certo homem, que para outro necessitará de prova.

224 Aos principios, e primeiras verdades chamaõ, por nome geral, Axiomas, e os que ordinariamente trazem, e se achaõ em quasi todos os Authores modernos, saõ os seguintes.

AXIOMA I.

Tudo aquillo, que se contém na idéa clara, e distincta de huma cousa, se póde della affirmar.

E assim porque na idèa de homem, se contèm a idèa de animal racional, posso affirmar: que o homem he animal racional; como tambem, tudo aquillo, que a idèa de huma cousa clara, e distinctamente exclue della, se deve negar; e assim porque a idéa de homem clara, e distinctamente exclue a idèa de touro, negarey, que o homem seja touro.

AXIOMA II.

Na idèa clara, e distincta, que temos de qualquer cousa, se contèm a sua existencia ao menos possivel.

Como, se tenho a idèa clara, e distincta de huma montanha, posso affirmar, que ha huma, ou que ao menos he possivel.

AXIO-

AXIOMA III.

COmo do Nada naõ temos idéa alguma, podemos affirmar, que o Nada naõ póde ſer cauſa de couſa alguma.

AXIOMA IV.

TOda a realidade, ou perfeiçaõ, que ſe acha em huma couſa, eſſa realidade, ou perfeiçaõ ſe acha tambem formalmente, ou eminentemente na cauſa primeira, e total, que a produzio.

AXIOMA V.

NEnhum corpo póde dar a ſi meſmo o movimento.

Eſte axioma he evidente; porque ſe hum corpo em repouſo naõ recebeſſe movimento de alguma cauſa externa, eſtaria eternamente immovel.

AXIOMA VI.

NEnhum corpo póde mover a outro, naõ ſendo elle meſmo movido.

Se hum corpo em repouſo ſe naõ póde dar a ſi meſmo o movimento, como o poderá dar a outro?

Os tres axiomas, que ſe ſeguem, ſaõ o fundamento, e motivo da credibilidade da noſſa Santa Fé.

AXIOMA VII.

NAõ devemos negar aquillo, que he claro, e evidente, por naõ podermos comprehender o que he eſcuro.

Eſte axioma he certo, ainda nas couſas naturaes; porque ſabemos clara, e diſtinctamente, que o numero vinte tem raiz, e ſe lhe póde aſſinar por ſinhas em hum plano; e mais he em numeros taõ eſcuro, que ſe lhe naõ póde achar raiz, nem em numeros inteiros, nem em quebrados.

AXIOMA VIII.

HUm eſpirito finito, e limitado, de ſua natureza, naõ póde comprehender o infinito.

AXIOMA IX.

O Teſtemunho de huma peſſoa infinitamente poderoſa, e de huma ſabedoria infinita, de infinita bondade, e infinitamente verdadeira, tem muito mayor força para perſuadir o noſſo entendimento, do que as razoens mais claras, e mais convincentes.

Porque ſendo infinitamente intelligente, naõ ſe póde enganar a ſi meſmo; e ſendo ſũmamente bom, e verdadeiro, naõ nos póde enganar a nós.

AXIOMA X.

AS couſas, que nós ſabemos pelos noſſos ſentidos, quando ſaõ confirmadas por hum grande numero de peſſoas de differentes naçoens, de differentes intereſſes, e em differentes tempos, naõ ſe podendo ſuſpeitar, que todos conſpiraſſem para ſuſtentar huma mentira, devem paſſar por couſas indubitaveis.

Eſte axioma he o fundamento da mayor parte dos noſſos conhecimentos; pois he infinitamente

ma-

mayor o numero do que ſabemos por eſte modo, do que aquillo, que alcançamos por nós meſmos.

CAPITULO XIV.

Dos modos, ou inſtrumentos de ſaber.

225 OS modos, ou inſtrumentos de ſaber, naſceraõ das reflexoens, que os Logicos fizeraõ, ſobre as noſſas idèas, para diſporem o noſſo entendimento em ordem a adquirir a verdade.

226 Os modos, que excogitaraõ ſaõ quatro, a ſaber, a Definiçaõ, a Diviſaõ, a Argumentaçaõ, e o Methodo. Aqui ſó trataremos da definiçaõ, e diviſaõ, que pertencem á primeira operaçaõ do entendimento: dos outros dous inſtrumentos, ou modos de ſaber, fallaremos em ſeus lugares.

DEFINIÇAM.

A Definiçaõ he huma oraçaõ annunciativa, que declara a natureza da couſa definida.

227 Aquella, que declara a eſſencia da couſa, ou os ſeus attributos eſſenciaes, ſe chama propria, ou exacta.

228 Tres couſas ſaõ neceſſarias para huma boa definiçaõ: A primeira, que ſeja mais clara, que a couſa definida; porque de outra ſórte a naõ explicaria. A ſegunda, que conſte de genero proximo, e de ultima differença: deſta ſórte definem nas Eſcó-

las

las o homem, dizendo, que he hum *animal racional*; e nós definimos o eſpirito, dizendo, que he huma *ſubſtancia cogitante, ou intelligente*, e o corpo huma *ſubſtancia extenſa*, e Deos hum *Ente perfeitiſſimo*. A terceira, que naõ tenha nada ſuperfluo, como ſe á definiçaõ do homem ſe ajuntaſſe vivente ſenſitivo, termos, que tambem convèm aos animaes.

229 Alguns accreſcentaõ, que a definiçaõ deve ſer reciproca com o definido: como ſe diſſermos, que todo o homem he animal racional, reciprocamente diremos, que todo o animal racional, he homem.

230 A definiçaõ menos exacta ſe chama *deſcripçaõ*, e nos dá algum conhecimento da couſa, que ſe define pelos accidentes, que lhe ſaõ proprios, e nos determinaõ o que baſta, para darmos da couſa definida alguma idéa, que a diſtinga das outras couſas. Deſta ſórte ſe deſcrevem as hervas, as arvores, os frutos, e os animaes, pelas ſuas figuras, pelos ſeus tamanhos, ou grandezas, pelas ſuas cores, e outros ſemelhantes accidentes. Tambem ſe fazem outras definiçoens, ou deſcripçoens, pela cauſa, pela materia, pela fórma, pelo fim, a que ſe dirigem, &c. aſſim ſe define hum relogio, dizendo, que he huma maquina compoſta de diverſas rodas, e mólas, cujo movimento regular he proprio a marcar, ou indicar as horas notadas em hum circulo.

231 A definiçaõ do homem em animal racional, eſtá geralmente recebida de todos os Filoſofos, deſde Ariſtoteles atè os noſſos tempos; e naõ he noſſa tençaõ reprovalla; antes nos temos ſervido della para varios exemplos; porèm parece defectuoſa.

232 Pri-

232 Primeiramente; porque naõ he mais clara, que a cousa definida; porque se alguem perguntar a hum Filosofo, que cousa he o homem, lhe dirá, que he hum animal racional, e lhe vem a dizer por termos escuros, que lhe haõ de custar muito a explicar, o que o homem jà sabia por termos mais claros, antes de fazer a pergunta; pois lhe era mais claro o saber, que era huma cousa vivente, que entendia, e imaginava, que queria, ou naõ queria, e que dando-lhe na vontade, andava de huma parte para a outra, &c.

233 A boa definiçaõ deve constar de genero proximo, e ultima differença; e *Animal* naõ he genero proximo; nem *Racional* he ultima differença; porque o genero proximo, e a ultima differença saõ os attributos, pelos quaes qualquer cousa ultimamente differe, e convèm com cousa de outra especie mais proxima; e he sem duvida, que o homem mais convém com os Anjos dotados de intelligencia, e immortalidade, feitos à imagem, e semelhança do Altissimo; e assim *Animal* naõ he genero proximo do homem, nem racional a sua differença.

234 Como os Filosofos naõ conhecem a essencia das cousas, todos convèm em que a ultima differença, he aquelle attributo mais insigne, e mais illustre, pelo qual a cousa definida mais se levanta, e realça sobre as outras cousas de inferior condiçaõ; e por isso nas Escólas preferiraõ a racionalidade à risibilidade, por ser a racionalidade predicado mais illustre; porque perceber, e entender sem discurso do modo, que os homens percebem as primeiras verdades, he attributo mais illustre; e ninguem duvída, que perceber immediatamente, sem lhe ser necessario usar de meyo para a intelligencia, he cousa mais nobre,

do que discorrer para poder chegar ao conhecimento, que pertende.

235 A palavra *Animal*, significa conhecer com dependencia dos sentidos corpóreos, e fantasmas da imaginaçaõ: de que se segue, que se animal fosse a essencia do homem, quanto mais conhecesse pelos sentidos, tanto seria mais perfeito; o que he falso, e contrario ao sentir dos Santos Padres, e de toda a Religiaõ Christãa, que nos ensina, que o homem he tanto mais perfeito, quanto mais se aparta das cousas sensiveis, e corpóreas, por cujo meyo se faz mais espiritual, e mais chegado à natureza de Deos, que he a summa perfeiçaõ.

236 Na definiçaõ da Escóla, se naõ acha aquella condiçaõ, que deve ter huma definiçaõ perfeita; porque da natureza da cousa definida, devem emanar todas as suas propriedades; e naõ se pòde dizer, que de ser o homem animal racional, se segue ter liberdade, para querer, ou naõ querer: amar, ou ter odio: duvidar, ou estar certo; e principalmente se naõ segue ter appetencia para a felicidade.

237 Mas o que mais se deve notar, he, que nesta definiçaõ, naõ entra a uniaõ da alma com o corpo, que he a cousa mais admiravel; pois une duas substancias inteiramente desproporcionadas; e nella consiste toda a razaõ formal do homem; porque, posta a uniaõ entre estas duas substancias, resulta o homem; e tirada a uniaõ, já naõ he homem: logo a uniaõ he essencial na definiçaõ do homem:

Illud est essentiale, quo posito, res ponitur, quo sublato, tollitur.

238 He

238 He certo, que muito mayor affinidade tem o homem com os Anjos, para se definir em ordem a elles, do que com os brutos. A definiçaõ seguinte me parece mais essencial, mais propria, e mais confórme às regras da boa definiçaõ, a saber:

DEFINIC, AM.

O Homem, he huma substancia cogitante, e intelligente, unida a hum corpo organico, disposto, e ordenado em todas as suas partes, para as funçoens, que lhe saõ proprias.

SUbstancia cogitante, ou intelligente, he o seu *genero proximo*, pelo qual convèm com a intelligencia de Deos, e dos Anjos; e por *unida* a hum corpo organico, se distingue de tudo o mais, que naõ he homem, e he a sua *ultima differença.*

CAPITULO XV.

Da Divisaõ.

DEFINIC, AM.

A *Divisaõ he huma separaçaõ, ou distribuiçaõ de hum Todo em suas partes.*

239 Temos duas sórtes de divisoens: A primeira he a divisaõ de hum *Todo*, composto de muitas partes distinctas realmente, chamadas *Partes integrantes*; e o todo propriamente se póde chamar *repartiçaõ*. Deste modo se divide huma Cidade em quarteis: huma casa em seus apartamentos: e hum Reyno nas suas Provincias.

240 Ha outro *Todo*, que em latim chamaõ *Omne*, e as ſuas partes ſe chamaõ partes *Subjectivas*; porque eſſe todo he hum nome commum, que as ſuas partes, ſaõ huns *ſujeitos* comprehendidos na extençaõ da ſignificaçaõ do todo. A palavra *Animal*, he hum todo, cujas partes inferiores ſaõ o homem, e o bruto, que ſaõ partes ſubjectivas; e eſta mais propriamente he chamada *Diviſaõ*; e he de quatro ſórtes.

241 A primeira he, quando o genero ſe divide nas ſuas eſpecies; por exemplo, todo o numero he par, ou impar: todo o animal he racional, ou privado de razaõ.

242 A ſegunda, quando ſe dividem os generos nas ſuas differenças, como: toda a ſubſtancia he corpo, ou eſpirito: todo o animal he homem, ou bruto.

243 A terceira, quando ſe divide hum ſugeito commum nos módos oppoſtos, de que he capaz, ou ſegundo os differentes inferiores, que tem, ou em diverſos tempos, como: todo o Aſtro tem luz propria, ou empreſtada: todo o corpo eſtá em repouſo, ou em movimento.

244 A quarta, he a Diviſaõ de hum modo em ſeus differentes ſugeitos, como a diviſaõ dos bens, em bens do eſpirito, ou do corpo.

245 A primeira regra da Diviſaõ, he, que ſeja inteira, a ſaber, que os membros da diviſaõ comprehendaõ toda a extençaõ do termo, que ſe divide, como a diviſaõ do numero em *Par*, e *Impar*.

246 Eſta regra he importantiſſima; porque ha muitos

muitos termos, que parecem de tal modo oppostos, que parece, que naõ tem meyo algum; e porèm naõ deixaõ de o ter; por exemplo, entre ſabio, e ignorante ha hum meyo, a ſaber, hum homem, que ſe naõ póde dizer ignorante, nem ſabio: entre ſaõ, e doente, ha o eſtado de indiſpoſiçaõ, ou convalecença: entre o dia, e a noite, ha a lũz do crepuſcolo.

247 A ſegunda regra he, que os membros da diviſaõ ſejaõ oppoſtos, como *Par*, e *Impar*. A Diviſaõ da Eſcóla do Ente em ſubſtancia, e accidente pecca contra eſta regra; porque nada he oppoſto à ſubſtancia, ſe naõ o modo; e ſe deve emendar, dizendo, que todo o Ente, que exiſte, he ſubſtancia, ou modo; e os modos dividiremos em eſſenciaes, e accidentaes a differentes reſpeitos; por exemplo, os tres lados de hum triangulo ſaõ da eſſencia do triangulo, e naõ ſaõ mais, que accidentes do corpo: O calor he da eſſencia do ferro em braza, e naõ he mais, que hum accidente do ferro; por eſta razaõ he melhor a diviſaõ da ſubſtancia em *Cogitante*, *e extenſa*, do que a commua das Eſcólas em material, e immaterial; porque o termo *Immaterial* naõ dá huma idèa perfeita; o que ſe percebe muito melhor pela palavra *Cogitante*, ou *Intelligente*.

248 A terceira regra he, que hum dos membros naõ ſeja de tal modo comprehendido no outro, que o outro ſe naõ poſſa affirmar ſem elle, ainda que de outro modo, o poſſa comprehender; por exemplo, a linha he comprehendida na ſuperfice, pois he o ſeu termo; e a ſuperfice he comprehendida no ſolido, ou corpo, pois he o ſeu termo; e iſſo naõ impede, que a extençaõ ſe divida em linha, ſuperfice, e ſolido.

249 Estas saõ as reflexoens mais ajustadas, que se tem feito sobre a definiçaõ, e divisaõ: dos outros dous modos de saber, que saõ a *Argumentaçaõ*, *e Methodo* trataremos em seus lugares.

CAPITULO XVI.

Da identidade, e diversidade das cousas creadas.

250 DEvemos bem considerar a identidade das cousas, e a sua diversidade, para podermos affirmar serem, ou naõ serem as mesmas as cousas, de que tratomos.

251 A palavra *Cousa*, significa substancia; e nós naõ temos mais, que tres sórtes de substancias, a saber, Deos substancia eterna: as Intelligencias creadas, e finitas, como saõ os Anjos, e as nossas almas, e os córpos.

252 Deos he eterno, immutavel, e a tudo presente, e assim naõ podemos duvidar da sua identidade; porque he sempre o mesmo.

253 As intelligencias finitas começaraõ a existir em tempo; e assim a sua identidade se deve determinar pela relaçaõ da sua existencia ao tempo, que começou a existir.

254 A materia, de que se formaraõ todos os corpos, começou a existir em tempo, e dura até o presente; e como Deos creou mais materia extensa, do que o nosso entendimento he capaz de perceber, diremos, que huma certa porçaõ, ou particula da materia

teria corpórea, existe a mesma, em quanto naõ cresce, ou diminue.

255 A identidade, ou a diversidade dos modos das substancias, considerados, como abstractos das mesmas substancias, naõ saõ cousas permanentes; porque todos esses modos se reduzem a *Pensamentos* nos espiritos, e *Movimentos* nos córpos, e assim os pensamentos, e os movimentos em differentes tempos, naõ pódem ser os mesmos, pela diversidade dos tempos, em que começaraõ a existir; e a existencia, ella mesma he o principio individual, que determina hum *Ente* particular em certo tempo.

256 O que dizemos de hum corpo só para a sua existencia, diremos de dous, ou mais córpos juntos, em quanto durar a sua uniaõ.

257 Entre os córpos, ha tres generos differentes; porque huns saõ animados, como os córpos humanos: outros naõ tem alma, como a terra, as pedras, os metaes, &c. outros saõ organisados, como, por exemplo, huma laranjeira, que tem todas as partes necessarias, para receber, e distribuir o alimento, de que se nutre, para formar o tronco, a casca, os ramos, as folhas, a flor, e o fruto. Em quanto a laranjeira conserva esta organisaçaõ de partes, e em quanto a *seva* circula, he sempre a mesma laranjeira, ainda que tenha perdido muitas das suas partes, e se lhe tenhaõ communicado outras de novo. O mesmo diremos dos animaes, e ainda do homem, em quanto ao seu corpo organico.

258 A idéa, de que he sinal a palavra *Pessoa*, àlem de significar substancia, e animal, significa hum espirito

rito

rito intelligente, como o homem, que por hum conhecimento interior de ſi meſmo, ſente a ſua identidade, e que inſeparavel percebe, julga, e diſcorre, e ſe conſidèra ſempre o meſmo em differentes tempos.

259 Eſte eſpirito intelligente, que eu chamo, *Eu meſmo*, conſtitue a minha identidade, e faz, que ſou ſempre o meſmo, em quanto percebo, julgo, e diſcorro.

260 Devemos advertir, que muitas couſas ſe dizem as meſmas, ainda quando jà naõ exiſtem do meſmo modo; por exemplo, eſta propoſiçaõ: *O Tejo he hoje o meſmo rio, que era ha dous mil annos.* Eſta propoſiçaõ he verdadeira, e mais as agoas, que entaõ corriaõ, naõ ſaõ as meſmas, que hoje correm; porque a ſua exiſtencia naõ he real; mas ſómente moral, naſcida do coſtume, e do modo, com que os homens coſtumaõ formar ſemelhantes propoſiçoens; e aſſim ainda que o Tejo tiveſſe mudado de curſo, ſempre diriamos com verdade, que he o meſmo Tejo.

LOGICA

LOGICA RACIONAL, LIVRO II.

DAS REFLEXOENS DA SEGUNDA OPERAC,AM do Entendimento, que he julgar.

CAPITULO I.

Do Juizo.

DEFINIC,AM.

1 O *JUIZO he aquella faculdade da nossa alma, pela qual ella percebe a conformidade, ou opposiçaõ, que as nossas idèas tem humas com outras, e com os seus objectos.*

2 Para nós percebermos as cousas pelas idéas, que

dellas temos, as comparamos humas com outras; e achando, que a idèa tem conformidade com o ſeu objecto, unimos eſtas duas idéas, affirmando; por exemplo, vejo, que a idéa da luz tem conformidade com os Aſtros, affirmo, que os Aſtros ſaõ luminoſos; e achando oppoſiçaõ entre as idèas, as ſeparamos, negando; por exemplo, tenho a idèa da figura triangular, e da figura circular da Lua, e percebo a oppoſiçaõ deſtas duas idèas; e aſſim nego, que a Lua ſeja triangular; e a eſta acçaõ da alma chamamos *Juizo*, ou julgar.

3 Os termos, de que nos ſervimos para julgar, ſe chamaõ porpoſiçoens, que ſaõ humas oraçoens annunciativas daquillo, que queremos affirmar, ou negar, como Deos he juſto, Deos naõ he tyranno.

4 Toda a propoſiçaõ tem dous termos: o primeiro ſe chama *Sujeito*, e o ſegundo *Attributo*, ou *Predicado*. O Sujeito ſempre he termo, que ſignifica ſubſtancia, e o Attributo, ſempre ſignifica modo da ſubſtancia; e eſtes termos da propoſiçaõ devem ſer ſempre de couſas realmente exiſtentes; mas como para affirmar, ou negar, naõ baſtem os dous termos, para fazer juizo, he neceſſario unillos, ou ſeparallos; para o que nos ſervimos do verbo *He*, ou *Naõ he*, como, quando digo: Deos he juſto, ajunto eſtes dous termos, que ſignificaõ a ſubſtancia Divina, com o ſeu modo, que he a juſtiça; e quando digo: Deos naõ he tyranno, ſepàro a ſubſtancia *Deos*, do attributo tyranno.

5 Aqui devemos notar, que as propoſiçoens negativas, e privativas, que ſe naõ pódem reduzir em affirmativas, naõ ſaõ verdadeiras propoſiçoens; porque

que como toda a propoſiçaõ deve ter dous termos realmente exiſtentes, e como ellas o naõ tem, ſegue-ſe, que naõ ſaõ propoſiçoens, ainda que o pareçaõ; por exemplo, eſtas propoſiçoens: *O Nada foy a origem de todas as couſas: Tudo ſe ha de reduzir a nada;* porque o *Nada* naõ póde ſer ſujeito da primeira, nem attributo da ſegunda; deſta ſórte ha varias propoſiçoēs, como: *Hum vale ſem monte, hum baſtaõ ſem dous extremos*, e outros ſemelhantes; porèm logo ſe lhe percebe a contradiçaõ.

6 O noſſo entendimento ſe diz perfeito, quando julga bem, determinando dentro de ſi meſmo, o que he verdadeiro, ou falſo; e he eſta a faculdade, que o homem deve cultivar com mayor cuidado, pois o faz ſemelhante ao ſeu Author; e os que pertendem adiantarſe nas Sciencias, a devem cultivar com bons preceitos, maximas, e conhecimentos uteis.

7 Para bem julgar, devemos primeiro duvidar, naõ para ficar ſempre na duvida; mas para melhor aclarar a materia; porque o que julga certo, o que he certo, e duvidoſo, o que he duvidoſo, julga bem.

8 A verdadeira regra para bem julgar, he de o naõ fazer, ſem primeiro conhecer clara, e diſtinctamente o que julga, porque aſſim ſe livra de errar, conſiderando attentamente o ſeu objecto, ponderando todas as razoens, difficuldades, e inconvenientes.

9 Eſtar attento a hum objecto, he examinallo ſucceſſivamente por todos os ſeus lados; porque aſſim como com os olhos corpóreos, preſentando-nos hum dado de jogar, lhe naõ vemos direitamente mais do que huma das ſuas ſeis faces, e ſem o virarem lhe naõ pode-

poderemos ver as outras; aſſim tambem o noſſo entendimento naõ póde conhecer de hum jacto todos os differentes modos do objecto, que examina; e eſta attençaõ faz os homens ſérios, prudentes, e capazes de qualquer emprego.

10 Os juizos, que formamos ſaõ actos da noſſa vontade; e quando ella ſe naõ aplica ao amor, e conhecimento da verdade, o amor proprio lhe impede o vencer as difficuldades, que ſe encontraõ no exame da verdade, e por eſte modo ſe naõ diſpoem a formar juizos ſeguros: de que ſe ſegue, que julgar mal he hum vicio da noſſa vontade; por quanto o noſſo entendimento foy feito para entender; e quando entende bem, julga bem; e ſe julga mal, he por naõ ter bem entendido, ou por naõ ter entendido, o que baſte, para a ſua inteira intelligencia.

11 Quando nos enganamos, ſempre he porque naõ entendemos, porque aquillo, que nòs entendemos, he verdade; e o que nós naõ entendemos, naõ he nada, nem he intelligivel; porque do nada naõ temos, nem podemos ter idèa alguma.

CAPITULO II.

Dos ſinaes das propoſiçoens.

12 PElo que fica dito no capitulo precedente, ſabemos, que toda a propoſiçaõ he, ou affirmativa, ou negativa; e que o verbo *He*, he o ſinal da affirmaçaõ; e *Naõ he*, ſinal da negaçaõ; mas alèm diſſo ha outras propoſiçoens, que ſaõ differentes; e eſſa differença lhe naſce do ſujeito, a reſ-

a respeito do qual, temos tres generos de proposiçoens, a saber, universaes, particulares, e singulares.

13 As proposiçoens universaes tem por sinal a palavra *Todo*, para as affirmativas; e a palavra *Nenhum* he sinal das universaes negativas.

14 O sinal das particulares he *Algum*, como: algum homem he Medico: algum homem naõ he Médico.

15 O sinal das proposiçoens singulares he *Pedro*, *Este*, ou *oquelle*, como: Pedro he homem: esta pedra he dura: esta cera he branda, &c. Dividem-se as proposiçoens em simples, e compostas.

DEFINIÇAM.

16 *HUma proposiçaõ he simples, quando naõ tem mais, que hum sujeito, e hum attributo.*

DEFINIÇAM.

HUma proposiçaõ se diz composta, ou complexa, quando consta de muitos sujeitos, e attributos.

17 Esta proposiçaõ: o poder, a riqueza, e a sciencia, contribuem muito para os homens passarem a vida contentes, se diz composta.

18 Quando os attributos das proposiçoens complexas, saõ todos affirmados, ou negados do mesmo sujeito, ou quando o attributo he affirmado, ou negado de todos os sujeitos, as proposiçoẽs se chamaõ copulativas; porém quando hum atributo he affirmado, e outro negado do mesmo sujeito, ou quando o attributo he

affirmado, e outro negado do mesmo sujeito, ou quando o attributo he affirmado de hum sujeito, e negado de outro, essas proposiçoens se chamaõ disjunctivas.

19 Nas Logicas ordinarias se trata hum grande numero de proposiçoens, àlem das que temos dito; porèm todas as vezes, que em qualquer proposiçaõ se percebe claramente a conformidade, ou opposiçaõ entre o sujeito, e o attributo, as mais circunstancias, e variedades facilmente se percebem, e distinguem; e só ultimamente fallaremos de certas proposiçoens, que se chamaõ *Incidentes.*

20 As proposiçoens complexas, se chamaõ incidentes, quando, àlem do sentido principal, se referem, ou dizem relaçaõ a outra cousa; por exemplo, ElRey Dom Joaõ o V. filho de ElRey Dom Pedro o II. mandou edificar o magestoso Templo de Mafra.

21 As proposiçoens incidentes se dividem em determinativas, e explicativas: saõ determinativas, quando o que se lhe accrescenta determina a significaçaõ; por exemplo: *os homens, que saõ racionaes, preferem as suas obrigaçoens aos seus appetites.* As explicativas saõ aquellas, em que aquillo, que se lhe accrescenta, só serve de explicar a razaõ, porque se lhe accrescentou; por exemplo: *os homens, que saõ mortaes, se consolaõ com a esperança da immortalidade.*

22 Quando a proposiçaõ he determinativa, tirando-lhe o que se lhe accrescentou de verdadeira, ficará falsa, como na primeira proposiçaõ, tirandolhe, *que saõ racionaes*, he falso dizer em geral, que os

homens preferem as ſuas obrigaçoens aos appetites.

23 Quando a propoſiçaõ he explicativa, ainda que ſe lhe tire o que ſe lhe accreſcentou, ſempre fica verdadeira; como no ſegundo exemplo, ſe lhe tirarmos, *que ſaõ mortaes*, nenhum prejuizo faz á verdade da propoſiçaõ; porque ſem aquelle accreſcentamento he verdade, que os homens ſe conſolaõ.

24 As idèas acceſſorias augmentaõ, diminuem, e modificaõ a ſignificaçaõ das palavras, que muitas vezes acompanhaõ com o tom de voz, e com o geſto, como ſe vê nas metáforas, nas quaes humas vezes reina a delicadeza do juizo; e outras a malignidade do animo.

CAPITULO III.

Da oppoſiçaõ das propoſiçoens.

25 AS propoſiçoens ſe dizem oppoſtas, ſegundo a quantidade, ou ſegundo a qualidade: chamaõ quantidade da propoſiçaõ á ſua univerſalidade, ou particularidade; e chamaõ qualidade a affirmaçaõ, ou negaçaõ do verbo; e deſta ſórte, as propoſiçoens univerſaes affirmativas, e negativas convém, ſegundo a quantidade, e differem, ſegundo a qualidade, como: *Todo o vicioſo he infeliz: nenhum vicioſo he infeliz.*

26 As propoſiçoens univerſaes affirmativas, e as particulares tambem affirmativas, convém, ſegundo a qualidade, e ſaõ oppoſtas, ſegundo a quantidade, como: *Todo o homem he prudente: algum homem he prudente.*

27 As

27 As propoſiçoens univerſaes negativas, e as particulares tambem negativas, convèm, ſegundo a qualidade, e differem, ou ſaõ oppoſtas, ſegundo a quantidade, como: *nenhum homem he letrado: algum homem naõ he letrado.*

28 As propoſiçoens ſe dividem, ſegundo a materia, de que ſe trata, em verdadeiras, em falſas, e em provaveis. Ainda que toda a propoſiçaõ he verdadeira, ou falſa; porque toda a propoſiçaõ declára o juizo, que nós fazemos das couſas, que affirmamos, ou negamos, ſendo o juizo confórme a verdade, he a propoſiçaõ verdadeira; e naõ ſendo conforme, he falſa,

29 Devemos porém admitir a terceira eſpecie de propoſiçoens provaveis; porque muitas vezes nos falta luz para conhecer certamente o que he verdadeiro, e falſo; e algumas propoſiçoens nos parecem verdadeiras; mas naõ temos evidencia da ſua verdade; e dellas nos devemos contentar; porque nem de tudo podemos ter evidencia, ainda que bem póde ſer falſo aquillo, que nos parece verdadeiro; por exemplo, muitos Filoſofos tem por verdade ſabida, que os Planetas ſaõ habitados; porèm a razaõ, que daõ he ſó provavel, e naõ tem nenhuma evidencia; e o numero das propoſiçoens provaveis he indefinito; porque a mayor parte do que diſcorremos, ſaõ conjecturas, e naõ evidencias.

30 A figura ſeguinte, de que ſe uſa nas Eſcòlas, moſtra a conformidade, ou oppoſiçaõ das propoſiçoẽs, a ſaber, contrarias, ſubcontrarias, contraditorias, e ſubalternas; o que naõ foy mal inventado, para ajudar a memoria, ainda que ſeja muy pouca a ſua utilidade.

Todo

Todo o homem he ſubſtancia intelligente.	*Nenhum homem he ſubſtancia intelligente.*

Contrarias

ſubalternas *Contradictorias* *Contradictorias* *ſubalternas*

ſubcontrarias

Algum homem he ſubſtancia intelligente.	*Algum homem naõ he ſubſtancia intelligente.*

CAPITULO IV.

Das Cauſas.

31 CAuſa ſe diz tudo aquillo, que produz algum effeito. Ariſtoteles aſſina quatro eſpecies de cauſas, a ſaber, cauſa efficiente, cauſa material, cauſa formal, e cauſa final.

32 A cauſa material, he aquillo, de que qualquer couſa he feita; como o páo, a pedra, ſaõ a materia, de que ſe fazem as eſtatuas.

33 A cauſa formal, he a meſma eſſencia da cou-

ſa, ou o ſeu ſer intrinſeco; e tomada exteriormente, lhe daõ os Filoſofos o nome de cauſa exemplar, que he aquella, a cuja ſemelhança ſe obra qualquer couſa.

34 A cauſa final, ſe diz aquillo, por cuja razaõ, ou motivo, ſe emprende qualquer couſa; por exemplo, a cauſa, que o ſoldado tem para ſe expor na guerra aos mayores perigos, he o credito, e reputaçaõ, que vay adquirir de valeroſo.

35 A cauſa efficiente, ſe diz aquella, que faz qualquer couſa, como à ferida, que he cauſa da dor, que a alma ſente; e ſe diz tambem cauſa efficiente, quem mandou dar a ferida; porèm eſtas cauſas naõ ſaõ propriamente efficientes; porque ſó Deos he verdadeira cauſa efficiente de todo o creado; e as creaturas ſó ſe pódem chamar cauſas deficientes.

36 Cauſa *Total*, he aquella, que produz inteiramente todo o effeito; e ſe diz cauſa *Parcial*, aquella, que concorre com outra para o effeito, como o pay, e a mãy ſaõ cauſas parciaes dos filhos.

37 Cauſa *Propria*, ſe diz aquella, cujo effeito procede da ſua meſma natureza, como, o Sol he cauſa da luz; e o meſmo Sol ſe diria cauſa impropria, ou accidental da morte de hum homem, a quem o ſeu calor abrazaſſe.

38 O pay ſe diz cauſa *Proxima* do filho, e o avô cauſa *Remota*.

39 Deos a reſpeito das creaturas, que produzio, ſe diz cauſa *Equivoca*; e o pay a reſpeito do filho ſe diz

diz causa *Univoca*; porque produz seu semelhante.

40 Como as causas, e os effeitos saõ reciprocos, temos quatro sórtes de termos oppostos, a saber, *Relativos*, como pay, filho, amo, criado, &c. *Contrarios*, como frio, quente, saõ, doente, &c. *Privativos*, como a morte, a cegueira, as trevas, &c. e *Contradictorios*, que consistem no termo, e na negaçaõ do mesmo termo, como, ver, naõ ver, ouvir, e naõ ouvir.

41 As relaçoens, ou respeitos, que humas cousas dizem a outras, devem servir de regra para bem examinarmos o sujeito, e o attributo daquillo, que queremos conhecer; porque nos naõ devemos contentar de conhecer hum objecto tal, qual elle he em si mesmo; mas álem disso devemos estudar as relaçoens, que esse objecto póde ter (sendo causa) com todos os objectos, a quem se ajunta para obrar; porque a efficacia de huma causa, naõ depende tanto das disposiçoens do sujeito, sobre que se exercita, quanto depende da sua propria actividade.

CAPITULO V.

Do Pyrrhonismo.

42 O Pyrrhonismo, he huma certa Seita de Filosofos, antigamente chamados *Academicos*, e tambem chamados *Supticos*, de huma palavra Grega, que significava considerar. Pyrrhon, hum dos mais celebres defensores desta Seita, lhe deu o nome de Pyrrhonismo. Até o seu tempo duvidava esta Seita, se havia alguma cousa certa

ta no nosso conhecimento; porèm elle decidio, que só era certo, naõ haver no nosso conhecimento certeza alguma; e assim, nem o verosimil admittiaõ; por naõ ficarem obrigados a confessar, que havia algum conhecimento proximo da verdade.

43 Eu naõ sey como hum destes Filosofos podia duvidar, que dous, e dous saõ quatro, que o branco naõ he negro, ou que ao menos he mais verosimil, do que tudo aquillo, que no mundo he mais incerto.

44 Ainda hoje ha alguns homens, que affectaõ duvidar de tudo; porèm he só de boca; porque naõ pódem deixar de estar certos da sua existencia; pois saõ alguma cousa neste mundo; e se disto duvidaõ sériamente, será por terem o cerebro turbado, ou inteiramente perdido o juizo.

45 Esta Seita he toda cheya de contradiçoens; e só serve aos seus sequazes para disputas frivolas; para o que tem campo largo, assim pela fraqueza do nosso entendimento, como porque as cousas, que sabemos com certeza, saõ hum quasi nada, em comparaçaõ das muitas, que ignoramos.

46 Estes Filosofos de nome, fóra das disputas, fallaõ, e obraõ, como quem está certo do que diz; e só o que ordinariamente negaõ de si para si, he a nossa liberdade; e nisso tambem a cada passo se contradizem; porque fazendo-lhe outro qualquer homem alguma injuria, logo procuraõ vingarse, ou se queixaõ á justiça, para que castigue quem os injuriou; porèm se o que os injuriou naõ tinha liberdade, naõ merece castigo; e assim elles se queixaõ sem razaõ.

47 Cicero em algum tempo ſeguio a Seita do Pyrrhoniſmo; mas forçado da voz da natureza, veyo a reconhecer, que ha verdades taõ evidentes, que he impoſſivel deixar de ſe convencer dellas:

Eſt quædam ita præſpicua veritas, ut eam infirmare nulla res poſſit. Cic. Orat.

48 Os que ſeguem eſta depravada Seita ſe perſuadem, ſem reflexaõ, que tudo no homem he mecaniſmo por dentro, e por fóra, no eſpirito, e no corpo; porém logo ſe contradizem; porque chegada a occaſiaõ, eſcolhem, delibéraõ, e pezaõ as razoens por huma, e outra parte, ſegundo a importancia da materia, e do intereſſe, que nella tem; e antes querem ſuſpender o juizo, do que determinarſe ligeiramente nos ſeus negocios: Elles ſe pagaõ, e ſe ſatisfazem muito de ſi meſmos, nas cautellas, que tem uſado para conſeguirem os ſeus intentos.

49 Elles eſtimaõ muito as peſſoas, de que tem recebido algum beneficio, e ſe crem obrigados ao reconhecimento: tem odio aos ingratos, e ſe queixaõ da injuſtiça, da ſoberba, e da deſcortezia: Logo claramente ſe manifeſta, que no que obraõ, deſmentem o que dizem.

LOGICA RACIONAL, LIVRO III.

DA TERCEIRA OPERAC,AM DO ENTENDIMENTO, que he discorrer.

CAPITULO I.

Do Discurso.

DEFINIC,AM.

1 O *DISCURSO naõ he outra cousa mais, do que inferir, ou deduzir huma cousa de outra.*

Como, por exemplo, de ser a cera extensa, inferimos, que he figuravel.

2 Os Filosofos antigos fundaraõ o discurso nos curtos limites do entendimento humano; porque fazendo

zendo reflexaõ, que nas converſaçoens, que os homens tinhaõ ſobre materias ſcientificas, a cada paſſo ſe embaraçavaõ, inventáraõ o ſyllogiſmo, para evitar os ſubterfugios, que buſcavaõ, quando ſe viaõ convencidos; e aſſim ſahiaõ a cada inſtante do eſtado da queſtaõ, para outra muy differente.

3 Tiveraõ muita razaõ aquelles primeiros indagadores da verdade; porque por meyo dos Syllogiſmos ficaõ os argumentantes obrigados a ſe fundarem ſobre idéas claras, examinando attentamente a conformidade, ou a oppoſiçaõ, que as meſmas idèas tem com os objectos, que repreſentaõ; e aſſim determináraõ, que o ſyllogiſmo ſimples, que he o mais perfeito, conſtaſſe de tres propoſiçoens, das quaes às duas primeiras dèraõ o nome de *Premiſſas*, e á terceira dèraõ o nome de *Concluſaõ*, ou *Conſequencia*: a concluſaõ he ſempre a meſma propoſiçaõ, que ſe quer provar.

4 Como toda a propoſiçaõ tem dous termos, em que o primeiro he ſujeito, e o outro attributo, ou predicado, na propoſiçaõ, que ſe quer provar, o ſujeito ſe chama *Termo menor*; e o ſeu attributo ſe chama *Termo mayor*; e todo o arteficio conſiſte em buſcar huma terceira idèa, á qual chamáraõ *Meyo*; e eſtes tres termos ſe devem diſpor, de ſórte, que o *Meyo* com o termo mayor componhaõ a primeira propoſiçaõ, que tambem chamaõ propoſiçaõ mayor; e que o meſmo *Meyo* com o termo menor componhaõ a ſegunda propoſiçaõ: a terceira propoſiçaõ he ſempre aquella, que ſe quer provar, e no ſyllogiſmo ſe chama *Concluſaõ*.

5 Para

5 Para mayor intelligencia, ſupponhamos, que queremos provar, *que Pedro he juſto*; e para moſtrar, que eſta propoſiçaõ he verdadeira, buſco hum meyo, ou terceira idéa, que tenha conformidade com o attributo *Juſto*, e acho, que a obſervancia das leys Divinas, e humanas, faz os homens juſtos; e aſſim fòrmo a primeira propoſiçaõ, dizendo: Todo o homem, que obſerva as leys Divinas, e humanas, he juſto; e aqui comparey o Meyo com o attributo; e logo comparando o meſmo meyo com o ſujeito, ou termo menor, fórmo a ſegunda propoſiçaõ, dizendo: Mas Pedro obſerva as leys Divinas, e humanas: Logo Pedro he juſto.

PROPOSIC,AM I. MAYOR.

Todo o homem, que obſerva inviolavelmente as leys Divinas, e humanas, he juſto

PROPOSIC,AM II. MENOR.

Mas Pedro obſerva inviolavelmente as leys Divinas, e humanas:

PROPOSIC,AM III. CONSEQUENCIA.

Logo Pedro he juſto.

6 Devemos notar, que nos ſyllogiſmos ſempre ha huma proporçaõ de igualdade, que moſtra, que ſe duas couſas ſaõ iguaes a huma terceira, ſaõ iguaes entre ſi, fallando em termos geometricos; o que tambem ſe verifica em termos Filoſoficos; porque as couſas, que ſe identificaõ com huma terceira, tambem ſe identificaõ, ou ſaõ as meſmas entre ſi.

7 Esta proporçaõ se mostra, comparando o meyo com cada hum dos extremos, como já fica dito; e para mayor clareza, torno-o a repetir com mayor individuaçaõ.

Supponhamos, que queremos provar, que a cera he figuravel, busco hum meyo, que tenha conformidade com o termo mayor da proposiçaõ, que he *Figuravel*, e acho, que o termo *Extençaõ* tem essa conformidade: o que supposto, passo a formar o syllogismo. Em primeiro lugar, comparo *Extençaõ* com *Figuravel*, e fórmo juizo, que a extençaõ, e a figura tem entre si conformidade. Em segundo lugar, comparo a *Extençaõ* com o termo menor *a Cera*, que he o sujeito, e fórmo juizo, de que tambem tem entre si conformidade. Em terceiro lugar, comparo o sujeito da proposiçaõ, que quero provar com o seu attributo, a saber, a *Cera* com a *Extençaõ*; e lhe naõ acho opposiçaõ, ou repugnancia alguma. Atèqui tenho feito três juizos; porèm estes ainda naõ compoem o discurso, ou a inferencia; porque àlem disso he necessario, que o entendimento da proporçaõ, que tem reconhecido entre hum, e outro extremo com o meyo, por força da comparaçaõ, deduza.

Tudo o que he extenso he figuravel;

Mas a cera he extensa:

Logo a cera he figuravel.

CAPI-

CAPITULO II.

Da Divisaõ dos Syllogismos.

8 ENtre os Syllogismos, huns saõ simples, e outros conjunctivos. Os Syllogismos conjunctivos saõ aquelles, nos quaes o meyo termo se ajunta aos outros dous na primeira proposiçaõ; por exemplo:

PROPOSIC,AM I. MAYOR.

SE hum Estado he sugeito a divisoens, será de pouca duraçaõ;

PROPOSIC,AM II. MENOR.

MAs hum Estado electivo, he sujeito a divisoens:

PROPOSIC,AM III. CONSEQUENCIA.

LOgo o Estado electivo será de pouca duraçaõ.

9 Os Syllogismos simples, saõ aquelles, em que o meyo termo se ajunta huma só vez a cada hum dos extremos; por exemplo:

Todo o Principe pio he amado dos seus vassallos;
ElRey Nosso Senhor he Principe pio:

Logo ElRey Nosso Senhor he amado dos seus vassallos.

Prin-

Principe pio, que he o meyo, e he comparado com o attributo da primeira proposiçaõ, e com o sujeito da segunda.

10 Os Syllogismos simples se dividem em *Enthymemas*, e em *Sorites*, ou *Gradaçoens*. Os Enthymemas saõ Syllogismos, que só constaõ de duas proposiçoens; e se suprime ordinariamente a primeira, por se entender claramente, e ser desnecessario expressalla, por exemplo;

Toda a Cera he extença;

Logo toda a Cera he figuravel.

11 Alguns Filosofos chamaõ ao Enthymema Syllogismo imperfeito, ou truncado; e naõ tem razaõ; porque o Enthymema he argumento perfeito no juizo; e se póde dizer, que lhe naõ falta nada; pois que o que falta he só a expressaõ, que claramente se percebe, e he desnecessario expressalla; e tanto naõ he imperfeito, que antes he o mais frequentado dos Doutos.

12 *Sorites*, ou *Gradaçaõ* he hum argumento de muitas proposições, que se vaõ deduzindo humas de outras, até chegar á ultima, que se quer provar, e que ha de ser a conclusaõ; e as proposiçoens vaõ servindo de *meyos termos* humas para as outras; por exemplo, supponhamos, que queremos provar, que o peccado mortal he detestando, formaremos assim o argumento:

O peccado mortal nos priva do Ceo,

O que nos priva do Ceo, nos mete no Inferno;

O que nos mete no Inferno, nos faz infelices;

O que nos faz infelices he deteſtando;

Logo o peccado mortal he deteſtando.

13 Dividem-ſe mais os ſyllogiſmos em dilemas, e em inducçoens. A inducçaõ, he hum argumento, no qual de muitas propoſiçoens ſingulares, ſe tira huma concluſaõ univerſal; por exemplo:

Pedro he mortal;

Paulo he mortal;

Joaõ he mortal, &c.

Logo todo o homem he mortal.

14 Dilema, he hum argumento disjunctivo, de que ſe tiraõ duas concluſoens oppoſtas, por exemplo:

O vaſſallo, ou ha de fazer o que ElRey lhe manda contra a Ley de Deos, ou ſe ha de revoltar contra elle;

Mas elle naõ deve fazer o que ElRey lhe manda contra a Ley de Deos:

PRIMEIRA CONCLUSAM.

L*Ogo deve-ſe revoltar contra elle;*

SEGUNDA CONCLUSAM.

M*As naõ se deve revoltar contra elle:*

Logo deve fazer o que lhe manda contra a Ley de Deos.

15 Este modo de argumentar, he pouco seguro; porque para bem concluir, he necessario, que entre as duas proposiçoens oppostas, naõ haja meyo algum; e assim nenhuma das duas conclusoens a cima he legitima; porque nem o vassallo se deve revoltar contra ElRey, nem deve fazer o que elle lhe manda contra a Ley de Deos; porque entre essas duas cousas ha hum meyo, que he de sofrer com paciencia a tyrannia do Rey.

CAPITULO III.

Da Demonstraçaõ.

16 A Demonstraçaõ, he hum syllogismo, que faz o entendimento certo, e imperturbavel, e he a origem da sciencia; porque nada sabemos com toda a evidencia, a que podemos chegar por via de discurso, e inferencia, como aquillo, que nos he com clareza, e evidencia demonstrado.

17 Huma demonstraçaõ, que prova os effeitos pela sua causa, se chama nas Escólas demonstraçaõ *a priori.* E demonstraçaõ, que prova a causa pelos seus effeitos se chama *a posteriori.*

18 Em

18 Em materia de demonſtraçaõ, e de todo o diſcurſo, em que nos queremos aperfeiçoar, nos deve ſervir primeiramente de guia a razaõ, cuja ſagacidade nos deve tambem ſervir. Em primeiro lugar, para deſcobrir o meyo termo, para provar o que pertendemos. Em ſegundo lugar, para diſpor as provas, de ſórte, que moſtrem a conformidade. Em terceiro lugar, para diſpor a conformidade, de ſórte, que claramente ſe perceba. Em quarto lugar, para tirar huma juſta concluſaõ.

19 Eſte termo *razaõ*, em materia de diſcurſo tem varias ſignificaçoens; porque, em primeiro lugar, ſignifica os primeiros principios evidentes, e verdadeiros. Em ſegundo lugar, ſignifica as conſequencias claras deſſes meſmos principios. Em terceiro lugar, ſignifica muy ordinariamente a cauſa final, ou o motivo, porque alguma couſa ſe obra. Em quarto lugar, chama-ſe ſagacidade aquelle habito, que o entendimento tem, com que facilmente lhe occorrem os meyos, para provar o que pertende. Em quinto lugar, o que principalmente ſe deve entender por *razaõ*, he aquella faculdade da noſſa alma, pela qual nos diſtinguimos dos brutos, e infinitamente os excedemos.

CAPITULO IV.

Das regras dos ſyllogiſmos.

20 A Regra geral para todos os ſyllogiſmos he, fogir de termos equivocos, que ſignifiquem ao meſmo tempo duas, ou mais couſas differentes, ou que ſe poſſa tomar em dous differentes ſentidos.

21 O

21 O termo equivoco he aquelle, que ſignifica duas couſas inteiramente differentes, como, por exemplo, a palavra *Padraſto*, quando ſignifica hum homem, que caſando com huma viuva, fica em lugar de pay dos filhos de ſeu primeiro marido; e padraſto, ſignifica tambem hum outeiro, junto de huma Praça de guerra, donde os inimigos a deſcobrem, e lhe pódem fazer muito damno.

22 Quando a palavra, ou termo ſe toma em dous differentes ſentidos, ou tem differentes partes, e ora he tomado em huma parte, e logo em outra, a conſequencia, que ſe tira, naõ pòde ſer legitima; por exemplo, eſta propoſiçaõ: a *ſabedoria he hum bem*, he certa, e evidente; e ſe della ſe tirar por conſequencia, que o ſabio he feliz, ainda nos tormentos, fazendo, por exemplo, eſte argumento:

A ſabedoria he hum bem;

Mas o bem faz o homem feliz:

Logo o ſabio he feliz nos tormentos.

Eſta concluſaõ naõ he legitima; porque o ſabio bem ſe póde dizer feliz nos tormentos; porque os naõ mereceo: he feliz; porque os ſofre com paciencia; e he feliz pela eſperança do premio: eſtas felicidades lhe procura a ſabedoria, porém naõ lhe tira as dores, que padece, porque a ſabedoria naõ he todo o bem.

23 Os nomes, ou termos equivocos ſaõ faceis de conhecer, quando baſtaõ os noſſos ſentidos para lhe notar a differença; mas naõ he taõ facil, quando o enten-

entendimento lhe buſca eſſa differença. Os termos methafóricos, que ſempre trazem dous differentes ſentidos ſaõ a cauſa de muitos ſofyſmas.

24 As propoſiçoens, de que nos devemos ſervir nos ſyllogiſmos devem ſer certas, e bem determinadas com evidencia; porque niſſo conſiſte toda a certeza. Com ſemelhantes propoſiçoens fica o noſſo entendimento imperturbavel, ainda que naõ poſſamos reſponder às objecçoens, que nos fizerem ſobre aquillo, de que eſtamos certos com evidencia; por exemplo, ninguem póde duvidar, que o calor abranda a cera, e endurece a lama: e que o frio indurece a agoa, e quebra as pedras humidas, e naõ deixamos de eſtar certos, de que eſtes effeitos ſaõ verdadeiros, ainda que naõ poſſamos dar a razaõ, a quem nos perguntar, como pòde huma meſma cauſa produzir effeitos taõ differentes.

25 Nas Eſcólas daõ hum grande numero de regras para os ſyllogiſmos, que nós reduzimos a tres ſómente; porque todas as mais ſaõ ſuperfluas.

26 A primeira regra, que já temos dado em geral, he, que nenhum dos tres termos do ſyllogiſmo ſeja equivoco, que ſignifique, ou ſe poſſa aplicar a duas couſas differentes; porque como no ſyllogiſmo ſe procura deſcobrir, ſe as duas idèas da concluſaõ tem conformidade com a idéa do meyo termo, de que nos ſervimos, para poder affirmar huma da outra, ou a oppoſiçaõ, para ſe poder negar, ſendo preciſa a comparaçaõ das tres idèas, he certo, que ſe naõ pódem comparar, quando os termos múdaõ de ſignificaçaõ.

27 A ſegunda regra he, que de duas premiſſas negativas ſe naõ póde ſeguir concluſaõ, nem affirmativa, nem negativa; porque ſe os dous termos da concluſaõ ſaõ ſeparados do terceiro, naõ ſe ſegue, que ſejaõ unidos, nem ſeparados; e aſſim teremos entendido, que de duas premiſſas negativas, ainda que ambas verdadeiras, naõ ſe póde ſeguir concluſaõ, nem affirmativa, nem negativa.

28 A terceira regra he, que todas as vezes, que huma das premiſſas for negativa, a concluſaõ deve tambem ſer negativa; porque ſe o primeiro termo he ſeparado do terceiro, e o ſegundo unido com o terceiro, naõ ſe ſegue, que o ſegundo, e o primeiro ſejaõ entre ſi unidos: e por conſequencia a concluſaõ naõ póde ſer affirmativa, quando a precede huma propoſiçaõ negativa.

29 O Author da Arte *de penſar*, bem celebrado pela alta reputaçaõ, que o ſeu grande talento, e letras lhe tem grangeado, reduzio a huma ſó regra as tres, que temos dado, e muitas mais, que ſe enſinaõ nas Eſcólas, affirmando, que hum ſyllogiſmo he legitimo, e concludente todas as vezes, que nelle ſe obſerva a regra ſeguinte.

REGRA.

HUm ſyllogiſmo he bom, todas as vezes, que tiver duas circunſtancias, a primeira, que a concluſaõ ſeja contheuda em huma das premiſſas, e que a outra das premiſſas moſtra, que ella he manifeſtamente contheuda.

30 Naõ ſe póde negar, que a regra he boa, e certa; porèm naõ accreſce nenhum trabalho em eſtudar

dar as tres, que temos dado, por me parecer, que nellas se procede com mayor clareza.

31 Todos os syllogismos, em que se naõ observarem as tres regras, que temos dado, saõ sujeitos a erros; e ainda os enthymemas, inducçoens, ou sorites, dilemas, &c. degeneraõ em sofysmas.

32 Todos os differentes modos de argumentar se reduzem a syllogismos, como com qualquer attençaõ se póde ver; e todo o Logico deve procurar reduzir os seus argumentos a syllogismos; e de todos os syllogismos, o mais perfeito he o simples de tres proposiçoens singellas.

33 Esta reducçaõ será muy util; porque em occasiaõ de conclusoens publicas, os ouvintes percebem melhor a difficuldade, e força do argumento; e tambem o defendente repete com mayor facilidade, concedendo, ou distinguindo com mayor clareza.

34 Com o que temos dito, me parece desnecessario tudo o mais, que se trata nas Escólas; como tambem as figuras de *Barbara*, *Celarent*, *&c.* Naõ porque tudo seja inteiramente inutil; mas porque pede hum laborioso estudo, e huma grande aplicaçaõ; e para nos servirem aquelles modos, e figuras para a reducçaõ ao impossivel, he necessaria ao Filosofo huma felicissima memoria, e sempre prompta, de que lhe naõ seria necessario usar, nem huma só vez na vida, se houvesse de fazer a reducçaõ de repente; sendo certo, que bem observadas as regras, que temos dado, logo conheceremos facilmente os defeitos de qualquer syllogismo, porque os que lhe naõ forem conformes, se devem reputar por sofysmas.

35 Finalmente, as mais queſtoens, que ſe coſtumaõ tratar nas Logicas ordinarias, a reſpeito dos ſyllogyſmos, com todas as ſuas diviſoens, e ſubdiviſoẽs, lhe deixamos voluntariamente a diſputar.

CAPITULO V.

Dos Sofyſmas.

36 OS ſofyſmas ſaõ huns argumentos viciosos, e falſos, que os homens fazem por falta de ſaberem as regras do verdadeiro diſcurſo; porque ſabidas as tres regras, que ficaõ dadas no capitulo precedente, he o que baſta para conhecer os ſofyſmas; porque com ellas ſe naõ conformaõ; e he a razaõ, porque os Filoſofos modernos naõ trataõ em particular dos ſofyſmas; e niſto lhes naõ acho razaõ; porque os que ſabem as differentes cauſas; porque os argumentos, ou ſyllogiſmos ſaõ vicioſos, alcançaõ mais facilmente o meyo de os evitar, e de naõ cahir nos ſeus erros. Ariſtoteles aſſigna ſete modos de mal diſcorrer, e concluir.

37 O primeiro modo de mal diſcorrer, he de provar aquillo, de que naõ he queſtaõ, ſuppondo, que exiſte aquillo, que naõ tem nenhuma exiſtencia; por exemplo, quem quizeſſe provar a hum homem, que tem na ſua aljabeira dez mil cruzados, tendo-a elle certamente vaſia, lhe faria eſte argumento:

Tu tens na aljabeira tudo o que naõ perdeſte;

Tu naõ perdeſte dez mil cruzados:

Logo tens na tua aljabeira dez mil cruzados. Neſ-

Neste sofysma cahem aquelles, que dizem, que a privaçaõ he hum principio do corpo; porque quando buscamos os principios das cousas, jà suppomos, que antes de ser naõ eraõ; e o que buscamos he saber os principios, de que he composta a cousa, e a causa, que os produzio.

38 O segundo modo de mal discorrer, he de suppôr por verdadeiro aquillo mesmo, de que he questaõ; e a este modo chama Aristoteles *Petiçaõ de principio.* De semelhante argumento se servem os que querem provar, que a terra está no centro do mundo; por exemplo:

O centro do mundo he aquelle, para onde se encaminhaõ todos os corpos graves;

Mas todos os corpos graves se encaminhaõ para o centro da terra:

Logo a terra he o centro do mundo.

O vicio deste argumento està em suppor, que todos os corpos pezados se encaminhaõ ao centro do mundo: cousa, que ninguem atégora tem mostrado.

39 O terceiro modo, he de tomar por causa de hum effeito aquillo, que naõ he causa. Os que attribuem ao medo do vacuo o effeito de sobir a agoa pelas bombas àspirantes, cahem neste vicio; porque attribuem ao medo do vacuo, que he huma causa quimerica, o que tem por causa verdadeira o pezo do ar.

40 O quarto modo, he de julgar, que huma cousa he tal, por aquillo, que só lhe convém accidental-

mente, tirando huma concluſaõ abſoluta, e ſem reſtricçaõ daquillo, que ſó he verdade accidentalmente: neſte vicio cahem aquelles, que declamaõ contra a ſciencia, que mal aplicada produz muito màos effeitos.

41 O quinto modo, he de ſe ſervir mal a propoſito da ambiguidade das palavras: eſte vicio he quaſi geral; porque nelle ordinariamente ſe achaõ quatro termos: ou ſeja; porque o meyo termo ſe toma duas vezes particularmente, ou porque na primeira propoſiçaõ he tomado em hum ſentido, e na ſegunda em outro: ou ſeja finalmente; porque os termos da concluſaõ naõ foraõ tomados nas premiſſas no meſmo ſentido: de que ſe moſtra, que eſte modo de mal diſcorrer comprehende todos os ſyllogiſmos vicioſos, por ſe naõ obſervarem bem as tres regras, que temos dado.

42 O ſexto modo de mal diſcorrer, he de paſſar do ſentido dividido ao ſentido compoſto. Quando Medéa diſſe, que via o bem, e ſeguia o mal, ſó dizia verdade em ſentido diviſo; porque naõ ſeguia o mal, ſenaõ depois de ter viſto o bem. Mas quando ſe diz, que hum homem, que chora naõ póde rir, he em ſentido compoſto, a ſaber, em quanto chora; porque depois poderá rir.

43 O ſetimo modo de mal diſcorrer, he, quando ſe faz paſſar huma couſa por abſolutamente verdadeira, ſendo ſó verdadeira a certo reſpeito; como ſe alguem diſſeſſe: os Ethiopes tem todos os dentes brancos: logo ſaõ todos brancos: ou todos os homens tem hum corpo: logo naõ tem eſpirito. Os ſoſyſmas, que mais enganaõ, ſaõ os paralogiſmos; porque trazem muitas apparencias de verdade.

CAPI-

CAPITULO VI.

Da certeza, que podemos tirar daquillo, que ſabemos pelos noſſos ſentidos.

44 A Mayor parte dos Filoſofos modernos dizem, que os noſſos ſentidos naõ pódem ſer regra de certeza alguma, e que naõ devemos dar credito a quem taõ ordinariamente nos engana; pelo contrario, os que ſeguem a doutrina de Gaſendo dizem, que tudo o que ſabemos, o adquirimos por meyo dos noſſos ſentidos: opiniaõ, que ſó póde ter lugar no conhecimento das couſas corpóreas, e ſenſiveis (como fica moſtrado, livro 1. cap. 6. numer. 84.

45 Pelo que a recta razaõ nos dicta, naõ nos podemos perſuadir, que os noſſos ſentidos nos foraõ dados para naõ ter uſo algum no noſſo conhecimento, quando eſtamos vendo, que a ſabedoria, e bondade do Creador (que naõ faz nada inutil) ſe propoz de nos meter de poſſe dos objectos corpóreos, e de nos aproveitarmos do ſeu commercio.

46 He certo, que ſe pelos noſſos ſentidos naõ podeſſemos ter certeza alguma, andariamos cegos, e errados; e ſeria Deos a cauſa dos noſſos erros, ſe nós naõ podeſſemos diſtinguir hum corpo de outro, pois que para iſſo nos foraõ dados, e naõ para penetrar, e deſcobrir a natureza, e conſtituiçaõ interior dos primeiros principios, e actos intelectuaes da noſſa alma.

47 Se naõ eſtiveſſemos certos de conhecer, ſem riſ-

risco de nos enganar os objectos corpóreos, e aquillo, que vemos, e tocamos, naõ fosse como nos parece; por exemplo, hum homem, hum cavallo, &c. seria tudo no mundo huma apparencia vãa, e enganosa, e que Deos naõ creou a substancia corpórea; mas sómente quiz, que nós tivessemos huma apparencia della, como se fosse cousa mais digna da Omnipotencia Divina, imprimir nos nossos sentidos huma apparencia vãa, do que effectivamente ter creado o Universo; pois he certo, que a poderosa efficacia de huma causa, se mede pela grandeza dos seus effeitos.

48 Todo o homem, que affirmar, que naõ ha certeza alguma naquillo, que sabemos pelos nossos sentidos, he necessario, que confesse, que naõ he sua a mulher com quem he casado, nem saõ seus os filhos, que tem presentes, e que ainda que hontem se achou na audiencia, que ElRey dava aos seus vassallos, e que lá vio muitas pessoas suas conhecidas, e muitos Cavalheiros à parede, que conheceo distinctamente, e lhes sabe os nomes; porém, que tudo o que vio foy huma mera apparencia; porque nem alli estava Rey, nem vassallos, nem havia realidade alguma em tudo aquillo, que lhe parecia ver. Naõ sey, que haja homem de mediocre juizo, que naõ reconheça o absurdo de semelhante opiniaõ.

49 Spinosa, que se fez celebrado pela sua estravagancia, quiz introduzir, fazendo-se Atheista, que no mundo naõ havia mais, que huma só substancia; e que todas as especies differentes eraõ modificaçoens dessa substancia: elevado da sua ridicula idéa, naõ fez reflexaõ, que *substancia* he hum termo abstracto, que naõ tem realidade alguma; e assim fundou o seu siste-

ma

ma para provar, que naõ havia mais, que huma ſubſtancia no argumento ſeguinte:

Naõ ha mais, que huma unica definiçaõ de ſubſtancia:
Logo naõ ha mais, que huma ſubſtancia no mundo.

Porque ſe houveſſe mais que huma ſubſtancia, naõ diria a definiçaõ com o definido. Com ſemelhante argumento lhe provariamos, que naõ ha mais, que huma figura no mundo, porque naõ ha mais, que huma definiçaõ da figura, que he hum eſpaço terminado por toda a parte por hum, ou muitos termos, a ſaber, por muitas linhas rectas, ou por huma ſó curva; e aſſim o quadrado, o triangulo, o circulo, &c. ſeriaõ modificaçoens da figura, como elle diz, que ſaõ os homens modificaçoens da ſubſtancia de hum homem, que nem naſce, nem morre, nem ſe vê; e que todos os mais milhoens de homens ſaõ modificaçoens deſta quiméra. Spinoſa ſem duvida tinha huma grande repugnancia a fallar como homem de bem, e a ſe conformar com a razaõ, para formar hum ſiſtema contra toda a Religiaõ em geral, fundado em hum principio incrivel, e taõ facil de ſe lhe conhecer o ridiculo.

50 Nós temos moſtrado, que eſta palavra *ſubſtancia* he hum termo abſtracto, que ſe pòde aplicar a huma infinidade de ſujeitos, e tudo o que exiſte no mundo he ſubſtancia; porèm a idèa vaga, que a repreſenta, naõ tem realidade alguma: eu tenho, por exemplo, a idèa de arvore, e a aplicò a hum grande numero de arvores differentes, todas reaes, e determinadas: da meſma ſórte, tenho huma idèa vaga do numero, do homem, do bruto, da pedra, &c. porèm a eſtas idèas vagas, e incompletas, nada preciſamente lhe correſ-

ponde: As idèas determinadas, e completas, que nós temos de hum loureiro, de hum castanheiro, de hum homem, de hum cavallo, &c. saõ idèas determinadas; e lhe correspondem cousas, que existem no mundo: esta distincçaõ das idèas determinadas, basta para desvanecer a extravagancia ridicula do sistema de Spinosa.

51 Diráõ, que se naõ póde negar, que os nossos sentidos, muitas vezes nos enganaõ; e assim he; porém hę porque nos precipitamos a julgar sobre as primeiras apparencias; e o erro naõ vem dos nossos sentidos; mas sim do juizo, que formamos, por exemplo, vemos hum bastâõ metido na agoa, e julgamos, que està quebrado; e os sentidos assim o devem representar pelas leys das reflexoens, e refracçoens da luz; e em semelhantes casos, devemos considerar, o que outras vezes nos tem succedido, como em huma alameda comprida nos tem parecido as ultimas arvores chegadas humas ás outras, sendo todas na realidade igualmente distantes. Devemos considerar os objectos visiveis, naõ só com a vista; mas tambem com o tacto, considerando-os em differentes tempos, em differentes situaçoens, e repetidas vezes, como nos adverte Cicero:

Et lumen mutari sæpe volumus, & situs earum rerum, quas intuemur, & intervala, aut contrahimus, aut deducimus usque eò, ut aspectus ipse fidem faciat sui judicii.

52 Alguns Filosofos assinaõ tres regras, e dizem, que bem observadas nos daõ inteira certeza daquillo, que conhecemos pelos sentidos: A primeira, que os orgãos da vista, e mais sentidos estejaõ bem dispostos: A segunda, que o meyo entre o objecto, e o sentido

naõ

naõ tenha embaraço algum: A terceira, que o obje-ᶜto eſteja em diſtancia conveniente.

53 Nós naõ nos enganamos, quando os orgãos dos noſſos ſentidos eſtaõ bem diſpoſtos, e ſem defeito; e o meyo, por onde paſſa, naõ he ſuſpeito, quando o objecto parece o meſmo examinado em differentes tempos, e em differentes lugares: Mas ſobre tudo devemos ſeguir as regras, que temos dado em differentes lugares, que he de conſultar a razaõ, inſtruindo-nos por experiencia, fazendo muitas ſobre qualquer objecto; e naõ nos podendo inſtruir pelas experiencias, recorreremos às conjecturas.

54 Os que totalmente negaõ, que do que os noſſos ſentidos nos repreſentaõ naõ póde haver certeza alguma, ſaõ ſuſpeitos na noſſa Santa Fé, e tiraõ o credito á Eſcritura Sagrada, que em muitos lugares nos propoem as verdades, que contém com o teſtemunho dos noſſos ſentidos; e Chriſto Senhor Noſſo querendo perſuadir aos Diſcipulos a ſua ſagrada Reſſurreiçaõ, ſe ſervio do teſtemunho dos ſentidos, dizendo-lhes, que apalpaſſem, e viſſem; porque os eſpiritos naõ tinhaõ carne, nem oſſos:

Palpate, & videte, quia ſpiritus carnem, & oſſa non habent.

55 Suppoſto o que fica dito devemos concluir, que os noſſos ſentidos bem aplicados, ſaõ regra certa das couſas corpóreas, e ſenſiveis, que ſaõ a mayor parte do que nós conhecemos; porém naõ ſaõ regra de certeza para os noſſos conhecimentos intellectuaes; dos quaes ſó nos póde fazer certos a razaõ, clareza, e evidencia das noſſas idéas.

LOGICA

LOGICA RACIONAL, LIVRO IV.

DAS REFLEXOENS DA QUARTA OPERAC,AM do Entendimento, que he ordenar.

CAPITULO I.

Do Methodo

1 OS homens aplicando-se ao estudo para descobrirem algumas verdades, que examinavaõ, fizeraõ reflexaõ sobre aquillo, que os embaraçava, e confundia; porque humas vezes a achavaõ, e outras a naõ podiaõ descobrir; e observando os meyos, de que se serviaõ, quando a achavaõ, fizeraõ destes meyos regras para se guiarem dalli por diante; e essas regras saõ aquillo, que os Filosofos chamaõ *Methodo*, a que se póde dar a definiçaõ seguinte.

DEFINIÇAM.

O Methodo he a Arte de bem conduzir a razaõ para descobrir a verdade.

2 COmo nós buscamos a verdade, ou para nos instruir a nòs mesmos, ou para instruir os outros homens, e alcançamos esse fim por dous meyos differentes, dahi procede dividirem os Filosofos o methodo em geral, em duas partes.

3 O methodo, que serve para nos instruirmos a nós mesmos, se chama *Analysi*, ou methodo de divisaõ.

4 O methodo, que serve para instruir os outros, se chama *Synthesi*, ou methodo de composiçaõ. Com o primeiro nos devemos instruir a nós mesmos, antes que passemos a instruir os outros: o mesmo methodo, ou boa ordem pede, que comecemos pela Analysi.

CAPITULO II.

Da Analysi, e do modo de se servir della.

5 A Analysi, ou methodo de divisaõ, he huma particular aplicaçaõ do entendimento no exame de qualquer questaõ, que quer resolver, começando por aquillo, que a cousa tem de mais particular, e conhecido, para desse exame hir tirando successivamente algumas verdades, que o conduzaõ ao conhecimento daquillo, que quer saber.

6 Sup-

6 Supponhamos, que queremos ſaber, ſe a noſſa alma he mortal, ou immortal; começaremos a reſolver eſta queſtaõ por aquillo, que nos he mais conhecido, e particular; e vemos, que a noſſa alma percebe, julga, e diſcorre, e que exiſte per ſi, e por conſequencia, que he huma ſubſtancia cogitante, ou intelligente; e paſſando a examinar, ſe he corpo, ou eſpirito, examinamos as propriedades de huma, e outra ſubſtancia; e vendo claramente, que as propriedades do corpo, e do eſpirito ſaõ inteiramente diſferentes; porque as propriedades do corpo ſaõ o ſer movel, diviſivel, e figuravel; e que nada diſto ſe acha na ſubſtancia intelligente; porque perceber, julgar, e diſcorrer, querer, e naõ querer, naõ ſaõ couſas moveis, diviſiveis, nem figuraveis.

7 Naõ ſaõ diviſiveis; porque hum penſamento naõ ſe póde partir pelo meyo: naõ he movel; porque naõ paſſa de hum lugar para outro: naõ he figuravel; porque hum penſamento naõ he rodondo, quadrado, ou triangular; e paſſo a concluir deſtas verdades, que a ſubſtancia cogitante naõ he corpo; mas ſim hum eſpirito. Iſto ſuppoſto, paſſamos a examinar, ſe o eſpirito he, ou naõ immortal.

8 Vejo, que para huma ſubſtancia, que exiſte, deixar de ſer, a ſaber, de exiſtir, he neceſſario, que tenha poder para ſe aniquilar a ſi meſma, ou que alguma cauſa exterior lhe tire o ſer, que tem; e examinando, quaes pòdem ſer as cauſas, vejo, que ſó póde ſer Deos, ou as creaturas; e he certo, que naõ acharemos entre as couſas creadas cauſa alguma, que tenha poder de aniquilar; porque todas as forças da

natu-

natureza ſe reduzem ao movimento; e o movimento naõ póde empregar as ſuas forças no eſpirito; porque naõ tem partes, e ſó as póde empregar no corpo, reduzindo-o a pó, e cinza; mas nem por iſſo pode aniquilar o corpo; porque todas as forças do movimento empregadas a aniquilar hum moſquito, o naõ poderàõ conſeguir; porque eſſe pó ſubtiliſſimo a que o reduzirem, ficará ſempre exiſtindo no univerſo.

9 Paſſando finalmente a examinar, ſe Deos, que creou a ſubſtancia cogitante, e intelligente a pòde aniquilar, naõ ha duvida, que Deos o póde fazer; e baſta, que deixe de a conſervar, para que logo ſe aniquile; porèm podemos affirmar, que, ſe a immortalidade da noſſa alma eſtá ſegura das forças da natureza, ainda podemos dar por mais ſegura a ſua immortalidade da parte do ſeu Creador, que he taõ conſtante nas ſuas acçoens, como na ſua eſſencia; e naõ havia de crear as almas, para depois as deſtruir; porque iſto ſuppoem no Artifice Supremo diſgoſto da obra, e imperfeiçaõ no obrar, couſas indignas da Soberana perfeiçaõ do Creador; nem poſſo entender, como ſe faz veroſimil aos impios, que Deos tenha aniquilado tantos milhoens de almas, quantas tem havido no mundo, quando elle da ſubſtancia corpórea muito mais inferior, naõ tem aniquilado o valor de hum moſquito: logo alèm do que a Fé nos enſina, que naõ póde padecer duvida alguma, podemos tambem tirar por legitima concluſaõ, que a noſſa alma he immortal.

CAPI-

CAPITULO III.

Das questoens, que se pódem resolver pela Analysi.

10 AS questoens, saõ certas proposiçoens, nas quaes temos algumas cousas conhecidas, e outras incognitas; e das cousas conhecidas em huma questaõ, passamos a conhecer o que nella he incognito.

11 He certo, que todas as questoens saõ de cousa, ou de nome: naõ fallamos naquellas questoens, em que só se busca a conhecer a significaçaõ, ou etymologia das palavras, como fazem os Grammaticos; mas por questoens de nome, entendemos aquellas, em que pelos nomes, ou palavras, buscamos a conhecer as cousas.

12 As questoens de cousa, a saber, de substancia, ou modo de substancia, se pódem reduzir a cinco principaes especies.

13 A primeira he, quando buscamos a causa formal de qualquer cousa, que queremos saber; por exemplo, vejo o homem, quero saber, que cousa he: vejo hum cavallo, quero conhecer qual he a sua natureza.

14 A segunda he, quando pelos effeitos, queremos conhecer as causas; por exemplo, vemos, que os Astros se movem do Oriente para o Occidente, queremos saber a causa.

15 A terceira eſpepecie de queſtaõ, he, quando queremos conhecer os effeitos pelas cauſas; por exemplo, ſabemos, que o vento, e a agoa tem força para mover os corpos; mas naõ ſabemos os effeitos, que poderàõ produzir; o que ſe alcança, diſpondo eſſas cauſas de modo, que dellas ſe produza algum effeito; e aſſim vemos, que o vento, e a agoa nos navios, e nos moinhos, e outras maquinas tem produzido admiraveis effeitos, em grande utilidade publica.

16 Para em huma queſtaõ paſſarmos daquillo, que nos he conhecido, para o que ainda ignoramos, nos poderàõ bem ſervir os quatro preceitos, ou regras ſeguintes.

17 O primeiro he: naõ dar por verdadeira couſa alguma, que ſe naõ conheça com evidencia, e que claramente ſe preſenta ao eſpirito, ſem deixar razaõ alguma de duvidar.

18 O ſegundo he: dividir cada difficuldade, que ſe examina em tantas partes, quantas ſe requer para melhor ſe reſolver.

19 O terceiro preceito he: hir diſpondo por ordem os penſamentos, começando pelas couſas, que na queſtaõ ſaõ mais conhecidas, e particulares, para dahi hir ſobindo, pouco a pouco, a deſcobrir, o que ainda ſe ignora.

20 O quarto, e ultimo he: fazer por toda a queſtaõ diviſoens inteiras, e reviſtas taõ geraes, que ſe poſſa ſegurar, de que nada ficou ſem exame.

21 Eſtes

21 Estes preceitos, naõ só para a Analysi, mas para todas as sciencias pódem servir; e todo o homem de bom juizo, e que se aplica de boa fè a buscar a verdade, só, ou acompanhado de outros, sem intento de os enganar, e sem receyo de ser enganado, naõ necessita de outras regras.

CAPITULO IV.

Da precipitaçaõ, e da prevençaõ.

DEFINIC,AM.

A Precipitaçaõ, he hum vicio do Entendimento, pelo qual, sem examinar aquillo, que se lhe representa, fórma logo juizo.

22 Este vicio, se passa a ser habito, corrompe inteiramente a razaõ; e por isso os sabios estabeleceraõ por huma das suas principaes maximas, que deviamos ser vagarosos nas deliberaçoens, e promptos na execuçaõ:

Tardus in deliberando, promptus verò in exequendo.

23 Este vicio porèm he muito facil de emendar; porque por pouco, que o homem considere a causa, porque cahio no erro, verà facilmente, que foy; porque julgou o que naõ tinha premeditado.

DEFINIC,AM.

A Prevençaõ, que tambem se chama preoccupaçaõ, he hum vicio do entendimento, que nos convence das

das opinioens, que recebemos, ainda que naõ procedaõ de algum verdadeiro principio, como se fossem tiradas de hum axioma incontestavel.

24 Por exemplo, quem quizer mostrar a dous homens, que o calor, que nós sentimos, naõ está no fogo, hum delles prevenido, e preocupado; e outro naõ: o prevenido dirá, que conhece taõ claramente, que o calor està no fogo, como conhece, que dous, e dous saõ quatro; e se o apertarem, logo appellará para a experiencia, e dirá, que metaõ a maõ no fogo, e logo veràõ se alli està, ou naõ o calor, que nós sentimos? Se lhe perguntarem se he clara a idéa, que elle tem do calor, affirmará, que sim; e naõ sahirá da sua errada opiniaõ com facilidade, principalmente sendo de mayor idade; e só poderá cahir no erro, em que estava, se pondo de parte a preoccupaçaõ, examinar bem a cousa.

25 Para saber, se a evidencia, que nós suppomos nas nossas idèas compostas de juizos, saõ nascidas da preoccupaçaõ, devemos considerar as cinco causas seguintes.

Em primeiro lugar, se nós damos credito à cousa, de que he questaõ; porque nossos Mestres assim nolo ensinaraõ.

Em segundo lugar, se lhe damos credito; porque a cousa foy approvada por hum grande numero de pessoas estimadas no mundo por doutas.

Em terceiro lugar, se lhe damos credito; porque desde a nossa tenra idade temos aquella idèa, e que julgavamos muitas cousas por verdadeiras, por assim

ſim nos parecerem; por exemplo, porque deſde a noſſa infancia vemos, que hum homem naõ póde andar no tecto de huma caſa com a cabeça para baixo, e os pés para cima, nos cuſta muito a crer, que haja antipodas.

Em quarto lugar, ſe nós concluimos a verdade do que he queſtaõ por hum principio ſuppoſto, que nós naõ temos examinado.

Em quinto lugar, finalmente, ſe nós damos credito àquillo, de que he queſtaõ, por ſer opiniaõ nova, e brilhante, e nos agrada a novidade.

Se huma idèa, por mais compoſta, que ſeja, for attentamente examinada por cada huma das cinco couſas referidas, ou preceitos, a podemos ter por certa.

CAPITULO VI.

Da Syntheſi, e do modo de nos ſervirmos della.

53 A Syntheſi he hum methodo muy util, e importante, porque nos capacita de poder enſinar aos outros, o que temos aprendido pela Analyſi.

54 Eſte methodo ſe chama *Methodo de compoſiçaõ*; porque nelle nos ſervimos das couſas mais geraes, e commuas, para deſcer ás particulares, e mais compoſtas; por exemplo, ſe quizermos enſinar pela ſintheſi, que a noſſa alma he immortal, começaremos pelas maximas geraes: que tudo o que exiſte no mundo,

 he

he ſubſtancia, ou modo: que naõ ha mais, que duas ſubſtancias, a ſaber, a ſubſtancia cogitante, e a ſubſtancia extenſa: que nenhuma ſubſtancia ſe aniquila a ſi meſma: que o que ſe chama deſtruiçaõ de ſubſtancia corpórea, naõ he mais, que huma diſſoluçaõ de partes: de que concluo, que a alma, que naõ tem partes, naõ póde ſer deſtruida, e que por conſequencia he immortal.

55 Todas as regras da ſyntheſi ſe pódem reduzir ás tres ſeguintes.

Em primeiro lugar, de naõ deixar nos termos ambiguidade, ou equivocaçaõ alguma, definindo as palavras equivocas, determinando-lhe a ſua verdadeira ſignificaçaõ.

Em ſegundo lugar, de naõ diſcorrer, ſenaõ debaixo de principios claros, e propoſiçoens evidentes.

Em terceiro lugar, he de provar demonſtrativamente todas as propoſiçoens, que for adiantando, ſervindo-ſe de definiçoens, principios, e propoſiçoens jà concedidas, ou tiradas por força do diſcurſo.

Os Geometras ſe ſervem deſte methodo, como ſe verá na terceira parte deſta obra.

56 A ſintheſi, e a analyſi convém, que em huma, e outra ſe paſſa das couſas conhecidas para as incognitas; e differem; porque na analyſi ſe começa pelo que as couſas tem de mais conhecido, e particular; em lugar, que na ſyntheſi ſe começa pelo que a queſtaõ tem de mais commum, e mais geral.

57 Se

57 Se pela analysi quizessemos saber a ascendencia de certa pessoa, começariamos por ella mesma, que he o que tem mais conhecida; e dahi passariamos a inquirir, quem era seu pay, seu avô, seu segundo avô, seu terceiro, quarto, quinto, &c. atè o ultimo da geraçaõ; mas para ensinar pela synthesi a outro, começariamos pelo ultimo da geraçaõ, e viriamos descendo atè o que ultimamente existe, e se lhe quer mostrar a geraçaõ, de que procede.

CAPITULO VI.

Da sciencia da fé, e da opiniaõ.

58 SObre a sciencia tem havido varias disputas, e pareceres: huns, que chegáraõ a duvidar de tudo, affirmando, que nada havia certo neste mundo; e só era certo naõ haver certeza alguma (como temos visto, livro 2. cap. 5. num. 42.) porèm estas opinioens naõ pódem subsistir (como tambem fica dito, livro 3. cap. 6. num. 49.)

59 O nosso entendimento percebe muitas cousas, e as sabe com toda a certeza, e evidencia, e de outras muitas està incerto, e duvidoso; e totalmente ignora muitas mais cousas em numero quasi infinito, a respeito das cousas, que sabe; e assim he taõ absurdo dizer, que todas as cousas saõ incertas, como dizer, que todas saõ certas; pois conhecemos claramente; e a experiencia nos mostra, que temos tres differentes generos de conhecimento; porque ha cousas, que conhecemos clara, e distinctamente, outras, que naõ conhecemos taõ claras; mas, que esperamos

mos poder conhecellas; e outras finalmente, que nos he impossivel conhecer com certeza; porque, ou nos faltaõ principios, ou essas cousas estaõ muy superiores á nossa capacidade.

60 As cousas, que conhecemos claramente se reduzem a tres generos.

Em primeiro lugar, huma cousa he certa, quando a nossa alma percebe claramente a conformidade, ou a opposiçaõ, que o sujeito tem com o attributo, sem ser necessario recorrer a meyo algum; e este conhecimento he propriamente a nossa intelligencia: desta sórte conhecemos os primeiros principios, e axiomas

Em segundo lugar, se nós percebemos as cousas, servindo-nos de algum meyo; ou esse meyo procede da authoridade, que faz, que nós affirmamos, ou negamos a conformidade do attributo com o sujeito, a este conhecimento chmamos *Fé*; e se a authoridade he dos homens, se chama *Fé humana*; e se a authoridade he Divina, se chama *Fé Divina*; porque he Deos a authoridade, com que affirmamos, ou negamos: desta sórte, pela fé humana affirmamos, que Alexandre Magno conquistou a Azia; e pela Fé Divina affirmamos, e cremos, que ha hum Deos em tres pessoas distinctas, e hum só Deos verdadeiro.

Em terceiro lugar, finalmente, se a razaõ he a causa; porque affirmamos, ou negamos, ou nós somos inteiramente convencidos, ou sómente em parte, e naõ no todo: Se nós naõ somos inteiramente convencidos, e que ainda nos fica alguma duvida, o co-

conhecimento do entendimento acompanhado dessa duvida, se chama *Opiniaõ*: Se nós somos inteiramente convencidos, e que esta razaõ he verdadeira, e naõ apparente, resulta no nosso conhecimento huma segurança certa, que chamamos *Sciencia*; e assim podemos dizer, que

DEFINIC,AM I.

A Sciencia he hum conhecimento certo, e evidente, adquirido por huma demonstraçaõ,

DEFINIC,AM II.

A Fé Divina he hum conhecimento certo, e evidente, fundado na authoridade de Deos.

DEFINIC,AM III

A Fè humana he hum conhecimento certo, fundado na authoridade dos homens.

DEFINIC,AM IV.

A Opiniaõ he hum conhecimento incerto, fundado sobre huma razaõ, sómente provavel.

Naõ devemos confundir as materias da Fé com aquellas, de que procuramos saber a razaõ natural; porque querer fazer argumento das cousas sobrenaturaes, he querer tirar luz das sombras: como tambem naõ devemos provar pela Fé os effeitos da natureza; mas devemos dar razaõ delles, sem recorrer á Fé, que he dar signal de ignorancia, como diz Cicero.

Reddenda esset ratio rerum naturalium, quod cum facere non potestis, tanquam ad aras confugitis ad Deum. Cic.

61 Devemonos abster de fazer argumentos sobre os mysterios da Fé, que nos foraõ dados, para crer, e naõ para examinar, como diz hum doutor da Igreja.

Misteria Fidei sunt veneranda potiùs, quam curiosiùs indaganda: Fides enim ammittit meritum, ubi humana ratio quærit experimentum.

62 Quando nós naõ temos certeza, e evidencia das cousas, de que tratamos, nos devemos contentar das opinioẽs, e conjecturas; porém isto ha de ser depois de nos termos bem examinado a nós mesmos, e ver se temos cahido nos defeitos, em que de ordinario estaõ cahindo os homens, guiados do amor proprio; porque estes, o que se lhes apresenta debaixo desta idéa, tudo approvaõ, tudo admiraõ, e tudo querem, como prevenidos a favor de si mesmos. Cada hum segue por regra, certo gosto, que naõ poderà justificar, senaõ dizendo, que he seu gosto. Cada hum se paga mais, do que he razaõ, do seu estillo, do seu methodo, do seu Poema, da sua facundia, da sua elegancia; e a qualquer destes lhes parece, que as suas obras saõ a mais primorosa producçaõ, ainda que cheya de muitos erros, e de ridiculas expressoens.

63 Devemos procurar de nos ver a nós mesmos, para que elles naõ vejaõ os nossos defeitos, como nós vemos os seus.

64 Todas as Sciencias se comprehendem na Filosofia; e esta palavra *Filosofia*, significa o amor da

verdade, ou da ſabedoria, a que os homens ſó pódem chegar, cultivando o ſeu entendimento com as ſciencias.

65 As Sciencias ſe dividem em eſpeculativas, e praticas: chamaõ-ſe eſpeculativas aquellas Sciencias, que pàraõ na comtemplaçaõ dos ſeus objectos, ſem paſsàr a fazer couſa alguma.

66 As Sciencias praticas ſaõ aquellas, que àlem de contemplarem os ſeus objectos, paſſaõ a fazer alguma obra, ou effeito.

67 As Sciencias eſpeculativas ſaõ, a Methafiſica, que trata das couſas mais geraes, e eſpirituaes, a ſaber, do *Ente* em geral, e em particular de Deos, e dos Anjos, &c.

68 A Fiſica, que trata de todas as couſas creadas corpóreas.

69 A Geometria, que trata da natureza, e propriedade de toda a grandeza.

70 A Arithmetica, que trata dos numeros.

71 A Aſtronomia, que nos enſina o curſo dos Aſtros, e pelo ſyſtema univerſal do mundo, nos moſtra as ſuas principaes partes.

72 As Sciencias praticas ſaõ, a Logica, e a Moral.

73 Deſtas Sciencias naſceraõ as Artes, que tem dado aos homens huma maravilhoſa utilidade para o uſo da vida.

74 A

74 A differença, que ha entre as Artes, e as Sciencias, he; porque as Artes ſempre produzem alguma obra ſenſivel, em lugar, que as Sciencias páraõ na contemplaçaõ dos objectos, e ſó produzem operaçoens intellectuaes.

75 As principaes Artes ſaõ, a Grammatica, que nos enſina a fallar com propriedade: A Rhetorica, que nos enſina a fallar com eloquencia: A Muſica, que pela juſtà proporçaõ dos ſons, nos dà huma força ſecreta na voz, para deleitar, e mover os animos: A Medicina, e ſuas dependentes, que (quando Deos he ſervido) conſervaõ o corpo humano em bom eſtado.

76 A Arithmetica pratica, que enſina a calcular com facilidade.

77 A Arquitectura militar, que fortifica as Praças, e Preſidios para ſegurança dos Reynos, e dos Eſtados.

78 A Arquitectura civil, que alèm da commodidade dos edificios publicos, e particulares, edifica Templos para Deos, e palacios para os Reys.

79 A Mecanica, que tem grandemente aliviado o trabalho dos homens com as ſuas maquinas.

80 A Pintura, e a Eſcultura, que procuraõ imitar a natureza nos paineis, e nas eſtatuas; o que ſó conſeguem muy ſuperficialmente; e ainda neſſa ſuperfice, que imitaõ, ficaõ as ſuas obras muy inferiores às obras do Creador.

81 O que atéqui temos eſcrito, entendo ſer o que baſta, ſendo bem meditado, para qualquer homem, de mediocre entendimento, poder entrar em qualquer Sciencia, ſem que neceſſite de mais regras, ou preceitos, acompanhado de bons, e louvaveis coſtumes todo o ſeu eſtudo, e aplicaçaõ, fazendo habito do amor da verdade, que deve ter impreſſo no coraçaõ; porque ſó aſſim, e naõ de outro modo, poderá chegar a ſaber, ou ter ſabedoria.

APPENDIX,

DA LOGICA CONTENCIOSA.

NA Logica Racional, que deixamos eſcrita, naõ tratamos de hum grande numero de queſtoens, que ſe coſtumaõ tratar em algumas Eſcòlas, e que de nada pódem ſervir para adiantar o noſſo conhecimento; antes ſaõ a mayor parte dellas, mais capazes de confundir as noſſas idèas, do que de as aclarar.

Poremos aqui algumas (ainda que eſcuzadas) menos inſofriveis: naõ para diſputar; porque a mayor parte ſaõ queſtoens de nome; mas para que ſe veja, o que pelas ditas queſtoens ſe deve entender.

QUESTAM I.

Se a Logica he Arte, ou Sciencia.

ESta queſtaõ ſe deſvanece, e ceſſa todo o rumor das Eſcólas, ſe por eſta palavra *Arte*, ſe entende hum aggregado de regras, e preceitos capazes de dirigir o noſſo entendimento nas ſuas operaçoens, para ra bem perceber , julgar , e diſcorrer : para que ſe diſputa ſe he, ou naõ Arte?

A obra, que eſta Arte produz , he fazer as idèas de obſcuras, claras , de confuſas , diſtinctas , e de diſtrahidas, attentas, e a perfeiçaõ das noſſas idèas he toda a obra da Logica Racional : logo a Logica he Arte.

Se nos diſſerem, que as Artes tem obra externa , e que a Logica naõ produz obra alguma fòra do entendimento.

Reſponderemos , que as Artes mecanicas tem todas obra externa , ou exterior ; porèm as Artes liberaes (qual he a Logica Racional) baſta , que tenhaõ obra interna ; porque quando percebemos, verdadeiramente obramos.

O que ſe confirma com a Arte da Macanica, ou Arte de inventar maquinas ; porque toda a ſua obra he interna, e conſiſte nos juſtos projectos, que fórma; porque as maquinas ſaõ obras externas, que pertencem a varios officios.

Se por eſta palavra *Sciencia*, ſe entende hum conhecimento certo, e evidente , adquirido por demonſtraçaõ , naõ ſe póde dizer a Logica Racional, Sciencia; mas ſim inſtrumento da Sciencia, que dà regras, e preceitos para bem demonſtrar.

QUES-

QUESTAM II.

Se a Logica he pratica, ou especulativa.

SCiencia especulativa, se diz aquella, que naõ passa da contemplaçaõ do seu objecto; e neste sentido, se naõ póde dizer a Logica, especulativa.

As mesmas Sciencias especulativas rigorosamente passaõ álem da contemplaçaõ dos seus objectos; porque toda a contemplaçaõ, por instituiçaõ natural, he ordenada ao amor da verdade.

A Fisica seria esteril, e infructuosa, se naõ fosse ordenada ao augmento, e cultura das Artes, que he o seu mais principal fim; e o mesmo diremos das mais partes da Filosofia, que chamaõ Fisico-mathematicas, como a Optica, a Statica, a Perspectiva, &c.

A Sagrada Theologia, em quanto contempla as perfeiçoens do Ente Supremo, toda ao mesmo tempo vay ordenada ao amor do Summo Bem, e a se saciar delle, e o gozar eternamente; e assim tudo o que nas Sciencias especulamos, se dirige a regular os costumes, e a adquirir aquella tranquilidade interior, que os justos lograõ nesta vida, he huma santa pratica; e toda a mais especulaçaõ seria vãa, e inutil, se se naõ reduzisse a pratica.

A Logica Racional, ainda que de algum modo se possa dizer especulativa, em quanto examina nas suas quatro operaçoens a origem, e causa dos nossos erros; com tudo mais propriamente se deve chamar pratica ; porque naõ contempla as operaçoens do noſſo entendimento, como ellas ſaõ em ſi meſmas ; mas em quanto ſaõ dirigiveis, e ſe pódem aperfeiçoar com as ſuas regras, e preceitos.

QUESTAM III.

Do objecto da Logica Racional, e qual he o ſeu objecto.

VArias queſtoens ſe tem excogitado em algumas Eſcólas, e de varios modos reſolvem eſta queſtaõ : huns dizem, que o objecto da Logica ſaõ os nomes : outros dizem, que ſaõ as couſas, ſegundo ſe repreſentaõ nos conceitos : outros, que ſaõ as operaçoens do noſſo entendimento : e outros, que os conceitos univerſaes ſaõ o objecto da Logica.

Com todas eſtas ſuperfluidades, e variedade de ſentenças, em que inutilmente gaſtaõ muito tempo, diſputaõ de varios objectos : do objecto formal, do material, do total, do parcial, do de attributo, e de atribuiçaõ, de que naſcem novas, e varias diſputas.

Se elles attentamente conſideraſſem, o para que foy inſtituida a legitima, e ſincéra Logica, ſem difficuldade alguma reſolveriaõ eſta queſtaõ, e concordariaõ todos em huma meſma ſentença.

Se lhe perguntarem para que ſe inſtituio a Logica Racional? (ſe reſponderem o que devem) Diràõ, que ſe inventou para aperfeiçoar a noſſa razaõ, para evitar os erros, e para que livre delles o noſ-

ſo

ſo entendimento, poſſa mais facilmente deſcobrir a verdade.

De que evidentemente ſe ſegue, que o objecto primario, e de attribuiçaõ da Logica, ao qual todos os mais ſe reduzem, he o entendimento humano, em quanto deſcobre os erros, e os emenda, e livre de todo o impedimento, ſe dirige univerſalmente para a verdade, que he o ſeu proprio fim.

QUESTAM IV.

Se a Logica he abſolutamente neceſſaria, para adquirir as Sciencias?

REſponderemos, que abſolutamente he neceſſaria a Logica Racional para adquirir qualquer Sciencia; porque ſe naõ póde dizer Sciencia, a que naõ diſcorre por legitimas demonſtraçoens, de que naſce toda a certeza, e evidencia, tirada dos primeiros principios, de que a Logica uſa em todos os ſeus diſcurſos; de ſórte, que pela Logica ſe livra qualquer Sciencia de todo o perigo de errar; e a confuſaõ das noſſas idèas, e ſenſaçoens, pela Logica, de obſcuras, e confuſas paſſaõ a ſer claras, e diſtinctas, e a evidencia apparente de hum paralogiſmo, ou ſoſyſma, por força dos preceios da Logica, ſe diſtingue da ſolida, e genuina demonſtraçaõ.

Logo ſem a Logica Racional nenhuma Sciencia total, nem parcial ſe póde adquirir.

Se nos diſſerem, que os Elementos de Euclides ſe pódem ſaber ſem Logica, por meyo de cer-

tos

tos axiomas, que naõ neceſſitaõ de diſcurſo, e que nós meſmos aconſelhamos no Antiloquio deſta obra, que os curioſos, que naõ foſſem Engenheiros, antes de dar principio á Logica Racional, eſtudaſſem primeiro as definiçoens, e primeiro livro de Euclides: ſegue-ſe, que ſem Logica ſe póde ſaber com toda a certeza, e evidencia a Sciencia da Geometria.

Reſponderemos, em primeiro lugar, que os Elementos de Euclides, ſaõ huma parte da Logica arteficial, igualmente neceſſaria para adquirir as mais Sciencias; e por iſſo entramos na duvida, por qualquer deſtas duas partes ſe devia dar principio: Em ſegundo lugar, reſponderemos, que ſem as regras, que a Logica Racional perſcreve, para bem perceber, julgar, e diſcorrer, e ſem ſe deſcobrir a origem, e cauſa dos noſſos erros, podemos duvidar da verdade, e certeza dos principios, e axiomas da Geometria; porque naõ tem numero as couſas, que deſde a noſſa infancia tivemos por certas, e evidentes, que pelo tempo adiante achamos duvidoſas, e falſas.

QUESTAM V.

Se entre as couſas creadas ha alguma natureza univerſal?

REſponderemos, que naõ ha no mundo couſa, que tenha exiſtencia, e realidade, que naõ ſeja unica, e ſingular; e aſſim nada no mundo ha, que ſeja univerſal, nem, como dizem, *à parte rei*, nem pelo entendimento.

A na-

A natureza humana, ſó de algum modo ſe póde dizer univerſal, pela ſemelhança dos individuos, de que ſe compoem. Eſta palavra *Natureza*, he hum termo abſtracto, que naõ tem exiſtencia, nem realidade alguma; e ſó ſe póde aplicar a muitas couſas entre ſi ſemelhantes, e a natureza humana, que chamaõ *Natura ut ſic* fóra do conceito, he huma quimera.

QUESTAM VI.

Se ha Entes de razaõ.

Dizem nas Eſcólas, que fazer hum ente de razaõ, he conhecer o que naõ he, por modo de couſa, que exiſte:

Eſt cognoſcere non ens per modum entis.

Devemos confeſſar, que os primeiros inventores de ſemelhante queſtaõ, quizeraõ bem apurar o entendimento, e ordir huma quimera; porque daquillo, que naõ ha no mundo actual, nem poſſivel, naõ podemos ter idèa alguma, e ſem idèa da couſa, he impoſſivel, que ſe conheça.

Nem ſó os homens naõ pódem fazer entes de razaõ; mas nem Deos póde perceber o impoſſivel; por exemplo, naõ pòde Deos conhecer duas naturezas repugnantes, nem poſitiva, nem negativamente; porque ſe Deos percebeſſe duas naturezas repugnantes, por exemplo; A, e B, perceberia A identificado com B repugnante, o que he impoſſivel, porque, ou perceberia A, real, ou outra couſa differente: naõ ſe póde dizer, que perceberia A real, porque A real naõ he identificado com B; e ſe percebeſſe cousa differente de A: logo naõ perceberia o impossivel; nem de Deos se póde dizer, que percebe as cousas, como naõ saõ; porque isso repugna á sabedoria Divina, que conhece todas as cousas, como ellas realmente saõ em si mesmas.

Se Deos percebesse duas cousas repugnantes em si mesmo, como ser infinito, e ser finito, se perceberia, e juntamente se naõ perceberia a si mesmo: se perceberia, como, se suppoem, e se naõ perceberia; porque perceberse finito destroe formalmente o conceito da sua infinidade, o que he contradictorio, e inteiramente repugnante.

Diraõ, que Deos conhece todas as verdades; e que esta proposiçaõ *Deos naõ he finito*, he verdadeira: logo Deos póde perceberse finito.

Responderemos, distinguindo a consequencia, que Deos conhece a verdade da proposiçaõ acima, negativa, e distributivamente concedemos; mas naõ positiva, e collectivamente, de sórte, que das cousas repugnantes tenha Deos o mesmo conceito.

Se instarem, dizendo, que se Deos naõ póde perceber a identidade impossivel positivamente, se segue, que Deos naõ tem conhecimento de todas as cousas; o que he contrario à sua immensa sabedoria.

Responderemos, negando a consequencia, porque a identidade impossivel naõ he cousa alguma, e só se pronuncia de boca; e tanto naõ he cousa alguma, que antes he negaçaõ de realidade qualquer quimera.

Naõ

Naõ se segue imperfeiçaõ em Deos, nem ignorancia de naõ perceber positivamente, o que he impossivel, e contradictorio; porque Deos naõ he potencia quimerica, nem deixa de ser todo poderoso; porque naõ póde peccar, errar, ou mudar proposito; porque tudo isso saõ em Deos perfeiçoens, e summa, e perfeitissima potencia.

QUESTAM. VII.

Se podemos ter de huma mesma cousa, e ao mesmo tempo, Sciencia, e opiniaõ.

O Sentido desta questaõ he, se podemos estar certos com toda a evidencia de huma cousa, por exemplo, da immortalidade da nossa alma, pelo motivo da Fé; e menos certos pelo motivo de razoens provaveis.

Responderemos, que naõ repugna, que por differentes motivos demos assenso a huma mesma cousa; porque a experiencia nos mostra, e muitas vezes succede assentirmos, e estar evidentemente certos de huma verdade, ou conclusaõ deduzida dos primeiros principios; e ao mesmo tempo por razoens provaveis, conhecemos a mesma verdade; mas naõ com a mesma evidencia.

Como esta obra he só huma introducçaõ para a Filosofia, procurey abrevialla, quanto foy possivel, e dar sómente aquillo, que entendi sufficiente para dar abertura de entendimento aos principiantes; de sórte porém, que naõ faltasse nada para entender as outras Logicas, e seus Authores, assim Filosofos,

como

como Mathematicos, Geometras, e Analyticos, ou Algebraicos; e assim me pareceo pôr aqui hum breve cathalogo dos mais selectos Authores, de cujas obras se pódem bem instruir; e lhes aconselho, que fujaõ de ler livros de falsa doutrina, ou ao menos, os leaõ com grande cautéla; e de nenhum modo leaõ os livros dos falsos Quimicos, dos Cabalistas, dos Astrologos judiciarios; como tambem fujaõ de ler os que escreveraõ da Magia, da Hidromancia, e outros semelhantes, de que se naõ tira utilidade alguma, antes muita confusaõ, e muita mentira; e assim porey só aqui aquelles Authores, que a meu ver melhor escreveraõ nas tres partes de que a nossa Logica se compoem, a saber, na Filosofia, na Geometria, e na Analysi, ou Algebra.

Livros da Filosofia.

ENtre os antigos Filosofos, Aristoteles, e Plataõ: Entre os Santos Padres, Santo Agostinho: Entre os Filosofos modernos, tem o primeiro lugar Francisco Verulamio, grande Chanceler de Inglaterra, varaõ de nome immortal, aplaudido nas mais principaes Academias de Europa, de felicissimo engenho, naõ só para as mais sublimes especulaçoens, em que a todos tem excedido; mas tambem com natural dom de clareza para as explicar, como se vê na sua grande historia da Sciencia natural, e no aureo livro, que intitulou de *Cogitatis, & visis.*

Tem o segundo lugar Galileo Florentino, que na Fisica descobrio com profunda penetraçaõ tudo o que ella tem de mais recondito, que parece ter vencido as forças humanas, no movimento local, no Tubo Optico, no descobrimento de varias Estrellas; e o

pòde

póde consultar, quem quizer chave para abrir o uso da Geometria, e da Sciencia natural.

Em terceiro lugar, Pedro Gassendo, que na sua Filosofia expurgou, e restaurou a doutrina de Epicuro, e Democrito, com summa erudicçaõ, e elegancia. A este Author seguem alguns dos Filosofos modernos corpusculares.

Em quarto lugar, Rhenato Cartesio, que com prospero successo penetrou os mais intrinsecos misterios da sabedoria humana, e tentou levantar tanto o seu grande engenho, que se adiantou nesta parte a todos os antigos, e modernos.

A sua insigne obra, digna de eterno louvor, he aquella, na qual, em seis unicas meditaçoens comprehendeo o methodo geral de discorrer com a mais recta ordem, de que se póde usar para adquirir a verdade.

Tambem saõ excellentes as suas obras dos principios das cousas naturaes, da natureza humana, do homem, e de suas paixoens, &c.

Nem por isso se deve entender, que he verdade tudo o que escreveo; porque naõ excedeo a condiçaõ dos homens, e tem cahido em varios erros; e assim as suas obras, como as dos mais se devem ler com cautéla, e particular attençaõ; e sobre tudo, se devem ler attentamente as obras de alguns Filosofos Inglezes modernos, entre os quaes, Neuton he o mais celebrado; e só se pódem ler sem escrupulo as suas obras Fisico-mathematicas, principalmente da luz, e das cores; porque as suas Filosofias saõ pouco seguras na nossa Santa Fé.

Entre os livros Francezes da Logica, e mais partes da Filosofia, recomendo muito a grande, e solida liçaõ, que pódem tirar do excellente livro, intitulado, a Logica, ou Arte de pensar, onde acharàõ com muita perspicuidade, e clareza, tudo o que pódem desejar, e que o seu Author mais diffusamente tratou: tambem no subtilissimo Malbranche, em Nicoláo Arnaldo, em Munsieur Pascal, e outros, acharaõ solida, e proveitosa doutrina; e dos sobreditos, latinos, se acharaõ muitos traduzidos na lingoa Franceza.

Livros da Geometria.

NA segunda parte desta obra, que he a Geometria, seguimos o methodo do M. R. P. Bernardo Lamy da Congregaçaõ do Oratorio, pela nova fórma, que deu aos Elementos de Euclides, tratando separadamente, e com novas demonstraçoens as tres dimençoens do corpo, com grande clareza, e distincçaõ; e o que delle escrevemos he muito sufficiente, para depois qualquer curioso poder ler, e entender os Authores, que o precederaõ; e o deve fazer todo aquelle, que se quizer fazer grande Geometra.

Na Geometria saõ excellentes as obras do R. P. Christovaõ Clavio, e as do R. P. André Taquet, e no Curso Mathematico do R. P. Francisco de Chales, todos da Sagrada Companhia de Jesus, acharáõ os curiosos explicado com grande clareza, tudo o que os antigos, e modernos trataraõ na presente materia.

Tambem saõ excellentes as obras do doutissimo Gregorio de Saõ Vicente, em que trata huma altissima Geometria das secçoens cónicas, e outros muitos, como Proculo, Keplero, Pappo, Maurolico, Nicoláo

coláo Tartaglia, Evangelifta Turrecelio, Federico Comandino, Lucas Valerio, de cujas obras fe póde tirar grande liçaõ.

Livros Analyticos, ou Algebraicos.

OS que fe quizerem adiantar no eftudo da Algebra, àlem do que della efcrevemos, lêaõ ao infigne Viéta, feu primeiro reftaurador, a fublime Geometria de Cartezio, de Billi, de Sluzio, de Munfieur la Hyre; e ainda que a mayor parte deftes Authores efcreveraõ na lingoa latina, todos acharáõ traduzidos em lingoa Franceza, que já hoje nefta Corte fe acha bem introduzida.

Na liçaõ dos referidos livros devem os curiofos pôr toda a fua aplicaçaõ, e naõ nas queftoens a cima, ou outras femelhantes, em que inutilmente fe gafta o tempo, que feria muito mais conveniente fe empregaffe em coufas, que poffaõ aclarar o noffo entendimento, e inclinar os actos da noffa vontade para o bem, e para o Summo Bem.

LOGICA RACIONAL, GEOMETRICA, E ANALITICA.

ABSOLUTAMENTE NECESSARIA PARA entrar em qualquer Sciencia, e ainda para todos os homens, que em qualquer particular, quizerem fazer uſo do ſeu entendimento, e explicar as ſuas idéas por termos claros, proprios, e inteligiveis.

PARTE II.

DA LOGICA GEOMETRICA.

LIVRO I.

NESTA ſegunda parte, em que tratamos a Logica Geometrica, ſeguiremos ao M. R. Padre Bernardo Lamy da Congregaçaõ do Oratorio, pela nova fórma, que deu aos Elementos de Euclides, tratando ſeparadamente, e com demonſtraçoens novas as tres dimençoens do corpo: 1. das linhas, 2. das ſuperfices, 3. do corpo, ou ſolido; emmendando o defeito de Euclides, que naõ fez esta separaçaõ. Preferimos este Autor moderno pela grande clareza, ordem, e distincçaõ, com que trata esta materia; e o que delle escrevemos com muy pouca mudança, he o que basta, para depois nos podermos mais difusamente instruir, lendo o que na mesma materia escreveraõ os Reverendos Padres Christovaõ Clavio, que com grande extençaõ perspicuidade, e clareza tratou os Elementos de Euclides, a Arithmetica, e Geometria pratica; o Muito R. Padre André Taquet, que escreveo os Elementos da Geometria plana, e solida; o Muito R. Padre Francisco de Chalez, que com grande clareza, e ordem explicou tudo o que os Antigos, e Modernos escreveraõ em toda a Mathematica.

Para proceder com clareza, e evitar toda a confusaõ, daremos principio a esta Geometria racional, pela explicaçaõ dos termos, de que nos havemos de servir, e dos sinais, de que havemos de usar para abreviar a escrita.

CAPITULO I.

Da explicaçaõ dos termos, e sinais.

AXIOMA.

CHamamos Axioma huma verdade clara, e constante, que se conhece sem estudo, e de que ninguem duvîda.

POSTULADOS.

SAõ humas proposiçoens, em que se pede, se concedaõ, como certas, e claras, ainda que o naõ sejaõ; por pedirem alguma attençaõ, e se devem conceder; porque

porque ſaõ evidentes na eſpeculaçaõ; mas muitas vezes ſenaõ podem reduzir a pratica, como, quando ſe pede, que de hum ponto a outro, ainda que indefinitamente diſtante, ſe poſſa lançar huma linha, ou imaginar lançada. Que de hum ponto, com qualquer intervallo, ainda que indefinitamente diſtante, ſe poſſa deſcrever hum circulo, ou imaginar deſcrito.

DEFINIÇAM.

A Definiçaõ he huma propoſiçaõ, que determina a idéa, que correſponde a qualquer palavra; porque definir hum nome, he determinarlhe a ſua verdadeira ſignificaçaõ.

THEOREMA.

O Theorema he huma propoſiçaõ, que ſe dá a conſiderar, para ſe demonſtrar a verdade, que contèm.

PROBLEMA.

HE huma propoſiçaõ, em que ſe manda fazer alguma couſa, e ſe deve moſtrar como eſtá feita, na fórma, que ſe pedia.

LEMMA.

HE huma propoſiçaõ, que ſenaõ demoſtra, ſenaõ para ſervir de prova a outras propoſiçoens, que ſe lhe ſeguem.

COROLARIO.

O Corolario he huma propoſiçaõ, que ſe ſegue claramente de outra propoſiçaõ, que a precede.

SI-

SINAIS, OU NOTAS.

SUppomos, que os que entraõ neſta Logica Geometrica, ſabem a Arithmetica ordinaria: ſomar, diminuir, multiplicar, e repartir; porque eſta Arte ſenaõ coſtuma enſinar nas Academias; e aqui explicaremos eſtas quatro operaçoens pelos ſinais ſeguintes.

Eſte ſinal + ſignifica mais, e ſerve para ſomar, como A + B vale A mais B.

Eſte ſinal — ſignifica menos, e ſerve para diminuir, como A — B vale A menos B.

Eſte ſinal = ſignifica igualdade C = D, quer dizer, que C he igual a D. Alguns AA. em lugar das duas riſcas, ſe ſervem de hum caducêo de Mercurio, que he eſte ſinal ∞ para denotar, ou ſignificar igualdade; mas he pouco uſado dos Modernos.

Eſte ſinal angular > ſignifica mayor, e virado deſta ſorte < ſignifica menor.

Eſte ſinal X entre outras letras he o ſinal de ſerem multiplicadas humas por outras, como A X D ſignifica, que A foy multiplicado por D. Neſta obra foy preciſo valermonos deſte ſinal a reſpeito da multiplicaçaõ das linhas, que he preciſo notarem-ſe cada huma por duas letras e aſim querendo moſtrar, que A B foy multiplicado por C D eſcreveremos deſta ſorte, A B X C D.

Quando as linhas, ou qualquer grandeza ſe explica por huma ſó letra como B por A, e eſta ſe deve multiplicar por B, ſe entende multiplicada, ajuntando huma a outra ſem ſinal algum, como B A; e ſe as duas letras ſaõ iguaes, como B, que ſe quer multiplicar por B, o ſeu producto he B B; porèm eſta, e as mais operaçoens arithmeticas explicadas por letras, ſeraõ largamente tratadas na terceira parte: Logica Analitica.

A letra N ſignifica numero; e como nas margens deſta obra ſe haõ de pôr numeros, eſtes das margens

gens serviráõ para achar as proposiçoens, que se alegarem, por exemplo, liv. 2. num. 6. quer dizer, livro segundo, numero seis.

Prop. significa proposiçaõ; e se he de Euclides, se notará desta sorte (Eucl. liv. 2. prop. 5.) quer dizer, Euclides, livro segundo, proposiçaõ quinta.

As mais notas, ou sinais seraõ explicadas a seu tempo, e em seus lugares proprios; e para que nos costumemos ao uso destes sinais, por elles explicaremos as proposiçoens, e verdades seguintes.

AXIOMA I.

O Todo he mayor, que a sua parte. A, e B saõ partes de huma linha, que chamo X; e assim X he mayor que A, e mayor que B, tomados separadamente; e se nota assim $X > A$, e $X > B$.

AXIOMA II.

O Todo he igual a todas as suas partes juntas. Se A, e B saõ ambas partes de X, he evidente, que $A \ast B$ he igual a X; e se nota assim $A \ast B = X$.

AXIOMA III.

AS grandezas iguaes a huma terceira grandeza, saõ iguaes entre si.

Supondo, que $A = B$, e $B = Z$, a saber, que A seja igual a Z, e que B seja tambem igual a Z; A, e B seraõ duas grandezas iguaes; o que se expressa desta sorte: se $A = Z$, e $B = Z$: logo $A = B$.

Pode-se acrescentar este axioma, que naõ he menos evidente: Se $A = B$, toda a grandeza mayor, ou menor que B, será mayor, ou menor que A.

AXIOMA IV.

SE a grandezas iguaes, ſe ajuntarem outras iguaes, ſeraõ iguaes as ſomas.

Se $A = B$, ajuntando a A, e a B, a grandeza X ficaráõ iguaes $A * X = B * X$.

AXIOMA V.

SE de grandezas iguaes ſe diminuirem iguaes grandezas, os reſtos ficaráõ iguaes.

Se $A = B$: Logo $A - X = B - X$, quer dizer, que ſe A, e B ſaõ duas grandezas iguaes, tirando de huma, e outra a grandeza X, ficará $A - X = B - X$.

AXIOMA VI.

SE a grandezas deſiguaes ſe ajuntarem iguaes grandezas, ficaráõ deſiguaes, huma mayor, ſe ella foſſe mayor, e a outra menor, ſe foſſe a menor.

Se X, e Z ſaõ grandezas deſiguaes, e que A, e B ſejaõ grandezas iguaes, $X * A$, e $Z * B$ ſeraõ deſiguaes hum mayor, outro menor, como eraõ de antes.

AXIOMA VII.

SE de grandezas deſiguaes ſe diminuirem iguaes grandezas, os reſtos ficaráõ deſiguaes, hum mayor, outro menor, como eraõ de antes.

Se X, e Z ſaõ grandezas deſiguaes, e de huma, e outra tirarem A de X, e A de Z, que ſaõ grandezas deſiguaes, ſeraõ $X - A$, e $Z - A$ reſtos, deſiguaes, como eraõ de antes.

Huma grandeza, que tem o ſinal $*$ junta a ſi meſma com o ſinal $-$ he igual a cifra, e ſe expreſſa deſta ſorte $*$

A — A = o. Este sinal * naõ se poem no principio das grandezas sem necessidade; porque se supoem mais: como A — B, naõ he necessario dizer, * A — B.

AXIOMA VIII.

AS cousas, que saõ metades, terços, quartos &c. de huma mesma grandeza, ou de grandezas iguaes saõ iguaes; e pelo contrario, seraõ desiguaes, se forem desiguaes as grandezas, de que saõ partes.

As grandezas, que sobrepostas se ajustaõ sem excesso, nem defeito, saõ iguaes; e só he verdade, porque senaõ disputa.

Tambem póde passar por incontestavel huma proposiçaõ, que senaõ póde negar, sem cahir em absurdo.

Deve-se advertir aos principiantes, que considérem attentamente estes principios, e as mais proposiçoens desta obra; porque de ficarem bem entendidos, se lhe segue huma grande facilidade; e os mestres lhe devem bem inculcar, que façaõ sempre mais uso do entendimento, do que da memoria; e ainda que nesta 11. parte senaõ podem isentar de fazer fixa a imaginaçaõ com as figuras, com tudo procurem de as perceber mentalmente, representando-se as suas propriedades, como intelegiveis; e isto mesmo pertendeo Euclides; porque considerou as tres dimençoens do corpo, considerando-o como despido de todas as suas qualidades sensiveis, como senaõ fosse pesado, nem leve, duro, nem mole, secco, nem humido, frio, nem quente &c. Os mestres devem inculcar aos discipulos, que façaõ reflexaõ em tudo o que forem estudando, aplicando-lhe os preceitos da Logica Racional explicados na 1. parte.

Suppostos estes sinais, e notas, entremos na materia, dando-lhe principio pelas definiçoens.

DEFI-

DEFINIÇAM I.

1 EXtençaõ he tudo aquillo, que se considéra em comprimento, largura, e profundidade, a que chamaõ as tres dimençoens do corpo, e que saõ o objecto da Geometria; porém naõ he a extençaõ material dos corpos, que em si saõ verdadeiramente compridos, largos, e profundos; porém o que devem entender os Geometras, he a extençaõ, ou grandeza inteligivel, que a alma percebe de maneira, que, quando no mundo naõ houvesse corpo algum, o que os Geometras mostraõ da extençaõ, seria sempre verdadeiro; porque, ainda que se mudem os corpos, as verdades Geometricas saõ inalteraveis; porque estas verdades naõ dependem da materia, senaõ do espirito, a saber, das idéas claras da nossa alma.

Segue-se, que por abstracçaõ do entendimento, podemos perceber separadamente, o comprimento sem a largura, e a largura sem a profundidade; porque a idéa do comprimento exclue a da largura, e a idéa da largura exclue a da profundidade.

DEFINIÇAM II.

2 POnto se diz aquillo, que naõ tem partes, a saber, que se considèra sem ellas; e pois que do ponto se compoem a extençaõ, e toda a extençaõ tem partes; se o ponto he alguma cousa, he força que tenha partes; porém considèra-se sem partes, e como indivisivel.

DEFINIÇAM III.

3 A Linha he hum comprimento sem largura, a saber, que se considèra, como senaõ tivesse largura: pode-se considerar a linha como gerada de

de hum ponto, que ſe move de huma parte para outra; e ſe deixaſſe ſinal, ou veſtigio, como em ſi naõ tem largura, tambem a naõ teria o ſeu veſtigio, e ſó teria comprimento; deſta meſma ſorte conſideramos o comprimento de hum caminho, ſem attender á ſua largura: as linhas humas ſaõ rectas, outras curvas.

DEFINIÇAM IV.

4 A Linha recta he aquella mais curta de todas as que ſe podem lançar de hum ponto a outro.

Archimedes dizia, que a linha recta era aquella, cujos pontos extremos encobriaõ todos os meyos; porque, poſta ao olho, hum ſó ponto ſe veria.

DEFINIÇAM V.

5 A Linha curva he aquella, cujos pontos naõ ſaõ poſtos por direito; razaõ porque naõ he o mais curto caminho entre dous pontos.

Saõ muitas as eſpeces de linhas curvas, como de regulares, de irregulares, de Geometricas, e de Mecanicas, de que naõ falaremos neſtes Elementos, e ſó de algumas diremos no Appendice. As linhas curvas ſaõ aquellas, que ſe compoem de duas, como A, ou de muitas como B. A linha B, bem ſe vê, que naõ póde ſer conſiderada, como huma ſó linha, como ſe póde conſiderar a circunferencia de hum circulo.

DEFINIÇAM VI.

6 A Superfice he huma extençaõ em comprimento, e largura, mas ſem profundidade.

Quer dizer, que ſe conſidéra hum comprimento, e huma largura, por exemplo, de huma taboa, ſem conſiderar a ſua groſſura, ou profundidade.

DEFINIÇAM VII.

7 A Superfice recta, ou plana, he aquella, que he a mais curta entre duas linhas rectas.

Podemos perceber huma ſuperfice recta, feita pelo movimento de huma linha, cujo veſtigio deixaria ſinalada huma ſuperfice recta.

DEFINIÇAM VIII.

8 SUperfice curva, he aquella, que he a mayor entre duas meſmas linhas, iſto he, mayor que a ſuperfice recta; porque as linhas, de que ſe compoem a ſuperfice curva, naõ ſaõ poſtas por direito.

DEFINIÇAM IX.

9 O Solido, ou corpo inteligivel, he huma extençaõ, que tem tres dimençoens, a ſaber, comprimento, largura, e profundidade. Pode-ſe conſiderar o ſolido, gerado pelo movimento de huma ſuperfice, e o veſtigio, he o que chamamos corpo, naõ corpo material, mas corpo inteligivel, conſiderado ſómente, como extençaõ em longo, largo, e profundo; mas como deſpido de todas as ſuas qualidades ſenſiveis, como duro, mole, córado, ſeco, humido, fluido, &c.

CAPITULO II.

Do comprimento, que he a primeira, e a mais ſimples dimençaõ do corpo.

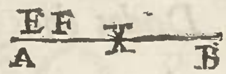
AS propoſiçoens ſeguintes ſaõ incluidas na idéa da linha recta; e por eſſa razaõ muitos Geometras as ſupoem ſem as declarar, e nós o fazemos; porque he importante, que procedamos por noçoens claras, e exactas das couſas, de que buſcamos as propriedades.

PROPOSIÇOENS EVIDENTES DAS linhas rectas.

PROPOSIÇAM I.

Os extremos de huma linha ſaõ dous pontos.

10 NA linha X as extremidades ſaõ A, e B, que ſaõ indiviſiveis,

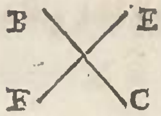


em primeiro lugar, quanto ao ſeu comprimeito; porque, ſe A tiveſſe duas partes, como E, e F, ſeria F a extremidade, e naõ A. Em ſegundo lugar, pois que a linha X naõ tem largura, nem profundidade, tambem A, e B naõ teraõ largura, nem profundidade (num. 2.) e aſſim ſaõ indiviſiveis em todo o ſentido.

PROPOSIÇAM. II.

Se duas diferentes linhas ſe cortarem, o ſeu córte ſerá hum ponto indiviſivel.

11 COrtando a linha EF a linha BC, ſe o córte naõ he em hum ſó ponto, e he em pontos

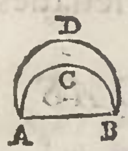


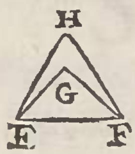
tos diferentes, ſegue-ſe, que a linha E F tem largura; o que he contra a ſua definiçaõ: logo ſó a corta em hum ponto.

PROPOSIC,AM III.

Se dos extremos de huma linha recta ſe lançar huma linha, que ſe aparte para hum, e para outro lado, eſta ſegunda linha ſerá mayor, que a primeira.

12 AS duas linhas curvas A C B, e A D B ſaõ evidentemente mayores, que A B; e a linha E G F, e E H F, que ſaõ compoſtas, cada huma de duas linhas, tambem qualquer dellas he evidentemente mayor, que E F; o que he propriamente corolario da definiçaõ da linha recta.





PROPOSIC,AM IV.

Dados dous pontos, de hum a outro ſe póde lançar huma linha recta.

13 OS Geometras ſe ſervem de hum inſtrumento, chamado regoa, para lançar as linhas rectas; e para ver ſe o inſtrumento he exacto, ſe aplica a outro ſemelhante, e ſe juntos naõ deixaõ paſſar a luz, he ſinal da ſua exacçaõ.

PROPOSIC,AM V.

Dada huma linha recta ſe póde continuar, ou conſiderar continuada indefinitamente, mas naõ póde ſer continuada de hum meſmo lado, para diferentes partes.

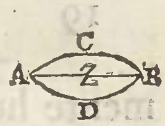
14 ESta propoſiçaõ he evidente; e o inſtrumento, para linhas curtas, ſaõ as regoas, e para linhas

linhas diſtantes o circulo dimenſorio, ou planxeta pelas ſuas pinolas.

PROPOSIC, AM VI.

Entre dous pontos naõ ſe póde lançar mais, que huma linha recta.

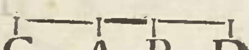
15 SUpponhamos, que ſe podem lançar mais de huma recta entre A, e B, que compoem a linha A Z B; quaeſquer que ſe lancem, he força, que ſe deſviem para a parte C, ou para a parte D; e aſſim ſeráõ A C B, e A D B mayores que A Z B; e aſſim, nem huma, nem outra ſeráõ linhas rectas (num. 4.) pois naõ ſaõ o mais breve caminho entre dous pontos.



PROPOSIC, AM VII.

Duas linhas rectas, que tem dous pontos communs, naõ fazem mais, que huma ſó linha recta.

16 A Linha B C, e a linha A D, que tem dous pontos communs, a ſaber, A, e B, ſe ſe produzirem, ſempre haõ de ir para C, ou para D: logo naõ faraõ mais, que huma linha recta.



PROPOSIC, AM VIII.

A poſiçaõ de huma linha recta (pela antecedente) ſó depende de dous pontos.

17 POrque, ſe pelos dous pontos dados A, e B ſe lançar huma linha recta, ſerá a que ſe buſca, pois que entre os dous pontos, ſenaõ podem lançar differentes linhas rectas.

PROPOSIC,AM IX.

18 A Parte, em que duas linhas rectas se cortaõ, he hum só ponto, e senaõ podem cortar em dous pontos differentes, como fica mostrado.

PROPOSIC,AM X.

A parte de huma linha recta he tambem linha recta.

19 A Razaõ desta proposiçaõ he; porque quem diz parte de huma linha recta, naõ diz sómente hum ponto.

CAPITULO III.

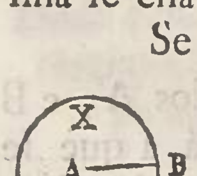
Da linha circular.

AQui só falamos das linhas circulares, que, depois das linhas rectas, saõ as mais simples, e faceis de conhecer; porque ha linhas curvas de differentes especes, de que falaremos em outro lugar.

DEFINIC,AM. I.

20 SE considerarmos huma linha sobre hum plano, curva, de sorte que naõ tenha principio nem fim, cujas partes todas sejaõ igualmente distantes de hum certo ponto, essa linha será curva, circular, e o ponto igualmente distante de todas as partes da dita linha se chamará centro.

Se suppozermos a linha A B fixa no ponto A, em quanto o ponto B, percorre a curva X, ficará descrito hum circulo, cujas partes seraõ todas igualmente distantes do ponto A, centro do circulo.



DEFI-

DEFINIC,AM II.

21 A Linha circular B X he propriamente circunferencia, a ſaber, os extremos do circulo.

DEFINIC,AM III.

22 POr quanto o circulo he propriamente o eſpaço comprehendido dentro da dita linha, a curva he a ſua circunferencia.

DEFINIC,AM IV.

23 AS linhas lançadas ſobre a ſuperfice do circulo, que paſſaõ pelo centro, ſe chamaõ diametros.

DEFINIC,AM V.

24 AS linhas, que partirem do centro, e ſe terminarem na circunferencia, ſe chamaõ ſemidiametros, ou radios do circulo, como A B (num. 20.) he radio do circulo X.

DEFINIC,AM VI.

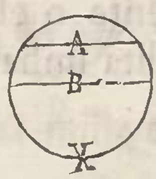
25 AS linhas, que ſe terminaõ na circunferencia, ſem paſſar pelo centro, ſe chamaõ cordas, como A he corda do circulo X, e a linha B, que paſſa pelo centro, he o diametro.

DEFI-

DEFINIC,AM VII.

A parte da circunferencia, que se acha entre os extremos de huma corda, se chama arco.

26 QUando huma corda, como A, no circulo X, naõ passa pelo centro, divide a circunferencia em dous arcos, hum mayor, outro menor; e quando se falla em corda sem distinguir, qual he, sempre se deve entender ser a do arco menor.



DEFINIC,AM VIII.

27 PAra mayor inteligencia dividíraõ os Geometras a circunferencia de qualquer circulo grande, ou pequeno em 360. partes iguaes, e a estas partes chamaõ gráos, de sorte, que a circunferencia do semicirculo comprehende 180. gráos, e a sua quarta parte he 90. gráos.

Servíraõ-se os Geometras deste numero, por ter mais partes aliquotas, e por dár mayor facilidade á divisaõ dos angulos, que se considéraõ formados no centro de hum circulo, como a diante diremos.

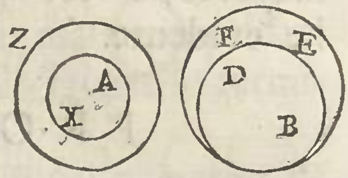
DEFINIC,AM IX.

28 CAda gráo da circunferencia de hum circulo, se divide em 60. minutos, que se chamaõ primos, e cada minuto, ou primo, em 60. minutos segundos, e cada segundo em 60. terceiros; e assim indefinitamente.

DEFI-

DEFINIC,AM X.

29 CIrculos concentricos saõ aquelles, que tem o meſmo centro; e excentricos aquelles, que naõ tem o meſmo centro. Os circulos X, e Z, que tem ambos, por centro o ponto A, saõ concentricos; e os circulos E, e F, que naõ tem o meſmo; pois D he centro do circulo F, e B he centro do circulo E; e aſſim saõ circulos excentricos E, e F.



As propoſiçoens ſeguintes da linha circular saõ conſequencias evidentes, tiradas da definiçaõ do circulo.

PROPOSIC,AM I.

30 DE hum ponto a qualquer intervallo ſe póde deſcrever a circunferencia de hum circulo: (Eucl. liv. 1. Prop. 2. e 3, e liv. 4. Prop. 1.)

O inſtrumento ordinario, para deſcrever hum circulo, he o compaſſo, com o qual ſe póde tambem tomar huma linha igual a outra linha dada, e de duas linhas deſiguaes cortar da grande huma igual á mais pequena, que he o que diz a 2, e 3. Prop. do liv. 1. de Eucl. e a 1. do liv. 4.

PROPOSIC,AM II.

31 DEntro de hum meſmo circulo, ou dentro de circulos iguaes, saõ iguaes os arcos de cordas iguaes, e vice verſa. Eucl. liv. 3. prop. 24.

Iſto he evidente pela ſimplicidade, e uniformidade do circulo; porque ſendo todas as ſuas partes feitas do meſmo modo, naõ ſe póde perceber nenhuma diferença, entre ellas.

PROPOSIÇAM III.

32 DEntro dos mesmos circulos, ou de circulos iguaes as mayores cordas, subtendem arcos mayores, e vice versa. Eucl. liv. 3. Prop. 28. e 29. o que he evidente.

PROPOSIÇAM IV.

33 OS arcos de hum igual numero de gráos, saõ mayores nos mayores circulos, e menores, nos menores.

Esta proposiçaõ he evidente; porque iguaes partes de hum todo grande, saõ mayores, que outras tantas do todo mais pequeno.

PROPOSIÇAM V.

34 OS arcos de hum igual numero de gráos, saõ mayores as suas cordas, do que nos arcos de circulos menores.

He huma consequencia da simplicidade, e uniformidade do circulo; porque no grande, tudo deve ser mayor, que no mais pequeno, o diametro, o semidiametro, ou radio, e acorda.

PROPOSIÇAM VI.

35 O Diametro corta o circulo em duas partes iguaes, que se chamaõ semicirculos.

Se isto naõ fosse verdade, naõ poderiamos perceber o circulo unifórme em todas as suas partes.

PROPOSIC,AM VII.

36 TOdas as linhas lançadas do centro do circulo á circunſerencia, ſendo todos os radios iguaes, as que forem mais pequenas, que o radio, ſe terminaráõ dentro no circulo, ſe forem mais compridas, ſe terminaráõ fóra do circulo, e ſendo iguaes ſe terminaráõ na circunferencia.

O que he evidente; pois que todas as partes da circunferencia, ſaõ igualmente diſtantes do centro, de que o radio he o intervallo.

PROPOSIC,AM VIII.

37 TOdos os circulos, que tem radios iguaes ſaõ iguaes entre ſi.

O comprimento do radio he, o que faz o circulo mayor, ou menor.

PROPOSIC,AM. IX.

38 DOus circulos, que tem o meſmo centro, e o meſmo radio, ſobrepoſtos, naõ tem diferença alguma.

Da meſma ſorte, q̃ duas linhas rectas lançadas entre dous meſmos pontos, naõ ſaõ mais, que huma ſó linha.

CAPITULO IV.

Da diferente poſiçaõ de duas linhas rectas a reſpeito de huma, para a outra.

DEFINIC,AM I.

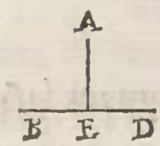
39 HUma linha, que cahe ſobre outra, e a corta de ſorte, que naõ pende mais para huma, que para outra parte da linha, ſobre

bre que cahe, ſe chama perpendicular.

As propoſiçoens ſeguintes ſaõ para dar huma juſta idéa da linha perpendicular.

PROPOSIC, AM I.

40 HUma linha, que cahir juſtamente no meyo de outra linha, ſe o ſeu vertice for igualmente diſtante dos extremos da linha, ſobre que cahio, he evidente, que naõ penderá mais para hum, do que para outro extremo: logo ſerá perpendicular.



Por exemplo, ſe a linha A E cahir no ponto do meyo da linha recta B D, ſe o ſeu extremo A for igualmente diſtante dos extremos B, e D da recta B D, ſegundo a definiçaõ a cima, a linha A E he a perpendicular.

PROPOSIC, AM II.

41 SE dous pontos de huma meſma linha ſaõ igualmente diſtantes dos extremos de outra linha, ſobre que ella cahio, cada ponto da primeira linha ſerá igualmente diſtante dos extremos da ſegunda linha.

Se os dous pontos A, e E ſaõ igualmente diſtantes dos pontos B, e D, todos os outros pontos da linha A E ſeraõ tambem igualmente diſtantes dos pontos B, e D. A razaõ he clara; porque qualquer dos outros pontos tem a meſma razaõ de diſtancia, que tem o primeiro ponto do vertice A.

PROPOSIC, AM III.

42 SE huma linha perpendicular ſe levantar ſobre outra, e hum dos ſeus pontos for igualmente diſtante dos dous pontos da linha, ſobre que ſe le-

levantou, todos os mais pontos feraõ da mefma forte.

Se a linha A E, he perpendicular fobre B D; e que hum dos feus pontos A, ou E for igualmente diftante, de B, e D, qualquer outro ponto será igualmente diftante; porque, fe qualquer outro ponto naõ foffe igualmente diftante de B, ou D, penderia mais para huma parte, do que para outra, contra a fuppofiçaõ.

Para moftrar, que A E he perpendicula fobre B D, bafta moftrar, que o ponto A, e E, faõ igualmente diftantes de B, e de D.

PROPOSIC, AM IV.

43 SE huma linha fe prolongar fobre outra; á qual he perpendicular, o feu prolongo será tambem perpendicular á mefma linha.

A linha A E he perpendicular fobre B D; e affim he evidente, que o feu prolongo E C, fendo huma mefma linha, he tambem perpendicular a A E.

PROPOSIC, AM V.

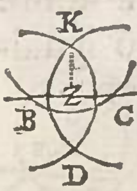
44 SE duas linhas forem perpendiculares, o feraõ reciprocamente huma fobre outra.

Sendo A C perpendicular fobre B D, a linha B D o será tambem fobre A C; porque naõ podemos perceber, que B penda mais para A, do que para C; porque, fe pendeffe mais para huma parte, do que para a outra, A E naõ feria perpendicular.

PROBLEMA I.

45 DE hum ponto dado fóra de huma linha lançar huma linha perpendicular. Eucl. liv. 1. prop. 12.

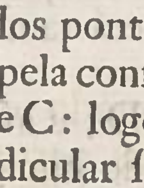
Do ponto K, fóra da linha Z, se quer lançar huma perpendicular sobre a linha Z. Do ponto K, como centro, se descreva o arco de circulo BC; e assim B, e C, que estaõ na circunferencia do circulo, seraõ igualmente distantes do ponto K: isto supposto; do ponto C, com o intervallo CK se descreva hum circulo, e do ponto B, com o intervallo BK se descreva outro circulo KD; e estes dous circulos se cortaráõ nos pontos K, e D, que assim saõ igualmente distantes de B, e de C; e logo pelos pontos K, e D, se lance a linha KD, cujos pontos, pela construcçaõ, saõ igualmente distantes dos pontos B, e C: logo (num. 42.) a linha KD foy lançada perpendicular sobre a linha Z; e he o que se queria fazer.



PROBLEMA II.

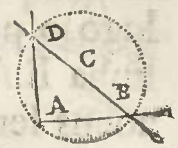
46 SObre hum ponto dado em huma linha, levantar huma perpendicular. Eucl. liv. 1. prop. 11.

Seja dado sobre a linha Z o ponto K, para delle levantar huma perpendicular: em primeiro lugar de K como centro, se descreva qualquer circulo, q̃ corte a linha Z em dous pontos, como A, e B: em segundo lugar, desses dous pontos A, e B, como centros se descrevaõ dous circulos de hum mesmo intervallo á discriçaõ de sorte, que esses dous circulos se cortem, e suponho se cortaõ no ponto D: em terceiro lugar, lance-se do ponto D, ao ponto K a linha DK; e he a perpendicular, que se buscava; porque pela construcçaõ, D he



he igualmente diſtante de A, e de B, e o ponto K he tambem igualmente diſtante, pela conſtrucçaõ: logo eſta linha, tendo dous pontos igualmente diſtantes de A, e de B (num, 42.) he perpendicular ſobre Z.

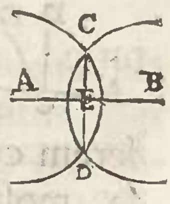
Se o ponto dado, para levantar a perpendicular, for no extremo da linha, como A B, e o ponto, A, tomaremos, á diſcriçaõ qualquer ponto fóra da linha dada, como C, e com o intervallo A C deſcreveremos hum circulo, e pelo extremo B, em que o circulo corta a linha A B, pelo centro lançaremos o diametro B D, e do ponto A para o ponto D, lançaremos a linha A D, que ſerá a perpendicular, que ſe queria lançar: a demonſtraçaõ fica para outro lugar.



COROLARIO.

47 DA propoſiçaõ a cima ſe ſegue o modo de poder cortar huma linha em duas partes iguaes. Eucl. liv. 1. prop. 10.

Seja A B huma linha recta, que ſe quer cortar em duas partes iguaes: dos pontos A, e B, como centros, e com qualquer intervallo, á diſcriçaõ, ſe deſcrevaõ dous circulos, que ſe cortem nos pontos C, e D, pelos quaes lançando á linha A B, a linha C D, ſerá eſta perpendicular; pois que A, e B (num. 42.) ſaõ igualmente diſtantes de C, e D: logo a linha A B fica cortada pelo meyo no ponto E, igualmente diſtante (num. 41.) dos extremos da linha A, e B.

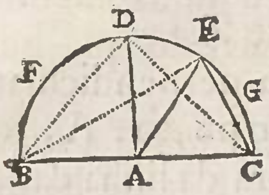


THEOREMA I.

48 DE qualquer ponto dado, naõ ſe póde lançar mais, que huma ſó perpendicular.

Seja

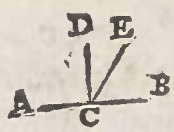
Seja a linha A D perpendicular ſobre B C, devemos moſtrar, que ſenaõ póde lançar outra do meſmo ponto A, que ſeja perpendicular, e ſe he poſſivel, ſeja A E: de A, como centro ſe deſcreva o circulo B F D E G C; e aſſim B, e C, ſaõ igualmente diſtantes de A, e D; onde a perpendicular corta o circulo he tambem igualmente diſtante (num. 42.) de B, e de C: logo B D igual D C; e aſſim os dous arcos B F D, e C G D ſaõ iguaes (num. 31.) logo o ponto D he metade do arco B F D E G C; ſe a linha E A foſſe tambem perpendicular, pelas meſmas razoens ſeriaõ B E igual C E, e B F D E igual C G E, e por conſequencia, o ponto E ſeria o meyo de BFDEGC, e B F D igual B F D E; o que he abſurdo: logo &c.



THEORFMA II.

49 SE huma linha cahir perpendicular ſobre o meyo de outra linha, paſſará por todos os pontos igualmente diſtantes dos extremos da linha, ſobre que cahe.

A linha C D ſendo perpendicular ſobre o ponto C, meyo da linha A B, moſtraremos, que ella paſſa por todos os pontos igualmente diſtantes de A, e de B; ſe nos diſſerem conteſtando, que o ponto E he, o porque naõ paſſa, moſtraremos, que o ponto E ſeria neſſe caſo perpendicular ſobre A B, pois que os pontos C, e E ſe ſupoem igualmente diſtantes de A, e de B (num. 42.) mas pelo Theorema precedente, ſobre o meſmo ponto C naõ podem cahir duas perpendiculares: logo o ponto E naõ he igualmente diſtante de A, e de B.

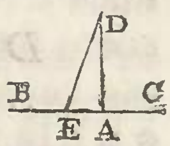


THEO-

THEOREMA III.

50 DE hum mesmo ponto sobre huma mesma linha naõ se póde lançar mais, do que huma só perpendicular.

A linha A D cahe perpendicular sobre a linha B C: digo que do mesmo ponto D senaõ póde lançar outra alguma perpendicular sobre B C; porque, se esta linha cahisse mais para huma, do que para outra parte, como, por exemplo, no ponto E, nesse caso, o ponto E ficaria igualmente distante de B, e de C (num. 42.) logo B E seria metade da linha B C; mas A B he tambem metade: logo seria B A igual a B E, a parte ao todo; o que he absurdo.



THEOREMA IV.

51 DUas linhas sobre hum plano perpendiculares a huma terceira, por mais que se produzaõ, naõ se podem encontrar.

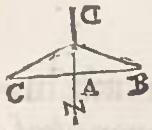
Se estas linhas, se podessem encontrar sobre o ponto da sua secçaõ, cahiriaõ duas perpendiculares sobre huma mesma linha, o que he impossivel, pelo Theorema precedente.

A linha perpendicular he a mais recta medida de qualquer distancia considerada entre dous pontos, por ser entre os mesmos pontos a mais curta, como mostraremos no Theorema seguinte.

THEOREMA V.

52 A Linha perpendicular he a mais curta de todas, as que se podem lançar de hum ponto a huma linha.

A linha B A he perpendicular sobre a linha Z:



devemos moſtrar, que he a mais curta de todas as linhas, que do ponto B ſe podem lançar ſobre a linha Z: produza-ſe B A, para C, de ſorte, que B A ſeja igual A C: a linha D A he perpendicular ſobre B C, da meſma ſorte, que B C he perpendicular ſobre A D (numero 44.) logo o ponto D he igualmente diſtante de B, e de C (num. 42.) e aſſim B D = D C; mas a linha recta B C he mais curta que a linha B D * D C (num. 12.) e por conſequencia AB, metade de B C, he mais curta, que B D, metade de B D * D C; e he o que ſe queria demonſtrar.

DAS LINHAS OBLIQUAS.

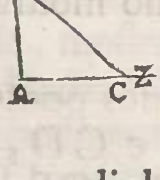
DEFINIC,AM I.

53 AS linhas obliquas ſaõ aquellas, que pendem para huma, e outra parte da linha, que encontraõ.

DEFINIC,AM II.

54 A Linha B C ſe diz obliqua, a reſpeito da linha Z, que a encontra no ponto C.

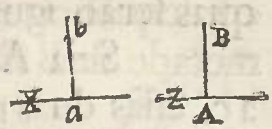
Para moſtrar, que B C he obliqua, lance-ſe do ponto B a perpendicular B A, e ſerá o ponto A, o pé da perpendicular, e C o pé da obliqua; e aſſim A C ſerá a diſtancia do perpendiculo, e eſta diſtancia he a medida da obliquidade de B C: de que ſe ſegue, que huma linha he mais obliqua, que outra, quando he mayor a ſua diſtancia ao perpendiculo, que aſſim ſe chama a perpendicular, a reſpeito de qualquer obliquo.



L E M M A I.

55 DUas linhas rectas, que tem sobre si, cada huma huma perpendicular, se se sobrepozessem huma sobre outra, de sorte, que o pé de huma perpendicular, se sobreponha sobre o pé da outra, essas duas perpendiculares se ajustaráõ entre si.

A B he perpendicular sobre a linha Z, e b a he perpendicular sobre a linha X: devemos mostrar, que, se a linha X, se aplicar sobre a linha Z, de sorte, que o ponto a fique sobre o ponto A, as duas linhas perpendiculares A B, e b a se ajustaráõ de modo, que será huma só linha. Porque depois desta sobreposiçaõ, X, e Z naõ seraõ mais, que huma só linha, e tanto lhe será perpendicular A B, como b a: logo, se A B, e b a senaõ ajustassem, haveria duas perpendiculares sobre huma mesma linha, de hum mesmo ponto; o que he impossivel (num.48.)



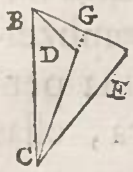
L E M M A II.

56. SE dos extremos de huma linha, se lançarem de cada hum duas linhas obliquas, que se vaõ ajuntar cada duas a hum ponto: digo, que a soma das duas, que se ajuntarem mais distantes da linha dada será mayor, que a soma das outras duas. Eucl. l. 1. Prop. 21.

Seja a linha dada B C, e de cada hum dos pontos B, e C, se lancem duas linhas, como B D, e C D, e outras duas, como B E, e C E. Digo, que B E ✱ C E he mayor, do que BD ✱ CD. Em primeiro lugar: A linha recta entre dous pontos, he a mais curta (n. 12.) C E ✱ E G he mayor, que C D ✱ D G, e pela mesma razaõ B G ✱ G D, he mayor, que B D: logo C E ✱ E G ✱ G D ✱ B G,

THEO-

BG, he mayor, que CD + DG + BD, e tirando de huma, e outra parte DG, o resto CE, e FG + BG, ou CE + EB, serà mayor, que BD + CD; e he o que se queria provar.

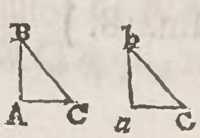


THEOREMA I.

57. HAvendo igualdade na perpendicular, e na distancia do perpendiculo, as linhas obliquas seráõ iguaes.

Seja AB perpendicular sobre AC, e ab, sobre ac, essas duas perpendiculares saõ iguaes, como tambem AC, distancia do perpendiculo AB, he igual ac, distancia do perpendiculo ab.

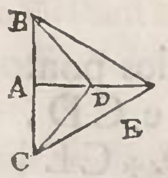
Devemos mostrar, que BC = bc. Pelo primeiro lemma, posto ac sobre AC, sendo essas duas linhas iguaes, a perpendicular ab se ajuntará com a perpendicular AB, que sendo iguaes, cahirà BC sobre bc; e assim seràõ iguaes as obliquas BC, e bc; e he o que se queria mostrar.



THEOREMA II.

58. AS linhas obliquas, lançadas de hum mesmo ponto a huma mesma linha, saõ mais compridas, as que forem mais distantes do perpendiculo.

Devemos mostrar, que BE he mais comprida, que DB: seja AB produzida para C de sórte, que AB = AC (num. 57.) e BD = DC, e BE = EC; mas BE + EC he mayor, que BD + DC (lemma 2.) logo BE, metade de BE + EC, he mayor, que BD, metade de BD + DC; e he o que se queria demonstrar.

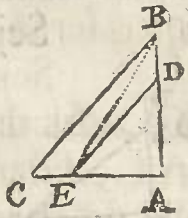


THEO-

THEOREMA III.

59. QUando a diſtancia do perpendiculo he mayor, tambem he mayor a obliqua, e mayor a perpendicular; e ſe a diſtancia do perpendiculo he a meſma, e a obliqua mayor, tambem he mayor a perpendicular.

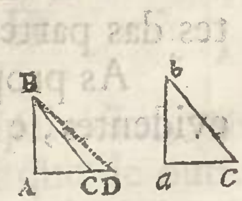
Sejaõ, em primeiro lugar, BC, e DE duas linhas obliquas, a perpendicular A B he mayor, que A D, e A C, diſtancia do perpendiculo de B A he mayor, que A E, perpendiculo de D A: Digo, que a obliqua B C, he mayor, que B E, e pois que A C, he perpendicular ſobre A B: logo B E he mayor que D E, e por conſequencia B E ſerà ainda mayor, que D E: Em ſegundo lugar, A E he a meſma diſtancia: digo, que, ſe B E he mayor, que D E, o perpendiculo A B he mayor, que a perpendicular A D; porque ſe A D foſſe mayor, que A B, ou igual a B E, ſeria menor, que D E contra a ſuppoſiçaõ.



THEOREMA IV.

60. HAvendo igualdade na perpendicular, e na obliqua, tambem ha igualdade na diſtancia do perpendiculo.

Seja A B = a b, e B C = b c: Devemos moſtrar, que A C = a c; ſe ſobrepozermos a b ſobre A B, eſſas duas linhas ſe ajuſtaràõ inteiramente, e pelo primeiro lemma, a perpendicular ac, ſe ajuſtará ao menos em parte com a perpendicular A C. Se A C menor que a c, c naõ convèm com C, mas com D; e aſſim

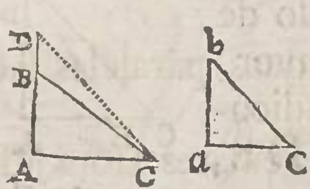


BC se ajustará com B D; mas B D será mayor, que BC (num. 58.) o que he contra a supposiçaõ de BC $=$ bc, e seria igualmente absurdo se se suppozesse AC $>$ ac: logo AC $=$ ac; e he o que se queria demonstrar.

THEOREMA V.

61. HAvendo igualdade na linha obliqua, e na distancia do perpendiculo, as perpendiculares seráõ iguaes.

Seja AC $=$ ac, e BC $=$ bc. Devemos mostar, que AB $=$ ab: se sobrepozermos a c sobre AC, essas duas linhas iguaes se ajustaráõ, como tambem a perpendicular a b, com a perpendicular AB, ao menos em parte (lemma 1.) Se nos differem, que AB $<$ ab, e que assim b convèm com D; nesse caso b c se ajustará com DC, e lhe serà igual; e assim DC (num. 58.) mayor, que BC, ao qual se suppoem igual, o que he absurdo, se AB foy supposta $>$ que ab: logo ab se ajustarà inteiramente com AB; e assim AB $=$ ab; e he o que se queria provar.



DAS LINHAS PARALE'LAS.

DEFINIÇAM.

62. AS linhas paralélas saõ aquellas, cujas partes de huma saõ todas igualmente distantes das partes da outra.

As proposiçoens seguintes das linhas paralélas, saõ evidentes, e corolarios da definiçaõ.

PROPOSIÇAM I.

63. HUma linha recta, que tem dous pontos igualmente distantes de outra linha recta, lhe he paraléla, ou ambas saõ paralélas.

A razaõ he; porque a posiçaõ de huma linha recta só depende de dous pontos; e assim essas duas linhas, sendo igualmente distantes, huma da outra, ellas saõ paralélas, pela definiçaõ a cima.

PROPOSIÇAM II.

64 AS perpendiculares entre duas paralélas saõ entre si iguaes.

A razaõ he; porque as perpendiculares saõ a justa medida da distancia, que há entre duas paralélas; e como as paralèlas saõ em todas as suas partes igualmente distantes, as perpendiculares, he evidente, que devem ser iguaes.

PROPOSIÇAM III.

65 DUas linhas paralélas produzidas, ou prolongadas indefinitamente, nunca se poderáõ encontrar.

He evidente, que ellas senaõ podem encontrar, sem que se cheguem para hum lado; mas chegando-se mais, naõ tem já a mesma distancia: logo já naõ saõ paralélas, como se suppoem.

PROPOSIÇAM IV.

66 DUas linhas rectas, que naõ saõ paralélas, mas que se chegaõ mais de huma, que de outra parte, ellas se chegaráõ a encontrar, se se produzirem, o que baste.

Esta

Esta proposiçaõ he por si mesma evidente; mas devemos advertir, que isto só se entende das linhas rectas, e naõ das curvas, ou as rectas com ellas comparadas; sendo, que ha linhas curvas de tal qualidade, que huma linha recta se hirá sempre chegando para ellas, sem nunca as encontrar.

PROPOSIC,AM V.

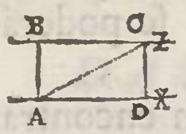
67 DUas linhas perpendiculares sobre huma mesma linha, saõ entre si paralélas.

A razaõ he; porque essas duas perpendiculares naõ se encontraõ nunca (num. 51.) o que sucederia, se ellas naõ fossem paralélas, segundo a proposiçaõ precedente.

LEMMA I.

68 ENtre duas paralélas, as linhas, que saõ perpendiculares sobre huma, o saõ tambem sobre a outra.

Se A B, perpendicular sobre X o naõ he sobre Z: logo Z o naõ será tambem sobre A B (num. 44.) e assim se inclinaria sobre a linha A B, e se chegaria, da parte da linha X; e assim a encontraria (num. 66.) e por conseguinte lhe naõ seria paraléla, contra a suposiçaõ.



LEMMA II.

69 A Linha A B naõ póde ser perpendicular sobre Z, e X, sem que essas duas linhas sejaõ paralélas,

He evidente, que essas duas linhas saõ reciprocamente perpendiculares sobre A B (num. 44.) logo saõ paralélas (num. 67.)

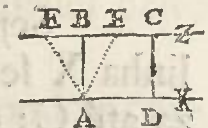
LEM-

L E M M A III.

70 SE entre duas linhas rectas ſe lançarem outras duas linhas rectas iguaes, huma dellas perpendicular ſobre a primeira linha, e a outra perpendicular ſobre a ſegunda, digo, que as duas primeiras linhas ſaõ paralélas.

Entre as linhas Z, e X, ſejaõ AB, e C D duas linhas iguaes, AB perpendicular a X, e CD perpendicular ſobre Z: digo, que Z, e X ſaõ paralélas.

Porque, ſe Z naõ he paraléla a X, ella ſe deſviará, ou ſe chegará; mas huma, e outra couſa he abſurdo; e aſſim de força ſeraõ paralélas; em primeiro lugar, ſuppondo, que ella ſe deſvia: tirando do ponto A a linha AE perpendicular ſobre Z (*num.* 45.)

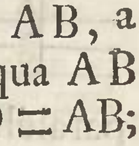


eſta linha perpendicular ſe ajuſtará com AB; e Z, e X ſeraõ perpendiculares ſobre AB (conſtrucçaõ) e como taes, paralélas entre ſi (num. 68.) contra a ſuppoſiçaõ; mas ſe AE ſe deſvia do lado AB, a perpendicular AE ſerá mais curta, que a obliqua AB (*num.* 34.) e por conſeguinte mais curta, que CD = AB; e aſſim a linha Z ſe chegaria para a linha X contra a ſuppoſiçaõ; o meſmo abſurdo ſe ſeguiria, ſe ſuppozerem, que a linha Z ſe chega para a linha X.

P R O B L E M A

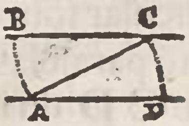
71 POr hum ponto dado lançar huma linha paraléla a huma linha dada. *Eucl. liv.* 1. *Prop.* 31.

Seja a linha AD aquella, a quem ſe hade lançar outra linha paraléla, que paſſe pelo ponto C dado: do ponto C dado ſe lançe a perpendicular ſobre a linha AD, ſobre a qual ſe levante a perpendicular AB = CD: he claro, que a linha, que paſſar pelos dous pontos B, e C, ſerá paraléla a AD, ſegundo a definiçaõ (*num.* 62.)



POR OUTRO MODO.

DO ponto dado A ſe deſcreva hum arco com qualquer abertura, que paſſe pelo ponto dado C, do

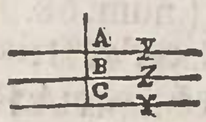


qual, com a meſma a bertura A C, ſe deſcreva o arco A B $\sqsupset$ C D; a linha lançada pelos pontos B, e C, ſerá a paraléla, que ſe queria lançar á linha A D.

THEOREMA.

72 DUas linhas paralélas a huma terceira, ſaõ paralélas entre ſi. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 30.

Sejaõ as duas paralélas X, e Y ambas a Z: da linha X ſe lançe A B perpendicular ſobre Z, e ſe produza até C; e aſſim, ſendo perpendicular ſobre Z, o ſerá



tambem ſobre Y, perpendicular a Z (*n.* 68.) e pois que Z he paraléla a X, eſta linha perpendicular ſobre Z, o ſerá tambem ſobre X, paraléla a Z; e aſſim, pois que Z, e Y ſaõ perpendiculares ſobre A C, ellas ſeraõ tambem paralélas entre ſi (*num.* 67.) e he o que ſe queria demonſtrar.

COROLARIO.

73 POr hum meſmo ponto naõ podem paſſar duas diferentes linhas, que ſejaõ paralélas a huma meſma linha.

Pelo theorema precedente, eſſas linhas devem ſer paralélas entre ſi, o que he abſurdo, pois he impoſſivel, que ſejaõ paralélas, tendo hum ponto commum; e a eſſencia das paralélas he, de ſenaõ poderem nunca encontrar.

CAPI-

CAPITULO V.

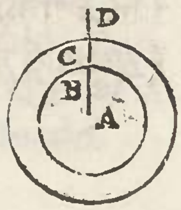
Da diferente poſiçaõ de dous circulos, a reſpeito hum do outro.

COmo os circulos ſaõ linhas, pertencem á primeira dimençaõ dos corpos; e aſſim dous circulos de duas ſortes podem ter diferente poſiçaõ; em primeiro lugar, quando hum nem corta, nem toca o outro; em ſegundo lugar, quando o corta, ou o toca por dentro, ou por fóra. As propoſiçoens ſeguintes ſaõ evidentes.

PROPOSIÇAM I.

74 OS circulos concentricos, nem ſe podem cortar, nem tocar hum ao outro.

Para perceber, que os circulos Z, e X concentricos, de que he centro o ponto A, ſenaõ cortaõ, nem tocaõ, baſta conſiderar, que paſſa hum, pelo ponto B, e outro pelo ponto C da linha AD: logo o circulo deſcrito, pelo ponto B ſerá ſempre centro do circulo Z, paſſando pelo ponto C; e aſſim he impoſſivel, que ſe poſſaõ encontrar.



PROPOSIÇAM II.

75 DOus circulos concentricos guardaõ ſempre entre ſi a meſma diſtancia.

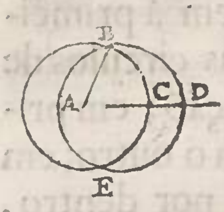
Iſto he evidente; pois entre X, e Z naõ podem ſer as diſtancias diferentes em parte alguma.

THEO-

T H E O R F M A I.

76 D Ous circulos, que ſe cortaõ, naõ ſaõ concentricos. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 5.

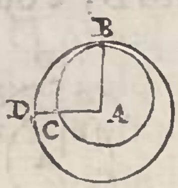
Sejaõ os dous circulos, que ſe cortaõ nos pontos B, e E : digo que eſtes dous circulos naõ tem o centro em hum meſmo ponto; porque, ſe A he centro deſſes dous circulos, que ſe cortaõ no ponto B, as linhas A B, e A C, radios deſſes circulos, ſeraõ iguaes (*num.* 10.) a ſaber, A C = A B; e pela meſma razaõ A B = A D; e aſſim ſeria a parte igual ao todo; o que he abſurdo.



T H E O R E M A II.

77 D Ous circulos, que ſe tocaõ, naõ ſaõ concentricos. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 6.

Sejaõ os dous circulos, os que ſe tocaõ no ponto B: digo, que eſtes circulos naõ tem o meſmo centro; porque, ſe A foſſe centro deſſes dous circulos, ſeria A D = A C (*num.* 20.) e porconſequencia A D = A B = A C; e aſſim A D = A C, a ſaber, a parte A C igual ao ſeu todo A D; o que he abſurdo.

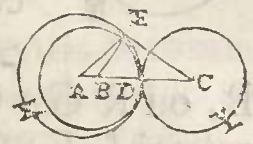


T H E O R E M A III.

78 S E dous, ou mais circulos tiverem os centros em huma meſma linha, que elles cortaõ em hum meſmo ponto, elles ſe tocaõ neſſe ſó ponto.

Os circulos X, Z, Y tem os ſeus centros na linha, que elles cortaõ no ponto D. Devemos moſtrar, que neſſe ſó ponto D ſetocaõ.

Se pertenderem, que elles ſe podem tocar em outro qualquer ponto, como, por exemplo, no ponto E, E, neſſe caſo A E ſeria igual AD, que ſe ſuppoem radios do meſmo circulo, e pela meſma razaõ C D = C E; e aſſim A E * C E = A D * C D; o que he abſurdo (*n.* 12.) da meſma ſorte moſtraremos, que os circulos Z, e X ſenaõ encontraõ no ponto E; porq̃ ſe ſe encontraſſem, ſeria B D = B E, e A E = A D; mas A D = A B * B D, ou A B * B E: logo A E = A B * B E; o que he evidentemente abſurdo.



COROLARIO.

79 DOus circulos, nem por dentro, nem por fóra ſe podem tocar mais, que em hum ſó ponto. *Eucl. liv.* 3. *Prop.* 13.

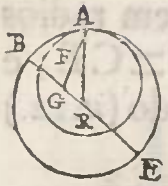
Sejaõ os dous circulos X, e Z, que ſe tocaõ por dentro no ponto D (*figura idem*) digo, que ſenaõ podem tocar em outro ponto; porque, ſe quizerem, que ſe toquem no ponto E, ſerá A B * B E = A E; o que he abſurdo.

Que, ſe X, e Y ſe tocaõ por fóra no ponto D, ſenaõ podem tocar em outro algum, por exemplo, naõ ſe podem tocar no ponto E; porque neſſe caſo ſeria A C = A E * E C; o que he evidentemente abſurdo.

THEOREMA IV.

80 SE dous circulos ſe tocaõ por dentro, a linha recta, que paſſar pelos centros, produzida cahirá no ponto do contacto deſſes dous circulos. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 11.

Em primeiro lugar. Pelo theorema II. eſſes dous circulos naõ tem o meſmo centro: em ſegundo lugar, ſeja R centro de B A E, ſe quizerem, que G ſeja centro de F A F, que ſenaõ acha na linha R A, que paſſa por A, ponto do

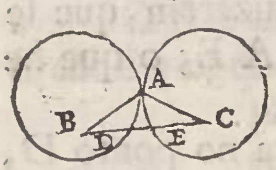


contacto, seguirse-há, que seja G A = G E (num. 20.) e assim, R G ∗ G A = R G ∗ GF; mas R G ∗ G A ⊳ R A (num. 12.) e por consequencia mayor, que R B; porque R A ⊳ R B (num. 20.) e assim R G ∗ G F ⊳ R B, ou R G ∗ G B, e tirando-lhe R G parte commua, restará G F ⊳ que o todo G B; o que he absurdo.

THEOREMA V.

81 SE dous circulos se tocarem por fóra, huma linha recta, que passar pelos seus centros, passará, pelo ponto do contacto de ambos. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 12.

Sejaõ os dous circulos D A D, e E A E, que se tocaõ no ponto A : digo que a linha que passa pelos centros, passará pelo ponto A. Se houver quem o negue, se lhe mostrará o absurdo; porque, se



B for centro do circulo D A D, e C, centro de E A E, se a linha B C, naõ passar pelo ponto A, em que os dous circulos se tocaõ, será BA = B D, e CA = CE (*num.* 20.) logo BA ∗ A C = B D ∗ C E; pois que B C naõ passa pelo ponto do contacto dos dous circulos D I E, naõ saõ o mesmo ponto, pois tem o intervalo D E, ajunte-se B D ∗ C E; e assim será B D ∗ D E ∗ C E ⊳ A B ∗ A C; o que he evidentemente absurdo.

CAPITULO VI.

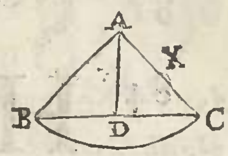
Da posiçaõ da linha recta a respeito do circulo.

HUma linha recta póde estar, ou inteiramente dentro de hum circulo, ou fóra delle: se ella he de fóra, e lhe póde chegar, se poderá produzir, de de ſorte, que o corte, ou que ſómente o toque, ſem entrar dentro.

THEOREMA I.

82 SE na circunferencia de hum circulo ſe tomarem quaeſquer dous pontos, a linha, que os ajuntar cahirá dentro do circulo. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 2.

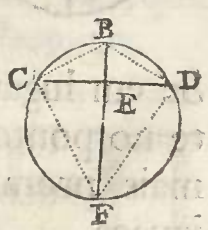
Sejaõ B, e C dous pontos tomados na circunferencia do circulo X, devemos moſtrar, que a linha B C eſtá inteiramente dentro do circulo: de A centro do circulo X, ſe lance a linha recta A D, ſendo o ponto D metade de B C; e pois que AB, e AC, radios do circulo X ſaõ iguaes; e ſendo o ponto D meyo de B C, a linha A D ſerá perpendicular (*num.* 36.) e por conſequencia menor, que A B, ou A C (*num.* 40.): logo D eſtá dentro do circulo (*numero* 52.) mas qualquer outra linha obliqua lançada do ponto A, ſobre B C, ſerá mais curta, que A B, ou A C (*num.* 58.) logo a linha B C eſtá inteiramente dentro do circulo X.



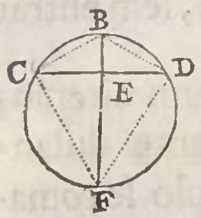
THEOREMA II.

83 SE huma corda for cortada perpendicularmente em duas partes iguaes: digo, que a linha, que aſſim a cortar, dividirá tambem o arco do circulo em duas partes iguaes, e paſſará pelo centro.

Seja a corda C D cortada perpendicularmente em duas partes iguaes, pela linha B F no ponto E: digo, que eſta linha corta o arco C D em duas partes iguaes no ponto B, e paſſa pelo centro do circulo. Em primeiro lugar, pois q̃ o pōto E he igualmente diſtante dos pontos C, e D, e que B F he perpendicular ſobre C D, o ponto B ſerá tambem igualmente diſtante dos pontos C, e D (*num.* 42.) e aſſim a corda



BC



B C igual á corda B D : logo o arco B C = B D (*num.* 31.) e aſſim o arco C B D ſe acha dividido em dous igualmente no ponto B, e o meſmo ſe poderá moſtrar do arco C F D. Em ſegundo lugar, a perpendicular B F paſſa por todos os pontos igualmente diſtantes de C, e de D (*num.* 42.) mas o centro do circulo he igualmente diſtante deſſes dous pontos, C, e D : logo a linha B F paſſa pelo centro.

COROLARIO. I.

84 HE evidente, que para cortar hum arco em duas partes iguaes, ſe deve levantar ſobre o meyo da ſua corda huma perpendicular : *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 30.

COROLARIO II.

85 DOus arcos comprehendidos entre duas linhas paralélas ſaõ iguaes.

Os dous arcos M C, N D comprehendidos entre as duas linhas paralélas M N, e C D ſaõ iguaes; por quanto lançando o diametro B F perpendicular ſobre C D (*num.* 45.) cahirà tambem perpendicular ſobre M N (*num.* 68.) e aſſim B M = B N, e B C = B D (*num.* 42.) as cordas deſſes dous arcos iguaes ſaõ iguaes (*num.* 31.) logo o arco BC − BM = BD − BN; mas o arco BC − BM = C M; e da meſma ſorte B D − B N = N D : logo C M = N D; e he o que ſe queria de monſtrar.

Se em lugar da corda M N, ſe ſuppozeſſe huma tangente no ponto B, paraléla a C D, ainda ſe demonſtraria mais promptamente, que os arcos B C, e B D ſaõ iguaes.

THEO-

PROBLEMA I.

86 DAdos tres pontos, deſcrever hum circulo; de cujo centro fiquem igualmente diſtantes os tres pontos. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 1.

Sejaõ os tres pontos dados A, B, C, e ſe lancem as linhas AB, e BC, que ſe devem conſiderar, como cordas do circulo buſcado, e lançando duas linhas perpendiculares do meyo de cada huma: digo, que o ponto K, em que as perpendiculares ſe cortaõ, he centro do circulo X buſcado; o que he evidente, como ſe moſtra do theorema precedente; porém, ſe os tres pontos ficaſſem em huma meſma linha recta, o problema ſeria impoſſivel; porque as linhas perpendiculares, naõ ſe poderiaõ encontrar, ſendo paralélas.

COROLARIO I.

87 DOus circulos naõ podem ter tres pontos communs, como ABC, que o naõ ſejaõ todos.

Eſſes dous circulos, tendo o meſmo centro K, e ſendo deſcritos com hum meſmo intervallo, naõ podem formar mais, que hum meſmo circulo (*num.* 38.) logo naõ pódem ter trez pontos cõmuns, ſem que o ſejaõ todos.

COROLARIO II.

88 DOus circulos naõ ſe podem cortar mais, que em dous pontos. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 10.

Se elles ſe podem cortar em tres pontos, teriaõ trez pontos communs: logo pelo corolario precedente naõ ſeriaõ dous circulos diferentes, mas hum ſó circulo.

COROLARIO III.

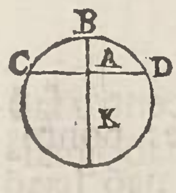
89 DAdo hum arco de circulo, acabar de o descrever. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 25.

Notem-se trez pontos no arco, ou porçaõ de circulo; e assim lhe poderemos achar o centro, pelo problema precedente; e he o que se queria fazer.

THEOREMA III.

90 SE huma linha cortar a corda de hum arco de circulo em duas partes iguaes, e passar pelo centro, ella cortará a corda perpendicularmente. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 3.

Seja a linha BK, que corta o arco, ou a corda de hum circulo em duas partes iguaes, e passa pelo centro K, ella corta a corda perpendicularmente; porque nesta linha BK há dous pontos A, e B, e K he igualmente distante de C, e D; e como A he metade de CD, e BD, metade do arco CBD, e que K he centro: logo (*num.* 40.) a linha BK he perpendicular.



THEOREMA IV.

91 SE huma linha corta perpendicularmente a corda de hum arco, e passa pelo centro: digo, que a corta em duas partes iguaes. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 3.

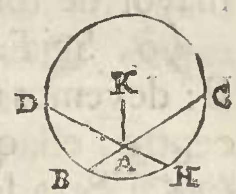
A linha BK passa pelo centro K, e he perpendicular sobre CD: digo, que ella corta a corda CD pelo meyo; o centro K he igualmente distante de C, e de D; e BK, sendo perpendicular ao ponto A, todos os mais pontos de BK estaõ igualmente distantes de C, e de D (*num.* 42.) logo AC = AD; e assim CD foy cortada pelo meyo.

THEO-

THEOREMA V.

92 DUas cordas, que naõ paſſaõ pelo centro, naõ ſe podem partir pelo meyo. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 4.

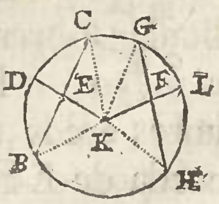
Sejaõ as duas cordas D H, e B C: digo, que ellas ſenaõ cortaõ pelo meyo, ou em partes iguaes: do ponto A da ſecçaõ, ſe lance huma linha ao centro K, eſta linha K A ſerá perpendicular ſobre B C, e ſobre D H (*num.* 90.) logo B C, e D H ſeraõ perpendiculares ſobre A K (*num.* 44.) logo, ſe ſobre o meſmo ponto A, há duas perpendiculares: ſegue-ſe hum grande abſurdo (*num.* 48.) e aſſim fóra do centro, ſenaõ podem cortar duas cordas pelo meyo.



THEOREMA VI.

93 AS cordas igualmente diſtantes do centro ſaõ entre ſi iguaes, e ſendo iguaes ſaõ igualmente diſtantes do centro. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 14.

Sejaõ as cordas B C, e G H igualmente diſtantes de K, centro: digo, que ellas ſaõ entre ſi iguaes, e que as ſuas diſtancias K E, e K F, ſaõ tambem iguaes. Em primeiro lugar, laçem-ſe a eſſas duas cordas as perpendiculares D K, e K L, que as cortaráõ pelo meyo (*num.* 91.) e aſſim K E = K F; e pois que B K = K H, e *K* C = *K* G: logo a obliqua *K*B, ſendo igual á obliqua *K* H, e as perpendiculares *K* E, e *K* F ſeraõ iguaes (*num.* 60.) pela meſma razaõ ſemoſtra: digo, e as perpendiculares *K* E, e *K* F, ſendo igualmente diſtantes do perpendiculo B E, e H F ſeraõ iguaes (*numero* 60.) pela meſma razaõ ſe moſtra, que E C = F G; e por tanto B C = H G, que he o que ſe

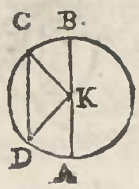


ſe queria provar. Em ſegundo lugar, fica moſtrado, que as obliquas K B, e K H eſtaõ igualmente diſtantes do perpendiculo K E, e B F, e aſſim iguaes as perpendiculares K E, e K F. (*num.* 61.)

THEOREMA VII.

94 DE todas as linhas, que ſe podem lançar em hum circulo, a que paſſa pelo centro he a mayor de todas. *Eucl. liv.* 3. *Prop.* 15.

Seja a linha A B o diametro do circulo A D C B: devemos moſtrar, que A B he mayor, por exemplo, que C D, ou qualquer outra, que naõ paſſe pelo centro, o que he evidente, pois que K C = K B, e K D = K A; e aſſim B A = K C + K D mas K C + K D > C D (*num.* 12.) logo B A > C D, como ſe queria moſtrar.



THEOREMA VIII.

95 AS cordas mais proximas ao centro do circulo ſaõ as mayores, e as menores ſaõ as que ficaõ mais diſtantes do centro do circulo. *Eucl. liv.* 3. *Prop.* 15.

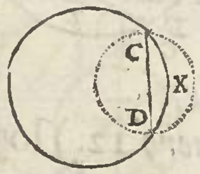
Seja A o centro do circulo, e as linhas ſejaõ B C, e D E: devemos moſtrar, que D E mais proxima do centro A, he mayor, que B C, que ſe acha mais diſtante; a diſtancia de B C he A M, e a de D E he A N, a qual diſtancia he menor; o que he evidente; porque o arco E F D he mayor, que o arco C F B; mas os mayores arcos tem mayores cordas (*num.* 32.) logo D E, corda de E F D he mayor, que B C, corda de C F B; e he o que ſe queria demonſtrar.

THEO-

THEOREMA IX.

96 SE huma linha for corda commua de dous circulos desiguaes, que se cortaõ: digo, que o arco do menor circulo contém mayor numero de gráos que o mayor.

Sejaõ dous arcos de circulos desiguaes X, e Z, que se cortaõ nos pontos C, e D, a corda CD he commua a esses dous arcos: digo, que o arco CZD do menor circulo contém mayor numero de gráos, do que o arco CXD do mayor; porque, se os dous arcos, de que CD he corda, tivessem o mesmo numero de gráos, seria falso o que deixamos demonstrado (*num.* 33.) a saber, que os arcos de hum mayor numero de gráos tem mayores cordas; e que estas, nos circulos mais pequenos, contèm mayor numero de gráos.

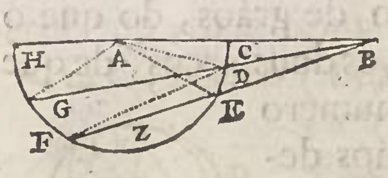


Devemos advertir, que falando de qualquer corda, sempre se entende a do menor arco de circulo, e naõ do mayor, salvo se a explicar.

THEOREMA X.

97 SE de hum ponto, tomado fóra de hum circulo, se lançarem muitas linhas, que o atravessem, e se terminem na circunferencia: digo, primeiramente, que de todas, as que cahirem sobre a parte convexa, a que produzida passar, pelo centro, será a mais curta; e que das mais linhas, que se lhe seguirem, seraõ mais curtas, as que lhe forem mais proximas, e mais compridas as mais remotas; em segundo lugar, o contrario diremos de todas aquellas linhas, que cahirem na superfice concava do mesmo circulo, e se terminarem nella. *Eucl. liv.* 3. *Prop.* 8.

Seja B o ponto, do qual se lançaraõ linhas ao circulo, como BH, BG, BF: em primeiro lugar, digo, que BC, que passa pelo centro, he a mais curta de qualquer outra lançada do mesmo ponto, a saber, mais curta que BD; porque AC = AD; mas AC ∗ CB he mais curta, que AD ∗ DB (*num.* 12.) logo BC he mais curta, que BD, AD = AE: logo AD ∗ DB he mais curta, que AE ∗ EB (*num.* 17.) logo tirando de grandezas iguaes AD, e AE, o resto DB será mais curto, que o resto BE, como he evidente: em segundo lugar, BH,



que passa pelo centro, e se termina na circunferencia concava, he a mayor; por quanto AB ∗ AH ⊳ AB ∗ AG; mas AB ∗ AG he mayor, que BG (*numero* 12.) logo BH ⊳ BG.

Da mesma sorte, he evidente, que BD ∗ DF ⊳ BF (*num.* 12.) mas DG ⊳ DF (*num.* 95.) logo BD ∗ DG ⊳ BF.

THEOREMA. XI.

98 SE de hum ponto, tomado fóra do centro de hum circulo, se lançarem muitas linhas á circunferencia, a que passar, pelo centro será a mayor de todas, e o resto desse diametro será a mais curta. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 7.

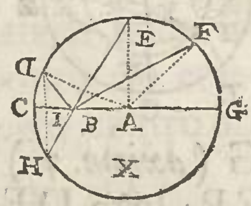
Do ponto B se lancem as linhas BE, que passa pelo centro A, BC, BF, e BD: digo, que BE he mayor que a sua parte: BD he a menor, ou a mais curta de todas, as que se podem lançar do mesmo ponto. Em primeiro lugar, BA ∗ AE = BA ∗ AC, pois que AE = AC; mas AB ∗ AC ⊳ BC (*num.* 12.) logo BE = BA ∗ AC, e assim mayor, que BC: Em segundo lugar, AF = AB ∗ BD; mas AB ∗ BF ⊳ AF (*num.* 12.) tirando

rando AB, parte commua, o resto BF será mayor, que o resto BD (*axiom.* 7.)

THEOREMA XII.

99 DE qualquer ponto, dentro de hum circulo, que naõ for centro, só duas rectas se podem lançar iguaes. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 9.

Seja A centro do circulo X; e assim o ponto B naõ he centro, nem delle se podem lançar mais, que duas linhas rectas iguaes; porque, em primeiro lugar, BD > BC (*num.* 98.) em segundo lugar; porque BE he mayor, que BD, e AD = AE saõ radios do circulo X, e BF > BE; mas BG > BF (*num.* 98.) e por consequencia, em toda a parte as linhas, lançadas de B aos pontos C, D, F, G, da circunferencia de X saõ desiguaes. Tomando o arco CH = CD, pois q̃ AC he radio cortará perpendicularmente a linha DH (*n.* 90.) e emduas partes iguaes no ponto I (*num.* 42.) e assim havendo igualdade de perdendiculo, e igual distancia, as obliquas BH, BD seraõ iguaes (*num.* 57.) mas qualquer outra linha que BH, será, ou mayor, ou menor, como se tem mostrado.



COROLARIO. I.

100 SEgue-se, que só do centro de hum circulo se podem lançar a circunferencia mais de duas linhas iguaes.

COROLARIO II.

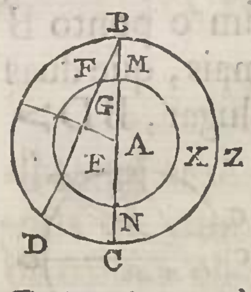
101 TOdo o ponto dentro de hum circulo, do qual se podem lançar tres linhas iguaes á circunferencia, he centro do mesmo circulo. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 9.

THEO-

THEOREMA XIII.

102 HUma linha, que paſſar por dous circulos concentricos, ou paſſa pelo centro, ou naõ; as partes de cada huma deſſas linhas, entre as duas circunferencias ſaõ iguaes entre ſi.

Sejaõ B C, e B D duas linhas, que paſſaõ pelos dous circulos concentricos X, e Z: digo, que B M = N C, e B F = E D. Em primeiro lugar, que B C, que paſſa pelo centro, fica moſtrado (*num.* 95.) em ſegundo lugar, de A lançando huma perpendicular ſobre B D ſerá G D = G B, e G E = G F (*numero* 90.) logo G D − G E = G B − F G (*axiom.* 7.) mas G D − G E = D E, e G B − G F = F B: logo D E = B F; e he o que ſe queria moſtrar.

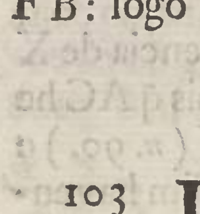


THEOREMA XIV.

103 HUma linha perpendicular ſobre o extremo de hum radio, toca o circulo, e o naõ toca mais, que em hum ſó ponto. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 16. *e* 18.

A linha B D he perpendicular ſobre B K: devemos moſtrar, que eſta linha toca o circulo X no ponto B.

Se nos derem hum ſegundo ponto: como C, lance-ſe de K, a C, huma linha, a qual naõ he perpendicular ſobre B D; pois que do ponto K ſobre B D, ſenaõ póde lançar mais, que huma ſó perpendicular (*num.* 50.) logo K C > B K, a qual he perpendicular ſobre B D (*numero* 52.) e aſſim o ponto C fica fóra do circulo X: logo B D naõ toca o circulo em dous pontos B, e C, mas ſómente no ponto B; e he o que ſe queria moſtrar.



CORO-

COROLARIO.

104 NAõ póde haver mais, que huma ſó linha, que toque o circulo em hum meſmo ponto.

Duas linhas diferentes naõ podem tocar o circulo X no meſmo ponto B; porque ſeriaõ ambas perpendiculares; o que he impoſſivel. (*num.* 48.)

THEOREMA XV.

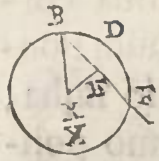
105 SE dentro de hum circulo ſe lançar huma linha perpendicular ſobre o ponto do contacto, ou da tangente, eſta linha paſſará pelo centro do circulo. *Eucl. liv.* 3. *Prop.* 19.

A linha CD he tangente: de C, ponto do contacto ſe lance huma perpendicular para dentro do circulo, que paſſará pelo centro. Se diſſerem, que naõ paſſa pelo centro, mas pelo ponto B, q̃ naõ he centro, moſtraremos o contrario; porque levantando de C o radio CK, e ſobre o ſeu extremo C huma perpendicular, eſta ſerá tangente (*num.* 100.) e ſerá a meſma que CD, pois que do ponto C ſenaõ póde lançar mais, que huma ſó tangente (*num.* 101.) e aſſim ſobre a linha CD, do meſmo ponto haveria duas perpendiculares CK, e CB; o que implica. (*num.* 50.)

THEOREMA XVI.

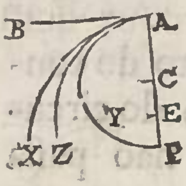
106 ENtre huma tangente, e a circunferencia de hum circulo, naõ ſe póde lançar nenhuma linha recta, ainda que ſe poſſaõ lançar hum numero indefinito de linhas circulares. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 16.

Se entre BD, tangente, e o circulo X, ſe póde



lançar alguma linha recta, que divida o espaço, entre a tangente B D, e o circulo: seja, se quizerem B F, sobre a qual se lance do ponto X outra linha, que lhe seja perpendicular, a saber K E, que será mais curta que o radio B K, que naõ he perpendicular sobre esta linha (*num.* 33.) e assim K E, sendo menor, que B K, o seu extremo E ficará dentro do circulo: logo a linha B F, que naõ fica fóra do circulo, naõ póde dividir o espaço, que ha entre a circunferencia, e a tangente B D; e he o que se queria mostrar.

Mas entre a tangente A B, e o circulo Y, podem passar indefinitos circulos; porque, produzindo o radio A C para lá do centro C, por exemplo, até E; e de E, como centro, e com o intervalo E A se descreva o circulo Z, a linha A B será tangente desse circulo (*numero* 105.) o qual, sendo mayor, cahirá fóra do circulo Y; e da mesma sorte do circulo X, de que P he centro, ficará tambem entre A B, e Y; e assim indefinitamente: logo entre a tangente A B, e o circulo Y, se podem lançar indefinitas linhas circulares.



COROLARIO

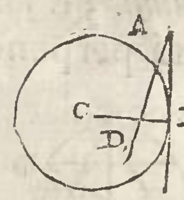
107 SEgue-se evidentemente, que o espaço comprehendido entre a tangente, e a circunferencia de hum circulo, se póde dividir em hum numero indefinito de partes.

THEOREMA XVII.

108 DE hum ponto fóra de hum circulo, se lhe naõ póde lançar mais, que huma só tangente.

A ra-

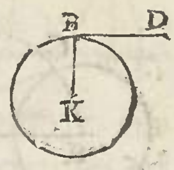
A razaõ he, porque qualquer outra linha cortará o circulo, ou naõ chegará a elle: ſeja A, hum ponto dado fóra do circulo, que a linha A B toca no ponto B: digo, que de A para B ſenaõ póde lançar outra tangente; porque, em primeiro lugar, ſe he fóra de A B naõ tocará o circulo: em ſegundo lugar, ſe ella paſſa por B, naõ ſerá outra linha, mas a meſma tangente A B: em terceiro lugar, ſe ella paſſa para dentro do circulo, como pelo ponto D, pois que C B mayor, que C D, o ponto D ficará dentro do circulo (*num.* 36.) logo &c.



PROBLEMA II.

109 LAnçar huma linha recta, que toque hum circulo em hum ponto dado.

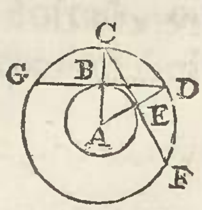
O centro do circulo he K, o ponto dado B: ſobre o ſeu extremo ſe levante a perpendicular B D (*num.* 46.) e ſerá B D a tangente (*num.* 100.) que ſe queria fazer.



PROBLEMA III.

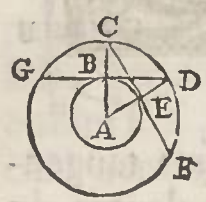
110 DE hum ponto dado fóra do circulo tirar huma tangente. *Euclid.liv.* 3. *Prop.* 17.

Seja o circulo B E B, e o ponto dado C, do qual ſe lance huma linha ao centro A, e no ponto B, onde eſta linha corta o circulo, pela antecedente, ſe lance a tangente G D. Pelo ponto C ſe deſcreva hum circulo concentrico, e do ponto D, onde a tangente corta o circulo C G D, ſe tome D F = D C, e ſe lance a linha C F, que ſerá a tangente, que ſe queria lançar.



Pela conſtrucçaõ, a corda G D = C F; porque o arco

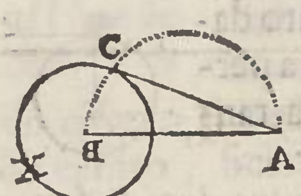
arco G C he igual a C D (*n.* 31.) e o arco C D ao arco D F; e ſendo iguaes eſtes arcos, o ſeraõ tambem as ſuas cordas (*num.* 31.) lance-ſe de D ao centro A, a linha A D, que ſerá perpendicular ſobre C F, pois que os dous pontos



A, e D, ſaõ igualmente diſtantes dos ſeus extremos; e pois que as cordas D G, e C F ſaõ iguaes (*num.* 93.) logo o ponto E, e o ponto B eſtaõ na circunferencia do circulo B E B; e aſſim a linha C F perpendicular ſobre o ponto E, extremo do radio A E (*num.* 100.)

POR OUTRO MODO MAIS FACIL.

111 SEja A o ponto dado, do qual ſe quer lançar huma tangente ao circulo X: do ponto A ao centro B ſe lance a linha A B, e



ſobre ella ſe deſcreva o ſemi-circulo A C B, que tocará o circulo no ponto C: digo, que A C he a tangente buſcada; em outro lugar ſe dará a demonſtraçaõ.

LOGICA

LOGICA GEOMETRICA, LIVRO II.

DA SEGUNDA ESPECIE DE EXTENC,AM, QUE he a largura das ſuperfices planas.

CAPITULO I.

Dos angulos, ou ſuperfices, que eſtaõ entre duas linhas, que ſe encontraõ indirectamente.

ANTES de entrarmos na materia, devemos conſiderar, que ſó tratamos aqui das ſuperfices planas, que ſaõ as mais curtas entre duas linhas rectas, começando pelas linhas, que ſe cortaõ, ou ſe encontraõ em hum ponto.

DEFINIC,AM I.

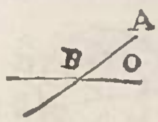
1 O Angulo he o eſpaço, ou ſuperfice comprehendida entre duas linhas rectas, que ſe tocaõ em hum ponto, e produzidas ſe cortaõ.

Eſta definiçaõ he a mais propria, e a que melhor explica a natureza do angulo, que ſó, em razaõ do eſpaço, he diviſivel.

DEFINIC,AM II.

2 O Vertice de hum angulo, ou a ſua ponta, he aquelle ponto, em que as duas linhas ſe cortaõ.

A B O he o angulo, o ſeu vertice, B, e os ſeus lados A B, e B O: os angulos ſe devem nomear ſempre por tres letras, e a do meyo ſignifica o ponto, em que ſe tocaõ, ou ſe cortaõ, chamado vertice.

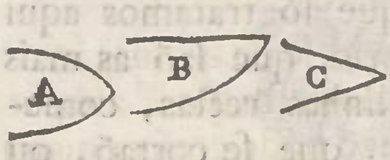


DEFINIC,AM III.

3 CHama-ſe angulo plano, o que he deſcrito ſobre hum plano, ou ſuperfice recta.

DEFINIC,AM IV.

4 OS angulos ſaõ de tres ſortes, a ſaber, o angulo curvilineo compoſto de duas linhas curvas como A: o angulo mixtilineo compoſto de huma curva, e outra recta, como B: o angulo rectilineo compoſto de duas linhas rectas como C.



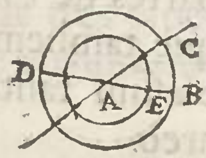
Note-ſe, que as curvas, que compoem os angulos curvos, e mixtilineos, ſe ſupoem, que ſaõ porçoens de circulos.

PROPOSIC,OENS, EVIDENTES EM ORDEM aos angulos.

PROPOSIC, AM I.

5 HE evidente, pela definiçaõ do angulo, que a ſua grandeza naõ depende das linhas, que o formaõ, mas da ſua abertura, mayor, ou menor, de que reſulta ſer mayor, ou menor o eſpaço entre as linhas comprehendido.

Produzaõ-ſe as linhas AB, e AC, ou ſe incurtem, ſempre a abertura he a meſma: logo da abertura do angulo, ou para melhor dizer da abertura das linhas, que o formaõ, procede ſer mayor, ou menor.



PROPOSIC, AM II.

6 HUm angulo naõ póde creſcer, nem diminuir, ſenaõ movendo-ſe hum dos ſeus lados como AC (*figura precedente*) chegando-ſe, ou apartando-ſe da linha B, ficando o ſeu extremo fixo em A.

PROPOSIC, AM III.

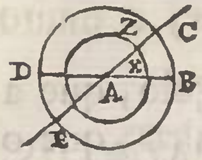
7 O Meſmo lado AC, afaſtando-ſe de B, hirá ſempre creſcendo, e fazendo-ſe mayor, até coincidir com a linha AD, em que naõ póde creſcer mais; pelo contrario, ſe ſe mover, chegando-ſe para B, e chegando a eſſe ponto, tambem já naõ póde ſer menor.

PROPOSIC, AM IV.

8 OS arcos, ou porçoens de diferentes circulos, deſcritos por diferentes pontos, por hum dos lados

lados do angulo, comprehendem hum igual num. degráos.

Tomando o ponto X no lado A C, e deſcrevendo o circulo X, e o ponto Z no circulo Z Z: digo, que as porçoens dos dous circulos, comprehendidas entre as linhas A B, e A C, contèm hum igual numero de gràos; porque, como eſſes dous circulos ſaõ deſcritos em o meſmo tempo; ſe dividirmos eſſe tempo em 360. momentos, que ſaõ outros tantos, como os gráos, em que ſe divide o circulo: digo, no meſmo momento primeiro, em que o ponto Z deſcreve 360. partes de toda a grandeza do circulo Z Z, he evidente, que tambem X fará huma meſma parte do circulo XX; e aſſim tantos gràos comprehenderá hum, como outro arco.



PROPOSIC,AM V.

9 SE do vertice de hum angulo, como de hum centro, ſe deſcrever hum circulo, a porçaõ de circulo comprehendida entre os lados deſſe angulo he a mais natural medida do meſmo angulo, que marca, ao juſto, o numero de gráos, que contém.

PROPOSIC,AM VI.

10 O Mayor angulo naõ póde ter por ſua medida o ſemicirculo; porque nunca póde chegar a ter completos 180. gráos que tocaõ ao ſemicirculo.

Se o lado A C do angulo B A C ſe mover, de ſorte, que venha a coincidir de C no ponto D, naõ fará mais, que huma meſma linha recta A B; porque, como ſe ſupoem, que B C D he metade da circunferencia, he força, que A B + A D ſejaõ huma ſó linha recta, e diametro do circulo; e como toda a circunferencia do circulo he de 360. gráos, a ſemicircunferencia fica de

180.

180. gráos, cujo diametro naõ póde formar angulo; porque, ainda que se encontra D A, e A B no ponto A, he por direito, compondo huma só linha; e assim produzidas, senaõ podem cortar, e na Geometria senaõ considéra angulo algum, que chegue a 180 gráos, e muito menos, que passe a mayor numero de gráos.

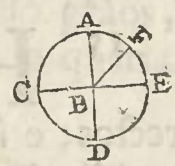
DAS DIFERENTES SORTES DE ANGULOS, a respeito das suas aberturas, ou das porçoens dos circulos, que os medem.

OS angulos, a respeito das suas aberturas, e dos arcos de circulo, a que correspondem, saõ de tres especies, a saber, angulo recto, angulo agudo, e angulo obtuzo.

DEFINIÇAM I.

11 O Angulo recto he aquelle, que tem por sua medida a quarta parte da circunferencia de hum circulo, a saber, 90. gráos.

Suppondo, que o arco A C he a quarta parte da circunferencia A C D E A, e por consequencia de 90. gráos, quarta parte de 360. em que toda a circunferencia do circulo se divide (*liv.* 1. *n.* 27.) o angulo A B C, que tem por sua medida o arco A C, he recto.



DEFINIÇAM II.

12 O Angulo obtuzo he aquelle, que tem por sua medida hum arco mayor, que a quarta parte da circunferencia do circulo.

O Arco F C he mayor, que A C, e comprehende mayor numero de gráos, do que 90; e assim o angulo F B C he obtuzo.

DEFINIC, AM III.

13 ANgulo agudo he aquelle, que tem por medida hum arco de circulo menor, que a quarta parte, que comprehende menos de 90. gráos.

O Angulo F B E (*figura idem*) he agudo; porque tem por ſua medida o arco F E menor de 90. gráos.

O angulo agudo póde diminuir, ou ſer menor, e menor indefinitamente; e o obtuzo naõ póde creſcer mais, que até indefinitamente hir chegando a completar metade da circunferencia do circulo, que vale dous angulos rectos, ou 180. gráos.

DEFINIC, AM IV.

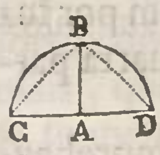
14 O Angulo agudo que, junto com o obtuzo vale dous angulos rectos ſe chama complemento do angulo obtuzo para o ſemicirculo.

O angulo F B E (*figura idem*) he complemento do angulo obtuzo C B F.

THEOREMA I.

15 HUma linha recta, que cahe perpendicular ſobre outra linha, faz com ella dous angulos rectos; e ſe ella faz dous angulos rectos, a linha he perpendicular.

Seja a linha B A perpendicular ao ponto, meyo da linha C D. Em primeiro lugar, digo, que deſcrevendo-ſe do ponto A o ſemicirculo C B D pela idéa da perpendicular, as linhas, ou cordas B C, B D ſaõ iguaes (*liv.* 1. *num.* 49.) e aſſim os arcos, que ellas ſubtendem ſeraõ



tambem iguaes (*liv.* 1. *num.* 31.) e pois que C B D he metade da circunferencia, e C D o diametro, os arcos

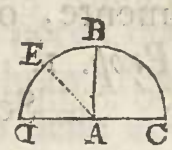
B C,

BC, BD, ferá cada hum a quarta parte: logo os angulos BAC, BAD, que tem cada hum por medida a quarta parte da circunferencia do circulo, faõ rectos (*num.* 11.) e he a primeira parte, do que fe queria moftrar. Em fegundo lugar, moftraremos facilmente, que os angulos CAB, e DAB faõ rectos, por fer cada hum metade do femicirculo; mas A, e B eftaõ igualmente diftantes de C, e de D: logo a linha AB he perpendicular (*liv.* 1. *num.* 42.) e he a fegunda parte, que fe queria moftrar.

THEOREMA II.

16 TOda a linha, que cahe fobre outra, fórma com ella dous angulos iguaes a dous rectos. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 13.

Seja a linha EA a que cahe fobre CD: digo, que o angulo DAE com o angulo EAC valem dous rectos; porque, fe de A, como centro, defcrevermos o femicirculo DEC, e levantarmos a perpendicular AB, ou o angulo feja recto, obtuzo, ou agudo, fegundo a definiçaõ do angulo, o arco DBC tem por medida a femicircunferencia do circulo (*num.* 12. *e* 13.) logo igual a 180. gráos, ou dous angulos rectos (*num.* 11.) e he o que fe queria moftrar.



COROLARIO I.

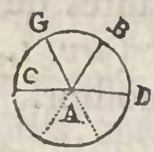
17 HE evidente, que huma infinidade de linhas, que cahirem fobre outra linha, que todos os angulos em foma, naõ valeráõ mais, que dous angulos rectos.

COROLARIO II.

18 SE duas linhas fe cortarem em hum ponto, e fe produzirem, formaráõ angulos, que todos jun-

juntos naõ valeráõ mais, nem menos, que quatro angulos rectos.

Lancem-ſe quantas linhas quizerem ſobre C D pelo ponto A, e ſe produzaõ, e do ponto A, como centro, ſe deſcreva hum circulo: fica moſtrado, que todos os angulos ſobre a ſemicircunferencia C G B D valem

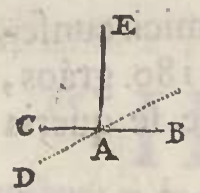


dous rectos, e a outra ſemicircunferencia vale outros dous rectos: logo quantos angulos ſe formarem no ponto A naõ valem mais, nem menos, que quatro rectos.

THEOREMA. III.

19 SE em hum ponto de qualquer linha recta ſe encontrarem outras duas linhas rectas, fazendo com ella, de huma, e outra parte os angulos iguaes a dous rectos, eſſas duas linhas ſe encontraráõ direitamente, ou ficaráõ poſtas por direito. *Euclides livro* 14. *Prop.* 1.

Sejaõ as duas linhas A B, e A C, que ſe encontraõ



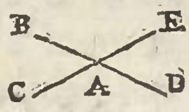
no ponto A da linha A E, e fazem de huma, e outra parte os dous angulos E A B, e E A C, iguaes a dous rectos: devemos moſtrar, que ellas ſe encontraõ direitamente, a ſaber, que ellas naõ formaõ mais, que huma ſó linha. Seja B A E + C A E igual dous rectos: ſe differem, que B A, e A C naõ ſaõ huma ſó linha; e que B A produzida vay para D: logo pelo theorema precedente, os angulos B A E, e E A D valeráõ dous rectos, e tambem valeráõ o meſmo E A D, e E A B; o que he abſurdo, pois comprehendem mais, que a ſemicircunferencia do circulo.

THEO-

THEOREMA IV.

20 DUas linhas, que se cortaõ em hum ponto, fazem os angulos oppostos pelo vertice iguaes. *Eucl. liv.* 1. *Prop.* 15.

As duas linhas B D, e C E se cortaõ no ponto A: digo, que os angulos CAD, e BAE saõ iguaes, como tambem os angulos D A E, e C A B. O angulo C A B, e o angulo B A E valem dous rectos, B A C, D A C tambem valem dous rectos (*n.* 17.) logo C A B + B A E = C A B + DAC, e tirando de huma, e outra parte o angulo commum C A B, os restos D A C, e B A E saõ iguaes. Da mesma sorte mostraremos, que C A B = D A E.



DEFINIC,AM IV.

21 O Seno de hum arco he metade da corda do dobro desse arco; ou o seno de hum arco he a linha perpendicular, que cahe do extremo desse arco, sobre o radio.

O arco B E he o dobro do arco B D, a linha B C he metade de B E, corda de B D E, e seno, assim do arco B D, como do arco B F, seu complemento, para o semicirculo, e assim os arcos D E, e B F iguaes ambos ao semicirculo, tem hum mesmo seno, e saõ reciprocamente complementos, hum do outro, ao semicirculo.

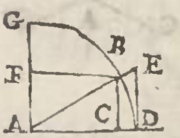
DEFINIC,AM V.

22 O Seno de hum angulo he o seno do arco que o mede.

A linha B C he seno do arco B E, medida do angulo B A D, e assim B C he o seno deste angulo. Quando o angulo he obtuzo, o seu seno he tambem seno do angulo agudo, que he o seu complemento, para o semicirculo. Desta sorte, B C he seno do angulo obtuzo BAF, e tambem do angulo B A D; mas para o diante devemos considerar sempre os senos dos angulos agudos, salvo se a explicarem.

Sendo B C seno do angulo B A D, a linha C D comprehendida entre B C, e B D, se chama seno verso do orco B D, de que B C se chama seno recto, ou simplesmente seno; por quanto C D se deve sempre explicar por seno verso.

A linha D E, que toca o arco B D, e que se termina pela linha A E, e pela linha A D, que



comprehende o mesmo arco, se chama tangente do mesmo arco B D; e do angulo B A D, a linha A E se chama secante, assim do arco B D, como do angulo B A D.

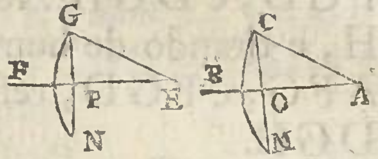
Os Mathematicos dividirão o radio do circulo em hum grande numero de partes, como, por exemplo, em 100000. partes, ou ainda em mayor numero, para calcularem as partes semelhantes, que podem corresponder ás partes dos senos, tangentes, e secantes dos angulos; e por este modo alcançárão o poder comparar as linhas com outras linhas, que denotão quantidades superficiaes, a saber, linhas com angulos; e assim se ordenárão as taboas dos senos, tangentes, e secantes de que se tirão grandes ventagens. Veja-se o appendice de Trigonometria do Engenheiro Portuguez Tomo I.

THEOREMA V.

23 OS angulos iguaes tem iguaes senos; e se os senos são iguaes tambem são iguaes os angulos.

Primeiramente, os angulos C A B, e G E F são iguaes:

iguaes: dos ſeus vertices A, e E com igual intervallo ſe lancem os arcos CB, e GF, que ſaõ iguaes (*num.* 9.) continuando eſtes arcos, de ſorte, que CB = BM, e GF = FN, pois que dous arcos iguaes, tem iguaes cordas (*liv.* 1. *num.* 31.) ſerá CM = GN, e da meſma ſorte OC = PG, metades de cordas iguaes; mas eſſas metades ſaõ ſenos dos angulos CAB, e GEF (*num.* 21.) logo os ſenos deſſes angulos ſaõ iguaes.



Se os ſenos OC, e GP ſaõ iguaes, ſerá CM = GN (*num.* 21.) e tambem CBM = GFN: logo os angulos CAB, e GEF, que tem a meſma medida, ſaõ iguaes; e he o que ſe queria moſtrar.

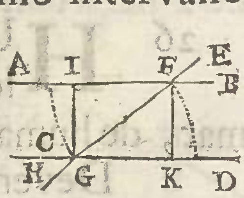
THEOREMA VI.

24 SE huma linha cortar obliquamente duas paralélas formará 8. angulos, dos quaes, quatro ſe chamaõ alternos interiores, e outros quatro exteriores; e huns, e outros ſaõ iguaes. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 29.

Devemos moſtrar, que AFE = HGD, e que AFG = FGD, os dous primeiros alternos exteriores, e os dous ſegundos interiores.

DEMONSTRAÇAM.

LAncem-ſe as perpendiculares FK, e IG, que ſaõ iguaes (*liv.* 1. *num.* 64.) e com o meſmo intervallo GF, do centro F, e do centro G, ſe deſcrevaõ os dous arcos AG, DF, medidas dos angulos AFG, e FGD, de que as perpendiculares IG, e FK ſaõ ſenos (*num.* 22.) e eſſes angulos ſaõ iguaes (*num.* 23.) AFE, e AFG valem dous rectos (*num.* 16.) como tambem



FGD,

FGD, e DGH: logo AFE+AFG=FGD+DGH, e tirando de huma, e outra parte os angulos iguaes AFG, e FGD, restaráõ iguaes os alternos AFE = DGH.

OUTRA DEMONSTRAÇAM.

SE imaginarmos, que a linha AB (*figura idem*) cahe sempre paralélamente, até chegar a CD, e que o ponto F, se una com o ponto G, he claro, que ella a cobrirá perfeitamente; e nesse caso, o angulo AFE será CGF; mas CGF=HGD: logo (*num.*20.) seraõ iguaes os alternos; e o mesmo se póde mostrar de quaesquer outros angulos.

THEOREMA VII.

25 SE huma linha ajuntar outras duas linhas, e com ellas fizer os angulos alternos iguaes essas duas linhas seraõ paralélas.

Se as linhas AFG, e FGD (*figura idem*) forem iguaes, os seus senos GI, e FK seraõ tambem iguaes (*num.* 23.) GI, e FK seraõ tambem iguaes (*num.* 22.) GI he perpendicular sobre CD, e FK sobre AB, pela definiçaõ dos senos (*num.* 20.) e por tanto as duas linhas AB, e CD (*liv.* 1. *num.* 69.) saõ paralélas; e he o que se queria mostrar.

THEOREMA VIII.

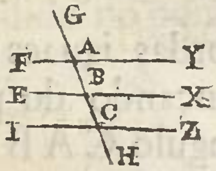
26 HUma linha, que cortar duas, ou mais paralélas, todos os angulos, que com ella fórmar, de huma mesma parte, seraõ iguaes.

Devemos mostrar, que saõ iguaes todos estes angulos GAY=ABX=BCZ, e que YAB=XBC=ZCH; e o mesmo se mostrará da outra banda, a saber,

que

que G A F = A B E = B C I, e F A B = E B C = I C K.

Primeiramente Z C B = C B E (*num.* 24.) e C B E = A B X (*num.* 19.) logo Z C B = C B E = X B A; e aſſim, ſegundo o axioma, que duas grandezas iguaes a huma terceira ſaõ iguaes entre ſi: logo ZCB = X B A, o meſmo ſe moſtrará, que G A Y = A B X; e aſſim dos mais angulos.



THEOREMA IX.

27 SE huma linha, cahindo ſobre outras duas, ou mais, fizer com ellas iguaes os angulos, tomados de huma meſma parte, eſſas linhas ſeraõ paralélas. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 28.

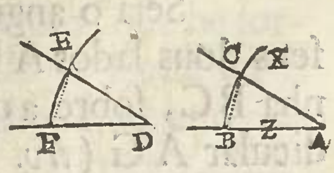
DEMONSTRAÇAM.

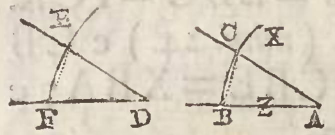
POis que G A Y * Y A B (*fig. idem*) valem dous rectos, como tambem G B X * G B E (*num.* 16.) logo, tirando deſſes dous todos, iguaes, os angulos GAY, e GBX, que ſe ſuppoem iguaes, reſtaráõ iguaes os angulos alternos Y A B, e G B E: de que ſe ſegue, que as linhas Y, e X ſaõ paralélas; e o meſmo ſe póde moſtrar, que Y, e Z, e X, e Z, ſaõ tambem linhas paralélas.

PROBLEMA I.

28 DE hum ponto dado ſobre huma linha recta, deſcrever hum angulo rectilineo igual a outro angulo dado. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 23.

Do ponto dado A ſobre a recta Z, devemos deſcrever o angulo C A B igual ao angulo E D F. Do ponto D, como centro, ſe deſ-



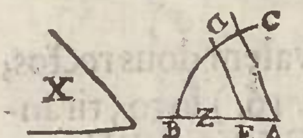


creva o arco F E, e do ponto A, como centro, e com o intervallo D E ſe deſcreva o arco B X, fazendo o arco B C = F E por meyo das cordas iguaes E F, B C (*livro* 1. *numero* 30.) e logo lançando do ponto C ao ponto A huma linha recta, o angulo C A B ſerá o que ſe queria fazer igual a E D F, pois tem por medida arcos iguaes (*num.* 10.) &c.

PROBLEMA II.

29 DE hum ponto dado fóra de huma linha, lançar huma recta ſobre outra, que faça com ella hum angulo igual a outro angulo dado.

Seja o ponto dado D, do qual ſe deve lançar huma linha recta ſobre a linha Z, que faça com ella hum angulo igual ao angulo dado X: de qualquer ponto tomado na linha Z á diſcriçaõ, levante-ſe huma linha tal, como A C, que faça com a linha Z o angulo B A C igual ao angulo dado X (*Problema precedente*) ſe eſta linha paſſar pelo ponto D, eſtá feito o problema, ſenaõ paſſa pelo ponto D, deſſe ponto lanço a linha B E paraléla a A C (*liv.* 1. *num.* 70.) e aſſim D E B = C A B (*num.* 25.) logo o angulo D E B = X; e he o que ſe queria fazer.

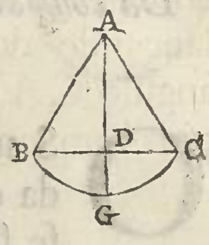


PROBLEMA III.

30 DIvidir hum angulo em duas partes iguaes. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 9.

Seja o angulo dado B A C a dividir: façaõ-ſe os ſeus dous lados A B, e A C iguaes, e ajuntem-ſe pela linha B C, ſobre a qual, e do ponto A, ſe lance a perpendicular A G (*liv.* 1. *num.* 44.) e ſerá B D = D C (*liv.* 1. *num.* 40.)

num. 40.) por tanto considerando que o arco B G C he porçaõ de hum circulo, de que A he o centro, e A B, e A C radios, e B C a corda dividida igualmente pela perpendicular A G, o arco B G C será dividido no ponto G pelo meyo (*liv.* 1. *num.* 84.) e assim B G = G C; e por tanto os angulos B A G, e G A C, que elles medem (*num.* 9.) seráõ iguaes: logo o angulo B A C se acha dividido em dous igualmente pela linha A G; e he o que se queria fazer.



THEOREMA X.

31 O Angulo mixto, formado entre o circulo, e a sua tangente, he menor, que qualquer outro angulo rectilineo. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 16.

Naõ se póde lançar nenhuma linha recta entre o circulo, e a tangente (*liv.* 1. *num.* 106.) logo esse angulo mixto, que alguns chamaõ do contacto, ou da contingencia, naõ se póde dividir por linha, que naõ seja a mesma tangente: logo he o menor de todos os rectilineos, e he chamado impropriamente angulo, pois naõ tem quantidade, nem espaço divisivel.

ADVERTENCIA.

Este angulo da contingencia tem causado grandes disputas entre os Mathematicos, a que deu occasiaõ a definiçaõ menos exacta, que Euclides deu ao angulo, fazendo-o consistir na inclinaçaõ dos lados, que o compoem; porque, se só na inclinaçaõ consistisse a essencia dos angulos, naõ seria o angulo recto, angulo, que he formado de duas perpendiculares: de que se segue ser o angulo essencialmente, o espaço comprehendido entre as linhas, que o formaõ; e para mostrar a inclinaçaõ, produzidas

duzidas se cortaõ, como em seu lugar fica dito.

CAPITULO II.

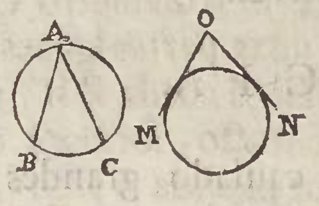
Da comparaçaõ dos angulos, e da sua diferente posiçaõ, a respeito do circulo.

OS arcos dos circulos saõ, como fica dito, a medida dos angulos; e assim em qualquer parte, que se formem se considéra o seu apice no centro de hum circulo; mas nem por isso póde deixar de ter tres diferentes posiçoens, ou no centro do circulo, ou fóra do centro, e na circunferencia, ou fóra da circunferencia; e em todos estes casos, ainda que seja o mesmo angulo, dá lugar a diferentes consideraçoens.

DEFINIC,AM I.

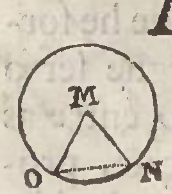
32 O Angulo, cujo vertice se acha na circunferencia do circulo, e os lados dentro do mesmo circulo, se chama angulo da circunferencia.

Euclides chama angulo inscrito ao da circunferencia, como B A C, e angulo circunscrito, o que fica fóra da circunferencia, formado por duas tangentes do mesmo circulo, como M O N.



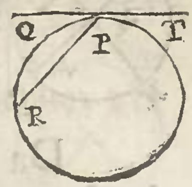
DEFINIC,AM II.

33 ANgulo do centro he aquelle, que tem o apice no centro do circulo; e do qual os lados saõ radios do mesmo circulo, como M N, o apice está em M, centro do circulo.



DEFI-

DEFINIC,AM III.



34 O Segmento de hum circulo he huma parte do mesmo circulo, comprehendida entre huma corda, como PR, que fórma dous segmentos de circulo, hum pequeno, outro grande.

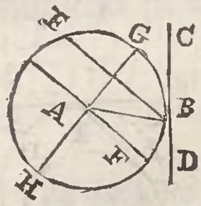
DEFINIC,AM IV.

35 O Angulo formado por huma tangente, e huma corda, ou secante, tirada do ponto do contacto, se chama angulo do segmento, como QPR, ou RPT (*figura idem*)

THEOREMA I.

36 O Angulo do segmento tem por medida metade do arco, que elle comprehende entre a sua corda. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 32.

Seja o angulo CBE formado pela tangente CB, e pela corda BE: devemos mostrar, que este angulo tem por medida metade do arco BE: lance-se o diametro GH cortando o arco, e a corda EB em duas partes iguaes, e lance-se mais o diametro AF paralélo á corda EB; e o radio AB, passando pelo ponto do contacto, formará o angulo do centro GAB, que tem por medida o arco GB: isto supposto, só falta provar, que o angulo CBE lhe he igual; o que he evidente, porque o angulo CBA he recto, como tambem o angulo GAF (*liv.* 1. *num.* 90.) mas o angulo EBA he igual ao angulo BAF, pois que saõ alternos (*num.* 24.) logo tirando esses dous angulos, a saber, FAB de GAF, e ABE do angulo recto ABC, os restos BA



G, CBE ſeraõ iguaes; mas B A G tem por medida o arco BG: logo CBE, que lhe he igual, deve ter por medida hum arco igual a BG, metade de B G E; e he o que ſe queria moſtrar.

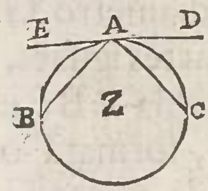
Da meſma ſorte poderemos moſtrar, que o angulo da outra parte DBE tem por ſua medida o arco BH, metade do arco BHE, comprehendido entre a tangente BD, e a corda BE, ajuntando aos angulos rectos DBA, FAH os angulos alternos iguaes EBA, BAF, em lugar, que na precedente demonſtraçaõ ſe diminuiraõ.

THEOREMA II.

37 O Angulo na circunferencia tem por medida metade do arco, ſobre que ſe apóya, ou que o ſubtende.

Seja o angulo B A C na circunferencia: devemos moſtrar, que elle tem por ſua medida metade do arco BC.

Pelo ponto A ſe lance a tangente ED, que formará de novo dous angulos EAB, e DAC, que, pelo theorema a cima, teraõ por medida os arcos AB, e AC;



mas os tres angulos, que ſe formaõ no ponto A, ſaõ iguaes a dous rectos (*num.* 16.) logo tem por medida metade da circunferencia do circulo (*num.* 10.) logo ſendo os arcos A B, e A C as medidas dos angulos BAE, e CAD, metade de BC, ſerá a medida do angulo BAC; e he o que ſequeria moſtrar.

COROLARIO. I.

38 HE evidente, que todos os angulos na circunferencia de hum circulo, que ſe apóyaõ ſobre hum meſmo arco, ſaõ iguaes. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 21.

Moſ-

Moſtra-ſe a evidencia; porque os angulos A B C, e A D C, em qualquer parte da circunferencia A B C D que ſe formem, ſaõ iguaes; porque tem todos por medida metade do arco A C, ſobre que ſe apóyaõ, ou ſubtendem; e as grandezas, que tem iguaes medidas, naõ podem deixar de ſer iguaes.

COROLARIO II.

39 O Angulo do centro he duplo do angulo da circunferencia, ſe ambos ſubtendem o meſmo arco. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 20.

Seja o angulo C A D no centro, e C B D na circunferencia, he claro, que CAD, angulo no centro, tem por medida todo o arco C D, que he dobro de CBD, angulo na circunferencia, que naõ tem mais, que metade do meſmo arco.

COROLARIO III.

40 DEntro de circulos iguaes, os angulos iguaes, ou ſejaõ no centro, ou na circunferencia, ſaõ apoyados ſobre arcos iguaes. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 26.

Demonſtra-ſe; porque os angulos com medidas deſiguaes, ſeriaõ deſiguaes; mas elles ſuppoem-ſe iguaes: logo &c.

COROLARIO IV.

41 DEntro de circulos iguaes, os angulos, ou no centro, ou na circunferencia, que ſaõ apoyados de arcos iguaes, ſaõ iguaes. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 27.

Demonſtra-ſe; porque, ſe elles tem medidas iguaes: logo ſaõ iguaes.

CORO-

COROLARIO. V.

42 O Angulo na circunferencia, dentro do ſemicirculo, e que tem por baze o diametro, he recto. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 31.

Pelo que fica dito, he evidente, pois que o ſubtende metade da circunferencia, que he de 90. gráos, medida do angulo recto (*num.* 10.) logo &c.

COROLARIO VI.

43 O Angulo no mayor ſegmento he agudo. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 31.

O que he evidente, porque eſte angulo he apoyado por hum arco menor, que a ſemicircunferencia; e aſſim metade deſte arco, que he a ſua medida, he menor de 90. gráos: logo he agudo (*num.* 12.) &c.

COROLARIO VII.

44 O Angulo no menor ſegmento he obtuzo. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 31.

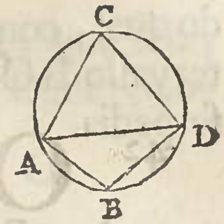
Tambem he evidente; porque eſte angulo ſe apóya ſobre hum arco mayor, que a ſemicircunferencia, cuja metade, que he a ſua medida, comprehende mais de 90. gráos: logo o angulo he obtuzo (*num.* 12.) e he o que ſe queria moſtrar.

COROLARIO VIII.

45 OS angulos na circunferencia, ſendo oppoſtos, e apoyados ſobre os meſmos pontos, ſaõ iguaes a dous rectos.

Sejaõ os angulos ACD, e ABD na circunferencia, ſendo oppoſtos, e apoyados, ou ſubtenſos pelos

meſmos

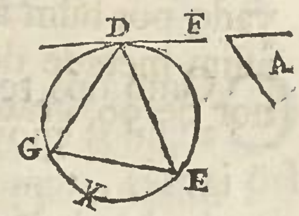


meſmos pontos A, e D: he claro, que elles tem por medida metade dos arcos A B D, A C D (*num.* 37.) e por conſequencia metade de toda a circunferencia, que vale duas vezes 90. gráos: logo eſſes dous angulos em ſoma ſaõ iguaes a dous rectos; e he o que ſe queria moſtrar.

PROBLEMA I.

46 CORtar hum ſegmento de circulo capaz de hum angulo. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 34.

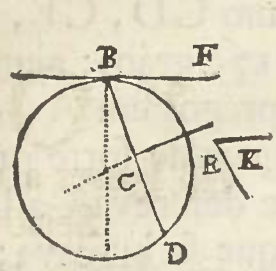
Seja o circulo X do qual ſe quer cortar hum ſegmento capaz de conter o angulo dado A; lance-ſe DF, que toque o circulo X (*liv.* 1. *n.* 109.) e ſobre D F ſe lance a linha D E, que faça com D F hum angulo igual ao angulo A (*num.* 28.) todo o angulo inſcripto dentro do circulo X, e apoyado por D E, tem por ſua medida metade do arco E D (*num.* 37.) mas metade deſſe arco he a medida do angulo E D F igual ao angulo A (*num.* 36.) logo eſtá feito o que ſe propunha.



PROBLEMA II.

47 DEſcrever hum circulo, cujo ſegmento terminado por huma linha dada, ſeja capaz de hum angulo igual a hum angulo dado. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 33.

Sobre a linha B D ſe faça o angulo F B D igual ao angulo dado K (*n.* 28.) e no ponto B ſe levante a perpendicular B C (*liv.* 1. *num.*46.) e no meyo da linha B D ſe levante a perpendicular E C, que cortará B C no ponto C,



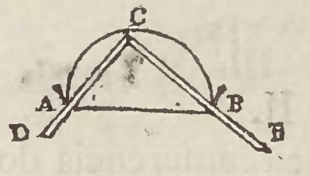
do qual, como centro, se descreva hum circulo com o intervallo BC (*liv.* 1. *num.* 30.) e será feito o circulo, que se pedia.

DEMONSTRAÇAM.

A Linha BF perpendicular sobre o radio BC (*fig. precedente*) toca o circulo (*liv.* 1. *n.* 103.) o angulo FBD tem por sua medida hum arco igual á metade do arco BD (*n.* 36.) todos os angulos inscritos dentro do circulo apoyados sobre BD saõ iguaes, e tem por medida metade do arco BD (*num.* 37.) saõ logo iguaes ao angulo FBD, e por consequencia iguaes ao angulo K, que foy feito igual ao angulo FBD.

ADVERTENCIA.

Como nós temos mostrado (*num.* 38.) que todos os angulos apoyados sobre o mesmo arco de circulo saõ iguaes, temos o meyo para fazer huma porçaõ de circulo de tal numero de gráos, que se quizer, sem compasso, e sem ter o centro do circulo; o que poderá servir de muita utilidade: seja AB a corda de hum arco



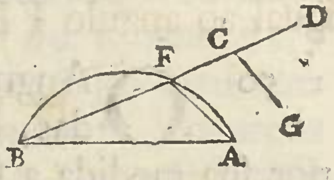
proposto, ou da porçaõ de hum circulo, a qual se deve descrever: se quizermos, por exemplo, que o arco seja de 10. gráos, o angulo inscrito nesse arco terá por sua medida, metade de 350. gráos, ou de 360. gráos, menos 10. a saber, que este angulo será de 175. gráos; isto supposto, disponho duas regoas, como CD, CE, de sorte, que o angulo DCE seja de 175. gráos; ajuntem-se as duas regoas, e se ponhaõ dous pregos em A, e em B, e virando o ponto C das regoas de sorte que CD, e CE razem os pregos A, e B, e descrevaõ a linha circular ACB, que será o arco, que se buscava; por este meyo se póde descrever a porçaõ

çaõ de hum circulo de qualquer grandeza, que ſeja, mas eſta operaçaõ he mecanica, e a que ſe ſegue Geometrica.

PROBLEMA III.

48 DAda a corda de hum ſegmento de circulo, e o angulo deſſe ſegmento achar os pontos, por onde paſſa o arco, ſem conhecer, nem buſcar o centro do circulo, de que o arco he parte.

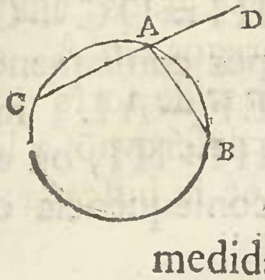
Seja AB a corda dada do ſegmento, que ſe quer deſcrever: lance-ſe a linha BD, que faça qualquer angulo com a linha BA, e ſobre eſta linha ſe tome hum ponto á diſcriçaõ, e ſe faça o angulo GCF, igual ao angulo dado; e pelo ponto A ſe lance huma linha paraléla á linha GC; deſta ſorte o angulo AFB ſerá igual a GCF (*num.* 26.) angulo dado; por tanto o arco propoſto, ſegundo o que fica demonſtrado, paſſa pelo ponto F; e por huma ſemelhante operaçaõ ſe buſquem outros pontos, por onde paſſa o arco, ſem que ſeja neceſſario buſcar o centro do circulo.



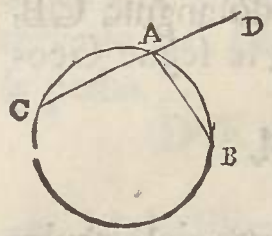
THEOREMA. III.

49 O Angulo, cujo vertice na circunferencia do circulo tem por lados huma corda, e huma ſecante, produzida fóra do circulo, tem por ſua medida metade do arco da corda; e mais metade do arco da ſecãte.

Seja AB huma corda, e CD huma ſecante produzida fóra do circulo, da qual huma parte he tambem a corda CA. Devemos moſtrar, que o angulo BAD formado pela corda AB, e pela ſecante CD, tem por ſua



medida

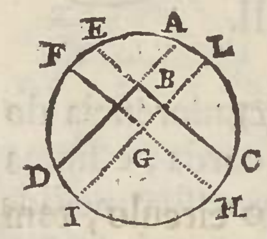


medida metade do arco A B, mais metade do arco B C. Os dous angulos C A B, B A D ſaõ em ſoma iguaes a dous rectos (*num.* 16.) logo tem por ſua medida metade da circunferencia do circulo (*num.* 11.) mas o angulo C A B tem por ſua medida metade do arco C B (*num.* 37.) o angulo B A D reſtante terá logo por ſua medida metade dos arcos reſtantes C A, e A B, que com o arco C B inteiraõ o circulo.

THEOREMA IV.

50 O Angulo formado pela ſecçaõ de duas cordas, que ſe cortaõ dentro do circulo, tem por ſua medida a ſoma das metades dos arcos, que apóyaõ, ou ſubtendem.

Seja B o apice de hum angulo dentro do circulo. Devemos moſtrar, que elle tem por ſua medida metade dos arcos A E, e D C. Se o ponto A foſſe centro do circulo, naõ neceſſitava de mais prova; pois he evidente. Seja pois G o centro, pelo qual ſe lancem parallélas aos lados do angulo C B A; eſte angulo he igual ao angulo I G H (*num.* 26.) cuja medida he o arco H I: falta ſó moſtrar, que o arco H I he metade dos arcos D C, e A E.



Os arcos H I, e F L ſaõ iguaes (*numero* 20.) $DI = AL$, e $CH = EF$ (*num.* 40.) mas $HI = AE + AC + EF$, como tambem $HI = DC - CH$, a ſaber, $HI = DC - EF - AL$: e por conſequencia $HI + HI = AE + AL + EF + CD - EF - AL$; mas $+ AL + EF - AL - EF = 0$: logo $HI + HI$, ou em ſegundo lugar, $HI = AE + DC$: por conſequencia o arco H I he tambem metade dos arcos

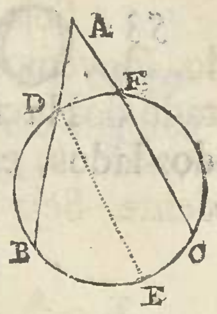
D C,

D C, e A E, que tambem ſaõ metade do angulo C B D = I G H, cujo arco H I he ſua medida.

THEOREMA V.

51 O Angulo, cujo vertice ſe acha fóra do circulo, mas os lados cortaõ a ſua circunferencia convexa, e ſe apóyaõ na concava, tem por medida metade do arco concavo, menos metade do arco convexo.

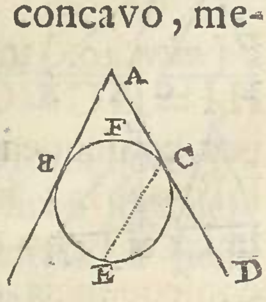
Seja o angulo B A C : digo, que tem por medida metade do arco B C menos metade do arco B E: pelo ponto D lanço a paraléla D E (*liv.* 1. *num.* 71.) e aſſim o angulo B A C = B D E (*num.* 26.) o qual tem por ſua medida metade do arco B E (*num.* 37.) os arcos C E, e D F ſaõ iguaes (*liv.* 1. *num.* 85.) mas B E = B C – C E: logo B E = B C – D F: logo metade do arco B E he igual a metade do arco B C – D F; e aſſim, pois que o angulo B A C tem por medida metade de B E, elle tem por medida metade do arco concavo B C, ſobre o qual ſe apóya, menos metade do arco convexo D F; e he o que ſe queria moſtrar.

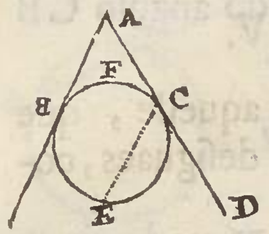


THEOREMA VI.

52 O Angulo, cujos lados tocaõ o circulo, tem por medida metade do arco concavo, menos metade do arco convexo.

Seja o angulo B A C, cujos lados A B, A C tocaõ o circulo. Devemos moſtrar, que eſte angulo tem por medida metade de B C, menos metade de B E C. Lance-ſe do ponto C (tambem





podia ſer de B) a paraléla C E (*liv.* 1. *num.* 71.) o angulo B A C he igual ao angulo D C E (*num.* 26.) mas D C E tem por medida metade do arco C E (*num.* 36.) que o he tambem de CAB: falta ſó moſtrar, que o arco $BEC - BFC = CE$. Em primeiro lugar, o arco $BEC - BE$ he igual ao arco E C. Em ſegundo lugar, pois que o arco $BC = BE$ (*liv.* 1. *num.* 26.) logo $BEC - BFC = EC$; e he o que ſe queria moſtrar.

CAPITULO III.

Dos triangulos.

DEFINIC, AM I.

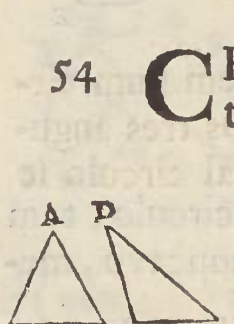
53 O Triangulo he huma figura de tres angulos, terminada por tres lados.

Ha ſeis eſpecies de triangulos, tres a reſpeito dos lados, e tres a reſpeito dos angulos.

DEFINIC, AM II.

54 CHama-ſe triangulo equilatero aquelle, que tem tres lados iguaes como ABC.

DEFINIC, AM III.



55 CHama-ſe triangulo iſoſceles aquelle, que tem dous lados iguaes, como H G I.

DEFI-

DEFINIC, AM IV.

56 CHama-se triangulo escaleno aquelle, que tem todos os seus tres lados desiguaes, como DEF.

DEFINIC, AM. V.

57 CHama-se triangulo rectangulo aquelle, que tem hum angulo recto, como LKM.

DEFINIC, AM VI.

58 CHama-se triangulo obtuzangulo, ou ambligonio aquelle, que tem hum angulo obtuzo, como DEF.

DEFINIC, AM VII.

59 CHama-se triangulo acutangulo, ou oxigonio aquelle, que tem todos os tres angulos agudos, ou menores que rectos, como ABC.

DEFINIC, AM VIII.

60 HUm triangulo se diz inscrito em hum circulo, quando os apices dos seus tres angulos estaõ dentro da sua circunferencia, e o tal circulo se diz circunscrito ao mesmo triangulo.

DEFINIC, AM IX.

61 HUm triangulo se diz circunscrito a hum circulo, quando os seus angulos ficaõ fóra delle, e os seus tres lados tocaõ a circunferencia, e nesse caso o circulo se diz inscrito no triangulo.

DEFI-

DEFINIC,AM X.

62 DOus triangulos ſe dizem equiangulos, quando os angulos de hum ſaõ iguaes aos angulos do outro, cada hum ao ſeu.

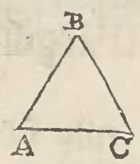
DEFINIC,AM XI.

63 DOus triangulos ſaõ inteiramente iguaes, quando, ſendo equiangulos os lados, que comprehendem os angulos de hum, ſaõ iguaes aos lados, que comprehendem os angulos do outro, cada hum ao ſeu.

THEOREMA I.

64 EM qualquer triangulo quaeſquer de ſeus lados ſaõ em ſoma mayores, que o terceiro. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 20.

Os dous lados A B * B C ſaõ mayores, que o lado A C, o que he evidente; porque entre A C naõ ſe póde perceber nenhuma linha mais curta, que a meſma recta A C (*liv.* 1. *num.* 12.) e he o que ſe queria demonſtrar.



COROLARIO.

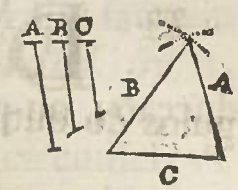
65 NAõ ſe póde fazer hum triangulo de tres linhas dadas, ſe quaeſquer duas, naõ forem mayores em ſoma, que a terceira. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 22. fica demonſtrado.

PROBLEMA I.

66 DAdas tres linhas formar hum triangulo.

Sejaõ as tres linhas dadas A, B, C; do

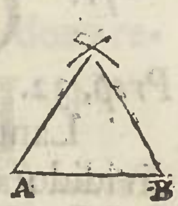
do extremo de huma deſſas linhas, como de C, ſe deſcreva hum arco com o intervalo de A, e do outro extremo ſe deſcreva outro arco com o intervalo de B, e lançando as duas linhas dos extremos de C, ao ponto da ſecçaõ dos arcos, ſerá feito o triangulo, como ſe pedia; e ſe prova; porque as ſuas tres linhas ſaõ pela conſtrucçaõ iguaes às tres linhas dadas.



PROBLEMA II.

67. SObre huma linha dada deſcrever hum triangulo equilatero. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 1.

Seja a linha dada A B; dos ſeus extremos, e com o ſeu meſmo intervalo ſe deſcrevaõ dous arcos, e lançando duas linhas ao ponto da ſecçaõ dos arcos ſerá feito o triangulo equilatero, como ſe pedia.



PROBLEMA III.

68. CIrcunſcrever hum circulo a hum triangulo dado. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 5.

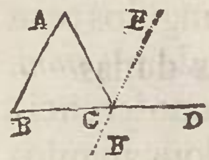
Eſte problema ſe executa da meſma ſórte, que fica moſtrado (*liv.* 1. *num.* 86.) que he fazer paſſar hum circulo por tres pontos dados.

COROLARIO.

69. HE evidente, que para achar hum ponto entre tres pontos dados he o meſmo, que buſcar o centro de hum circulo, que paſſe por eſſes tres pontos, e eſſe ſerà o ponto buſcado.

DEFINIÇAM XII.

70. EM qualquer triangulo ſe chama angulo exterior aquelle, que he formado pela producçaõ, ou prolongamento de hum de ſeus lados.



Como no triangulo B A C, prolongando B C para D, o angulo A C D he chamado exterior, conſiderado, como oppoſto aos dous angulos interiores C A B, e A B C.

THEOREMA II.

71. O Angulo exterior de hum triangulo he igual aos dous interiores oppoſtos. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 32.

Lance-ſe a linha C E paralèlla a A B, e aſſim fica dividido o angulo exterior A C D em dous angulos A C E, E C D, que devemos moſtrar iguaes aos dous interiores oppoſtos; o que he evidente; porque A B C ≍ E C D (*num.* 26.) e B A C ≍ A C E (*num.* 24.) e he o que ſe queria moſtrar.

COROLARIO.

72. O Angulo exterior de qualquer triangulo he mayor, que qualquer dos interiores oppoſtos. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 16.

Pela precedente ſe ſegue com evidencia, que, pois que o angulo exterior he igual aos dous internos oppoſtos, logo he mayor, que qualquer delles.

THEO-

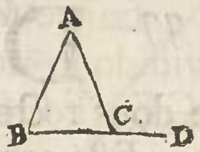
THEOREMA III.

73. OS tres angulos de hum triangulo saõ em soma iguaes a dous rectos. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 32.

Para demonstrar esta proposiçaõ se circunscreva hum circulo ao triangulo (*n.* 70.) os seus tres angulos tem por medida metade dos arcos, que os subtendem (*num.* 37.) logo tem por medida metade da circunferencia do circulo, a saber, 180. gràos, valor de dous angulos rectos (*num.* 11.) e he o que se queria mostrar.

OUTRA DEMONSTRAC,AM.

OS dous angulos ACB, e ACD valem dous rectos (*num.* 16.) mas ACD, angulo exterior he igual aos dous interiores oppostos ABC, e CAB (*n.* 73.) logo esses dous angulos com o terceiro ACB saõ iguaes a dous rectos.



COROLARIO I.

74. COnhecido o valor de dous angulos de hum triangulo fica conhecido o valor do terceiro.

Se, por exemplo, dous angulos de hum triangulo valem entre ambos 150. gràos : logo o terceiro vale 30. gràos, com que se inteiraõ 180. valor de dous angulos rectos.

COROLARIO II.

75. OS tres angulos de hum triangulo pódem ser todos agudos. A razaõ ; porque podemos repartir 180. gràos em tres partes, que cada huma valha

valha menos de 90, e se for em tres partes iguaes formarão os angulos hum triangulo equilatero, cada hum de 60. grãos, que inteirão 180. grãos, ou 2. angulos rectos.

COROLARIO III.

76. EM hum triangulo não póde haver mais, que hum angulo recto, nem àfortiori mais, que hum obtuzo, ou mayor, que recto.

Se dous angulos de hum triangulo fossem rectos, os tres juntos valerião mais, que dous rectos, contra o que fica mostrado, e tanta, ou mayor implicancia, se tivesse dous angulos obtuzos.

COROLARIO IV.

77. DOus angulos de qualquer triangulo devem ser necessariamente agudos, ou menores de dous rectos. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 17.

Este corolario he evidente; pois que nenhum triangulo póde ter dous angulos, que sejão ambos rectos, ou ambos obtuzos.

COROLARIO V.

78. SE dous angulos de hum triangulo são iguaes a dous angulos de outro, serão equiangulos, a saber, que o terceiro angulo de hum, he igual ao terceiro angulo do outro.

Os tres angulos de qualquer triangulo são iguaes a dous rectos; e assim, pois que os dous triangulos iguaes tirando-lhe partes iguaes, deixárão iguaes os restos, e assim depois de ter tirado de cada triangulo os dous primeiros angulos de hum, iguaes aos dous angulos primeiros do outro, os restos em cada hum dos triangulos são inteiramente iguaes.

CORO-

COROLARIO VI.

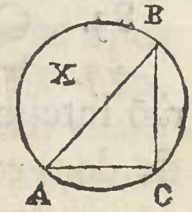
79. SE hum triangulo tiver hum de ſeus angulos mayor, que o mayor de outro triangulo os dous outros angulos em ſoma ſeraõ menores, que os dous do primeiro.

Porque tirando do valor de dous rectos huma parte mayor, o que reſta deve ſer menor.

THEOREMA IV.

80. O Triangulo eſcaleno tem os ſeus tres angulos deſiguaes.

Seja ABC hum triangulo eſcaleno: circunſcreva-ſe-lhe o circulo X (*num.* 68.) pois que os tres lados AB, AC, BC ſaõ deſiguaes (*liv.* 1. *num.* 32.) logo os tres angulos do triangulo ABC, que ſaõ medidos por arcos deſiguaes, (*num.* 39.) ſaõ tambem deſiguaes.



THEOREMA V.

81 EM hum triangulo iſoſceles os angulos ſobre a baze ſaõ iguaes, e ſe os angulos ſobre a baze ſaõ iguaes, o triangulo he iſoſceles. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 5.

Seja ABC hum triangulo iſoſceles, e ſe lhe circunſcreva o circulo X; pois que AB = AC: logo tambem os arcos, que os ſubtendem ſaõ iguaes; mas metade deſſes arcos ſaõ a medida dos angulos ABC, e ACB (*num.* 39.) logo eſſes angulos ſobre a baze ſaõ iguaes.

A ſegunda parte ainda he mais facil, porque, ſe os angulos ABC, e ACB ſaõ iguaes tambem os arcos AB, e A C ſaõ iguaes: logo tambem ſaõ iguaes as ſuas cordas; e aſſim he o triangulo iſoſceles.

COROLARIO I.

82. NEnhum dos angulos da baze de hum triangulo iſoſceles póde ſer recto, nem obtuzo.

Se hum dos angulos foſſe recto, o outro o havia de ſer tambem; e aſſim os tres angulos valeriaõ mais, que dous rectos; o que he impoſſivel. (*num.* 73.) Da meſma ſórte ſe moſtra, que naõ póde ter dous angulos obtuzos; porque ainda he mais impoſſivel.

COROLARIO II.

83. SE dous triangulos iſoſceles tiverem igual o angulo do vertice, ou iguaes os da baze, ſeràõ inteiramente iguaes.

THEOREMA VI.

84. OS tres angulos de hum triangulo equilatero, ſaõ iguaes.

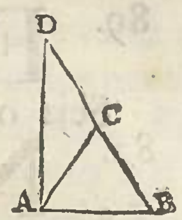
Se ſe circunſcrever hum circulo ao triangulo equilateral, os arcos, de que os ſeus lados ſaõ cordas, ſeràõ por conſequencia iguaes *liv.* 1. *num.* 31.) e tambem as ſuas metades; mas eſſas metades ſaõ medida dos angulos do triangulo (*num.* 39.) logo todos os angulos ſaõ iguaes.

COROLARIO.

85. SEgue-ſe, que cada hum dos tres angulos do triangulo equilatero he agudo, e ſempre de 60. gràos.

86. Deſ-

86. DEste corolario se tira o meyo de levantar huma perpendicular do extremo de huma linha dada, e ainda de qualquer outro ponto notado nella. Suponhamos a linha AB, e o ponto dado A: sobre a linha faço o triangulo equilatero ABC, e produzo hum dos seus lados, como BC para D, de sórte, que CD = BC, e lanço a linha AD, que serà perpendicular, se o angulo BAD for recto; o que se prova; porque o angulo ACB he de 60 ∗ 30, ou de 90. gráos.



THEOREMA VII.

87. EM hum triangulo o mayor lado subtende o mayor angulo, e o mayor angulo he apoyado por hum mayor lado. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 18. *e* 19.

Circunscreva-se hum circulo á roda de hum triangulo; he evidente, que o mayor lado desse triangulo subtende o mayor arco (*liv.* 1. *num.* 32.) mas metade desse arco he medida do angulo opposto a esse mayor lado (*num.* 39.) logo esse angulo, que he medido pela metade desse mayor arco, he mayor. Em hum triangulo inscrito em hum circulo, o mayor angulo he medido por metade do mayor arco; mas esse mayor arco tem a mayor corda. (*liv.* 1. *num.* 32.) logo, &c.

THEOREMA VIII.

88. EM qualquer triangulo, se dous de seus angulos saõ iguaes, os lados oppostos a esses angulos saõ tambem iguaes. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 6.

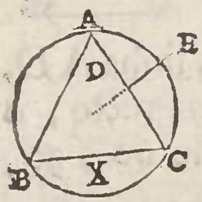
Circunscreva-se hum circulo a esse triangulo, esses angulos iguaes seráõ apoyados sobre arcos iguaes, e tem iguaes cordas os lados oppostos a esses angulos, como he evidente.

THEO-

THEOREMA IX.

89. **E**M qualquer triangulo metade de cada lado he seno do angulo opposto.

Seja o triangulo ABC inscrito no circulo X: devemos mostrar, que AD, metade de AC he seno do angulo ABC. O arco AE metade do arco AC, he medida do angulo ABC (*num.* 39.) e assim o arco AC he duplo do arco, que he a medida do angulo ABC: logo AD, metade da corda do arco AC, he o seno do arco AE (*num.* 22. *e* 23.) e do angulo ABC opposto.



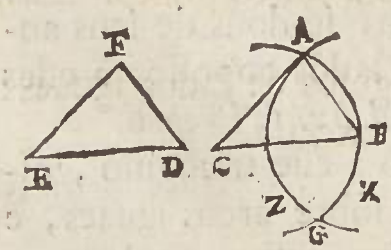
Da mesma sórte mostraremos, que metade de BA he seno do angulo BAC, e que metade de CB será seno do arco BAC.

Deve-se advertir, que o seno de hum angulo he para o lado opposto, como o seno do outro angulo para o seu lado opposto, ou os senos dos angulos saõ entre si, como os seus lados oppostos; porque as metades saõ como os seus todos.

THEOREMA X.

90. **D**Ous triangulos, que tem iguaes os lados saõ equiangulos, e inteiramente iguaes.

Sejaõ os dous triangulos ABC, DEF com lados iguaes, digo, que saõ equiangulos, e inteiramente iguaes, ou que sobrepostos se ajustaráõ sem falta, nem excesso. Em primeiro lugar BC, sendo igual a DE, está claro, que a linha DE sobreposta a BC se ajustará perfeitamente; se negarem, que DF senaõ ajusta com AB, nem FE



F E com A C, moſtraremos o contrario, deſcrevendo de B, como centro, e com o intervallo A B, ou D F, linhas iguaes o circulo Z; e de C, com o intervallo A C, ou E F, que ſaõ iguaes, o circulo X; eſſes circulos neceſſariamente ſe cortaõ no ponto A, e no ponto G. Em ſegundo lugar. He evidente, que D ſobrepoſto a B o ponto F ſe acharà neceſſariamente ſobre o circulo Z, e que he ſobrepoſto a C, o ponto F ſe acharà dentro do circulo X, o ponto F ſe virá a achar dentro de Z, e de X, e por conſequencia no ponto A, em que eſſes dous circulos ſe cortaõ: logo eſſes dous triangulos ſobrepoſtos hum ao outro, ſe ajuſtaráõ, e ſeràõ iguaes; e he o que ſe queria provar.

Poderá alguem dizer, que os dous circulos Z, e X ſe poderàõ cortar fóra do ponto A: aſſim he; mas fica demonſtrado, que ſe naõ pódem cortar mais, que em dous pontos (*liv.* 1. *num.* 88.) e eſſe ſegundo ponto deve neceſſariamente eſtar por baixo de B C, a ſaber, no ponto G, como he evidente; porque, ſe ſe cortaſſem por cima de B C em outro ponto, que naõ foſſe A, elles ſe cortariaõ em tres pontos; o que he impoſſivel. (*liv.* 1. *n.* 38.)

COROLARIO I.

91. SE dos extremos de huma linha recta ſe lançarem duas linhas rectas, que ſe encontrem em hum ponto, dos meſmos extremos ſe naõ poderáõ lançar outras duas, para a meſma parte, iguaes às duas primeiras, e que ſe encontrem em outro ponto. *Eucl. liv.* 1. *Prop.* 7

Eſſas linhas fariaõ dous triangulos de lados iguaes: logo ſe ajuſtariaõ ſem falta, nem exceſſo.

COROLARIO. II.

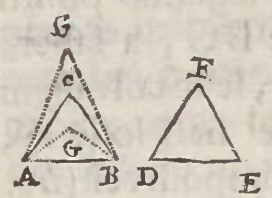
92. DOus triangulos, que tem cada hum dous lados iguaes aos dous lados do outro, e a baze igual à baze, os angulos comprehendidos entre os lados iguaes saõ iguaes. *Euclid. liv.* 1.*Prop.* 8.

Este corolario he evidente; porque esses dous triangulos sendo iguaes os lados, saõ equiangulos, e inteiramente iguaes.

THEOREMA. XI.

93. DOus triangulos equiangulos, que tem hum lado igual, saõ inteiramente iguaes.

ABC, e DEF saõ equiangulos, e AB = DE, digo, que saõ inteiramente iguaes; porque sobrepostos hum ao outro, DE sobre AB devem ajustarse; pois que saõ duas linhas iguaes; mas, se DF naõ convem com AC, senaõ, por exemplo, com AG, como os angulos FDE, e CAB saõ iguaes, seguirse-ha, que o angulo CAB = GAB, e serà pois o mesmo, que FDE, o que naõ he possivel: logo DF se ajustará com o lado AC; e pela mesma razaõ FE com BC, e o ponto F com o ponto C, e por consequencia os dous triangulos saõ em tudo iguaes.



COROLARIO.

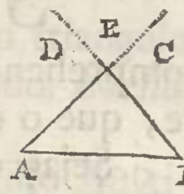
94. DOus triangulos, que tem dous angulos iguaes, e hum lado igual, saõ inteiramente iguaes. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 26.

Dous triangulos, que tem dous angulos iguaes, saõ inteiramente equiangulos (*num.* 78.) por conseguinte te ſe elles tem hum lado igual, ſegundo o theorema, ſaõ inteiramente iguaes.

PROBLEMA IV.

95. FAzer hum triangulo ſobre huma linha dada, ou lado; e dous angulos ſobre eſſe lado.

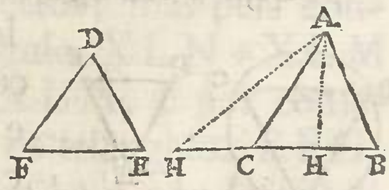
Seja o lado, AB, o angulo no ponto A, ſeja chamado X, e ſobre o extremo B, ſeja o angulo chamado Z: levante-ſe ſobre o ponto A a linha AC, que faça ſobre ella o angulo CAB igual ao angulo X, (*num.* 28.) e ſobre B a linha BD, que faça o angulo ABD $\rightleftharpoons$ Z; eſſas linhas ſe cortaráõ, ſe X, e Z naõ forem dous angulos rectos, ou em ſoma mayores, que dous rectos; porque, ſe o foſſem, ſeria o problema impoſſivel (*num.* 77.) porque, ſendo os angulos rectos, ſeriaõ paralélas, e ſendo mayores, que rectos ſe deſviariaõ mais hum do outro: logo ſeràõ iguaes os angulos, tendo hum lado igual, pelo corolario precedente.



THEOREMA XII.

96. SE dous triangulos tiverem hum angulo igual, e iguaes os dous lados, que o comprehendem, ſeráõ os dous triangulos iguaes em tudo. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 4.

Seja o angulo BAC $\rightleftharpoons$ EDF, e AB $\rightleftharpoons$ DE: digo, que eſſes dous triangulos ſobrepoſtos ſe ajuſtaráõ; porque DE ſe ajuſtará com AB; mas, ſe diſſerem, que DF, ſe naõ ajuſta com AC, mas com AH, o angulo BAC ſeria igual ao angulo BAH; o que naõ he poſſivel; e aſſim DF ſe ajuſtará com AC, e o

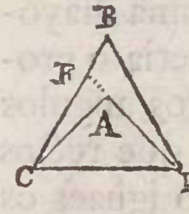


e o ponto F com o ponto C, e por conſequencia BC = EF: logo eſſes dous triangulos ſaõ equiangulos, e tem os ſeus lados iguaes (*num.* 90.) logo ſaõ inteiramente iguaes; e o meſmo ſe moſtraria, ſe diſſeſſem, que a linha AH ſeria o lado.

THEOREMA XIII.

97. SE dous triangulos tiverem huma meſma baze, o angulo do vertice daquelle, que for comprehendido, ſerá mayor, que o do angulo do vertice, que o comprehende. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 21.

Sejaõ os dous triangulos CAD, e CBD, que tem a meſma baze CD: CAD he cõprehendido dentro de CBD: devemos moſtrar, A > B.

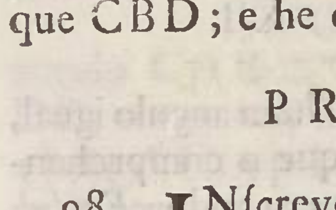


Produza-ſe DA atè F; o angulo exterior CAD he igual aos oppoſtos interiores AFC, e FCA (*num.* 71.) e aſſim he mayor, que cada hum dos dous; pela meſma razaõ CFD = FDB + DBF; e aſſim o triangulo CAD he menor, que CFD, e eſte ainda menor, que CBD; e he o que ſe queria moſtrar.

PROBLEMA V.

98. INſcrever dentro de hum circulo hum triangulo equiangulo a outro triangulo dado. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 2.

Seja o triangulo dado FED: inſcreva-ſe no circulo BAC; para cujo effeito ſe lance a tangente GH (*liv.* 1. *num.* 109.) e faça-ſe o angulo GAB = FDE, e CAH = DFE (*num.* 28.) e lance-ſe a linha BC.

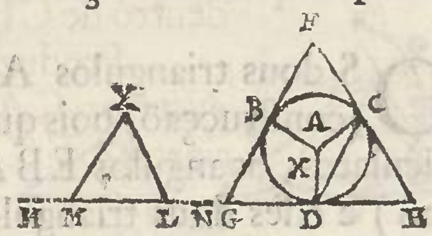


Pois que o angulo BAG, de que he medida metade de do arco B A he igual a F D E : logo B C A = F D E ; pela mesma razaõ C A H = D F E, tendo por sua medida metade do arco A C, que tambem he medida de C B A : logo C B A, e D F E saõ iguaes, e os dous triangulos A B C, e E F D, tendo os dous angulos iguaes, saõ equiangulos (*num.* 78.) e será feito o que se pedia.

PROBLEMA VI.

99 Circunscrever hum circulo a hum triangulo equiangulo a outro triangulo dado. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 3.

Seja o triangulo dado X L M, e o circulo X: tire-se no circulo o radio A D, e faça-se de huma parte o angulo B A D = X L N, e da outra D A C = X M H (*num.* 28.) e pelos tres pontos B, D, e C, se lancem as tangentes E G, F G, e E F, (*num.* 109. *liv.* 1.) e o triangulo E F G será equiangulo á L X M.



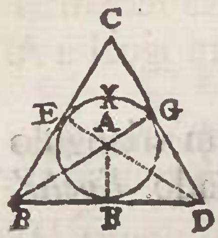
DEMONSTRACAM.

Os seis angulos dos dous triangulos B A D, C A D valem quatro angulos rectos (*num.* 73.) A B, e A D saõ perpendiculares, A C D + A D C valem hum angulo recto; D B A + B D A velem tambem hum recto: logo B A D + C A D valem dous rectos; mas pela construcçaõ B A D = X L N, este angulo X L N + X L M valem dous rectos: logo B A D = X L M, e por consequencia E F G = L X M; e assim os triangulos E F G, e L X M saõ equiangulos (*n.* 29.) e he o que se queria fazer, e demonstrar.

PROBLEMA VII.

100 INſcrever hum circulo dentro de hum triangulo. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 4.

Dividaõ-ſe pelo meyo os angulos CBD, e CDB pelas linhas BA, e DA, como enſinamos (*num.* 30.) e do ponto A, onde eſſas linhas ſe cortaõ, ſe lancem as perpendiculares AE, AF, AG; ſobre os lados do triangulo (*liv.* 1. *num.* 40.) e com o intervallo de A, para E, ou para F, ou para G, ſe deſcreva o circulo X, que ſerá o pedido.



DEMONSTRAC,AM.

OS dous triangulos AEB, AFB ſaõ rectangulos (conſtrucçaõ) pois que AE, AF foraõ feitas perpendiculares, os angulos EBA, ABF ſaõ iguaes (conſtrucçaõ) e eſſes dous triangulos, tendo dous angulos iguaes, ſaõ equiangulos (*n.* 78.) pois tem o lado AB commum: logo ſaõ inteiramente iguaes (*num.* 94.) e aſſim AE = AF; da meſma ſorte ſe moſtrará, que AG = AF, e AE; e he o que ſe queria demonſtrar.

THEOREMA XIV.

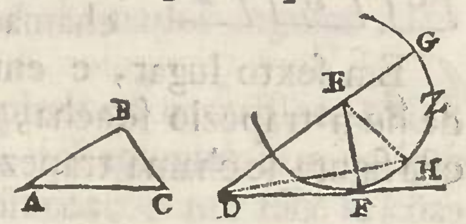
101 DOus triangulos, que tem dous lados iguaes a dous lados, cada hum ao ſeu, os quaes comprehendem angulos iguaes; o q̃ tiver mayor angulo terá mayor baze; e o que tiver menor angulo terá menor baze. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 24. *e* 25.

Sejaõ os dous triangulos ABC, e DEF; ſe AB = DE, e BC = EF, e o angulo B > E, digo, que a baze AC > DF.

DEMONSTRAÇAM.

SE considerarmos, em primeiro lugar, que o triangulo ABC se sobrepoem ao triangulo DEF de sorte, que os pontos A, e B se ajustem com D, e E, como o angulo ABC foy supposto mayor, que o angulo DEF, o lado BC senaõ ajustará com o lado EF, mas será mais perto de EG, como EH, e a linha DH será igual a AC (*num.* 96.)

Considerando pois a linha EF = EH, como movendo-se circularmente sobre E, extremo de DE, e aproximando-se pela outra extremidade EG ao ponto H, a linha DH, que ajunta as outras extremidades será mayor, que DF; e he a primeira cousa, que se queria demonstrar. Em segundo lugar, mostraremos da mesma sorte a inversa, se suppozermos a linha AC, ou DH > DF, que o angulo DEH = ABC será mayor, que DEF, se considerarmos, que EH, movendo-se, se chega mais a EG, que a EF, suppondo moverse sobre o ponto E do modo, que fica explicado.



CAPITULO IV.

Das figuras de muytos lados.

DEFINIÇAM I.

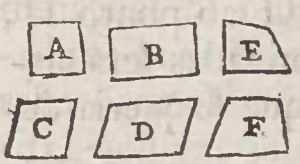
102 AS figuras quadrilateras, ou de 4 lados tem diferentes nomes; porque, se os lados oppostos saõ paralélos, chama-se paralélogramo.

II. Se os quatro lados saõ iguaes, e os angulos rectos, angulos rectos, chama-ſe quadrado, como A.

Em ſegundo lugar, ſe os quatro lados ſaõ iguaes, e os angulos oppoſtos tambem iguaes, mas eſtes naõ ſaõ rectos, chama-ſe rombo, como C.

Em terceiro lugar, ſe todos os lados naõ forem iguaes, mas ſó iguaes os oppoſtos, e todos os angulos rectos, he hum rectangulo, a que tambem muitos daõ o nome de quadrado longo, ou paralélo gramo rectangulo, como B.

Em quatro lugar, ſendo ſómente os lados oppoſtos iguaes, e iguaes tambem os angulos oppoſtos, mas naõ rectos, eſta figura ſe chama rhomboyde, como D.



Em quinto lugar, ſe todos os quatro lados naõ ſaõ, nem iguaes, nem paralélos, como tambem os angulos, ſe chama trapezio, como E.

Em ſexto lugar, e entre os quatro lados deſiguaes de hum trapezio ſe acha, que dous delles ſaõ paralélos, eſta figura ſe chama trapezoyde.

DEFINIÇAM II.

103 HUma figura ſe diz regular, quando todos os ſeus lados, e todos os ſeus angulos ſaõ iguaes.

DEFINIÇAM III.

104 HUma figura de muitos lados ſe chama geralmente Poligono, tomando o nome do numero dos lados, ou dos angulos; e aſſim, ſendo de cinco lados, ſe chama Pentagono, de 6 Exagono, de 7 Eptagono, de 8 Octogno, de 9 Enneagono, de 10 Decagono de 11 Undecagono, e de 12 Dodecagono; e deſte numero para diante ſe diz geralmente figura de tantos lados.

DEFI-

DEFINIÇAM IV.

105 HUma figura regular ſe diz inſcrita dentro de hum circulo, quando todos os ſeus angulos tocaõ á ſua circunferencia concava, e ſe diz circunſcrita, quando todos os ſeus lados tocaõ a circunferencia convexa.

DEFINIÇAM V.

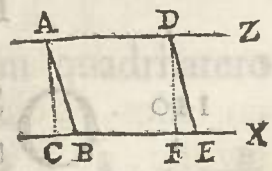
106 SE dos extremos do lado de huma figura regular inſcrita em hum circulo ſe lançarem duas linhas ao centro, o angulo, que ellas formaõ ſe chama angulo do centro, e os angulos, que formaõ eſſes lados, tomados dous a dous, ſaõ chamados angulos da figura.

Os primeiros tem os apices no centro; e por iſſo ſe dizem angulos do centro; e os ſegundos tem os ſeus apices na circunferencia do circulo; e por iſſo ſe chamaõ angulos da figura regular, formados pelos ſeus lados.

LEMMA I.

107 DUas linhas obliquas, que formaõ angulos iguaes entre as meſmas paralélas ſaõ iguaes.

Entre as paralélas X, e Z ſe lancem as perpendiculares AC, e DF: digo, que ſaõ iguaes (*liv.* I. *numero.* 64.) mas os angulos ACB, e DFE ſaõ rectos, e os angulos ABC, e DEF, iguaes pela hypotezi: logo os dous triangulos ABC, e DEF ſaõ equiangulos (*n.* 78.) e aſſim AC = DF, e ſeraõ todos iguaes (*num.* 94.) e por tanto AB = DE, e he o que ſe queria moſtrar.



LEMMA II.

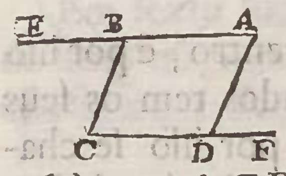
108 DUas linhas, que ſobre huma terceira formaõ os meſmos angulos, ſaõ paralélas.

As linhas A B, e D E fazem ſobre Z, e X os meſmos angulos; e aſſim ABC = DEF : logo A B, e DE ſaõ paralélas (*num.* 27.) *figura idem.*

LEMMA III.

109 DUas linhas, que ajuntaõ duas linhas iguaes, e paralélas, ſaõ iguaes. *Euclid. livro* 1. *Prop.* 33.

Se A D, e B E ajuntarem as duas linhas A B, e D E iguaes, e paralélas : digo, que ellas ſeraõ iguaes;



porque as perpendiculares A C, e D F ſaõ paralélas (*liv.* 1. *num.* 67.) e A B, e D E ſendo paralélas, os angulos ABC, e D E F ſaõ iguaes (*num.* 26.) mas ACB, e DFE ſaõ rectos : logo ſaõ os dous triangulos ABC, e DEF equiangulos, por terem hum lado igual; pois que AB = DF, ſaõ inteiramente iguaes (*num.* 93.) por tanto BC = EF : logo CF = BE; mas AD, e CF ſaõ entre as paralélas A C, e D F, e por tanto iguaes (*liv.* 1. *num.* 64.) logo BE = CF = AD; e aſſim tambem BE = AD; o que ſe queria moſtrar.

THEOREMA I.

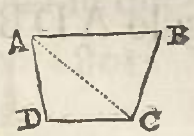
110 OS quatro angulos de qualquer quadrilatero ſaõ iguaes a quatro rectos.

Seja o quadrilatero ABCD. Devemos provar, que os quatro angulos valem quatro angulos rectos.

Lance-ſe a linha A C de hum angulo a outro oppoſto, e ficará a figura dividida em dous triangulos A

BC,

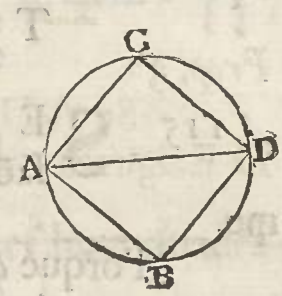
B C, e A C D; mas os angulos de cada hum valem dous rectos (*num.* 73.) logo os quatro angulos de qualquer quadrilatero valem quatro rectos; e he o que se queria demonstrar.



THEOREMA II.

111 OS angulos oppostos de hum quadrilatero inscrito em hum circulo valem dous angulos rectos. *Euclid. liv.* 3. *Prop.* 22.

O quadrilatero A B C D inscrito em hum circulo tem os angulos oppostos ACD, e A B D, que tem por medida metade do arco, sobre que se apóya (*num.* 39.) mas elles se apóyaõ todos na circunferencia: logo valem dous rectos (*n.* 47.) e o mesmo se demostra, para os outros dous angulos B A C, e B D C, &c.



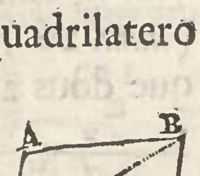
COROLARIO.

112 SE os dous angulos oppostos de hum quadrilatero naõ valerem justamente dous rectos, naõ se poderáõ inscrever em hum circulo, como he evidente, pelo que fica mostrado.

THEOREMA III.

113 SE os lados oppostos de hum quadrilatero forem iguaes seraõ paralélos.

Seja A B = C D, e B C = A D; o lado B D he commum: logo esses dous triangulos A B D, e B C D saõ iguaes, e equiangulos (*num.* 92.) logo o angulo A B D = B D C; por tanto A B he paraléla a C B (*num.* 25.) da



da mesma sorte BC será paralélo a AD; pois que o angulo ADB he igual ao angulo DBC.

THEOREMA IV.

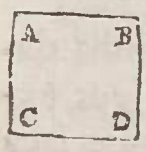
114 SE dous lados oppostos de hum quadrilatero forem iguaes, e paralélos, os outros dous lados seraõ tambem iguaes, e paralélos. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 33.

Os lados saõ iguaes (*num.* 109.) logo saõ iguaes, e paralélos.

THEOREMA V.

115 SE os quatro angulos de hum quadrilatero saõ rectos, a figura he hum paralélogramo.

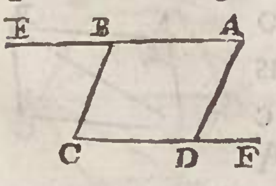
Porque AB, e CD, pela hypotezi, saõ perpendiculares sobre AC; e assim (*liv.* 1. *num.* 67.) saõ paralélos. AC, e BD saõ tambem perpendiculares sobre DC: logo saõ as linhas paralélas, e a figura paralélogramo.



THEOREMA VI.

116 OS angulos oppostos de hum paralélogramo saõ iguaes, e quaesquer dous proximos valem dous rectos.

Em primeiro lugar, o angulo FDA = DCB (*num.* 26.) e FDA = DAB (*num.* 24.) e assim, pois que dous angulos iguaes a hum terceiro saõ iguaes, DAB = BCD; mas FDA + ADC valem dous rectos (*num.* 16.) logo BCD = ADF vale com ADC dous rectos.



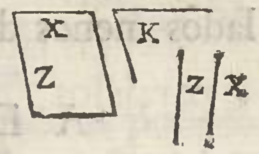
Em segundo lugar, da mesma sorte se mostra, que

que os dous angulos oppostos A B C, e ADC saõ iguaes, e que B A D ✻ A B C valem dous rectos; o que se queria mostrar.

PROBLEMA I.

117. FAzer hum paralélogramo, dado hum angulo, e dous lados, que o comprehendem.

Os lados dados saõ X, e Z, e o angulo dado K. Deve-se ajuntar os dous lados Z, e X, de sórte, que façaõ hum angulo igual ao angulo dado K (*num.* 28.) e logo tirar as duas linhas pararélas a Z, e a X (*liv.* 1. *num.* 71.) e serà feito o problema, como se pedia.



COROLARIO

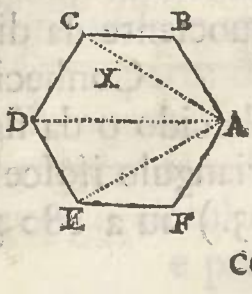
118. SObre huma linha dada fazer hum quadrado. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 46.

Para fazer hum quadrado sobre huma linha dada, naõ tem mais mysterio, que ajuntar pelos seus extremos duas linhas iguaes ás dadas, de sórte, que faça hum angulo recto, &c.

THEOREMA VII.

119. TOdo o poligono de muitos lados se divide em tantos triangulos, quantos forem os lados menos dous.

Na figura Poligona X, lançando de hum de seus angulos, como A, linhas rectas a todos os outros angulos, ficará dividida em muitos angulos, que teráõ por baze os lados do poligono, menos os dous, que saõ á roda do ponto A, a saber, AB, e AF; e assim tem tantos triangulos,



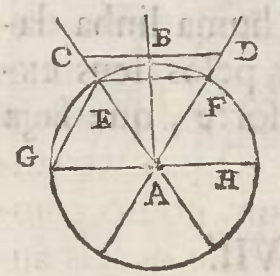
como os lados menos dous; o meſmo ſe achará em todos os poligonos, como ſe faz evidente, e o póde moſtrar a experiencia.

COROLARIO.

120. SEgue-ſe, que todos os angulos de huma figura de muitos lados ſaõ iguaes a duas vezes outros tantos angulos rectos, quantos ella tem de lados menos dous.

ADVERTENCIA.

ENtendemos por figuras regulares, aquellas, cujos angulos, e lados ſaõ iguaes (*num.* 103.) e que por conſequencia pódem ſer inſcritas em hum circulo, como aqui o Exagono, no qual o angulo E A F ſe chama angulo do centro, formado pelos radios do circulo A E, A F; ſe lançarmos linhas aos extremos dos lados do poligono, formaràõ os angulos ſemelhantes a G E F, e ſeráõ formados pelo encontro dos lados; a eſtes angulos chamaõ angulos do poligono; e como fica moſtrado (*num.* 18.) que todos os angulos, que ſe formaõ no ponto A, centro do poligono, ſaõ iguaes a quatro rectos, querendo ſaber o valor do angulo do centro, por exemplo, de hum Exagono, devemos dividir 360. gráos, valor dos quatro angulos rectos por 6, numero dos lados do poligono; o numero 60. que he o quociente da diviſaõ dá o valor do angulo do centro.



Conhecido o angulo do centro fica tambem conhecido o da figura; porque, como os tres angulos do triangulo iſoſceles E A F ſaõ iguaes a dous rectos (*num.* 73.) ou a 180 gráos, e tirando o angulo do centro de

180.

180. gráos, o resto será o valor dos dous angulos iguaes sobre a baze, ou lado do poligno, os quaes saõ iguaes a G E F, angulo do dito poligono.

Se a figura for hum Exagono, se acha ser o angulo da figura de 120. gráos. Tambem se poderá conhecer o mesmo angulo pelo que fica mostrado (*num.* 37.) pois que o angulo G E F tem por sua medida metade da porçaõ do arco G E F, sobre o qual se apóya; e assim tirando de 360. gráos a parte G F, supposta de 120. gráos, restaõ 240. do qual metade he o valor do angulo G E F, ou do poligono, ou da figura.

Coriosamente se pergunta, quaes saõ os poligonos, que se podem tocar pelos seus angulos, sem deixar espaço vazio entre si; e he certo, que há alguns poligonos, que se podem ajuntar pelos seus angulos; e seraõ aquelles, que juntos naquelle ponto, em que se tocaõ, façaõ precisamente quatro angulos rectos (*num.* 18.) os quatro angulos de quatro quadrados, que tem hum angulo commum, fazem justamente quatro angulos rectos; os tres angulos de tres exagonos, que tem hum angulo commum, sendo cada hum de 120. gráos fazem justamente 360. valor de quatro angulos rectos. Os triangulos equilateros, podem tambem ter hum ponto commum, ajuntando seis á roda de hum ponto, e os seis angulos, que se tocaõ fazem quatro angulos rectos.

Quando se conhece o angulo do centro de huma figura regular, pode-se inscrever em hum circulo, e lançando dous radios a terminar na circunferencia, e fazendo o angulo desses dous radios igual aõ do centro da figura, se saberá o angulo do poligono; porque, se for, por exemplo, huma figura de dez lados, formando o angulo no centro de 36. gráos, que he a decima parte de 360. a corda desse angulo será o lado do Decagono.

Para circunscrever hum poligono regular á roda de hum circulo, se deve primeiro inscrever o circulo, e proe produzir os radios, e dividindo, pelo meyo hum dos lados do poligono inſcrito, como EF, e lançando o radio AB pela ſua metade, e lançando huma tangente ao ponto B entre AC, e AD ſe achará hum dos lados do poligono circunſcrito; e aſſim para os mais lados.

PROBLEMA II.

121 INſcrever hum quadrado em hum circulo. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 6.

Seja o circulo dado X: lance-ſe pelo centro o diametro AC, e a perpendicular BD; os quatro pontos eſtaõ em iguaes diſtancias, os quaes ſaõ A, B, C, D, (*liv.* 1. *n.* 42.) logo lançando as quatro linhas rectas por eſſes quatro pontos teremos o quadrado inſcrito no circulo X.

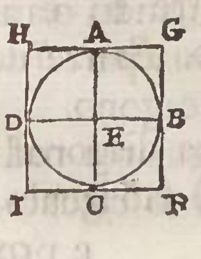
DEMONSTRAC, AM.

EM primeiro lugar, eſta figura tem quatro lados iguaes. Em ſegundo lugar, todos os angulos ſaõ rectos (*numero* 42.) pois tem por cada hum delles metade da medida da ſemi-circunferencia.

PROBLEMA III.

122 INſcrever hum circulo em hum quadrado. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 8.

Seja o quadrado dado FGHI; no qual ſe quer inſcrever hum circulo. Dividindo pelo meyo os quatro lados do quadrado pelas linhas AO, e BD; ſe do ponto E, onde as linhas ſe cortaõ com o intervallo EA, ſe deſcrever hum circulo, ſerá o pedido; por-



porque as quatro linhas AE, BE, OE, DE saõ iguaes: logo o circulo passará pelos pontos A, B, O, D; e he o que se queria &c.

PROBLEMA IV.

123 Circunscrever hum quadrado a hum circulo. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 7.

Dado o circulo ABOD, para lhe circunscrever hum quadrado, se devem lançar duas diagonaes, que se cortem em angulos rectos, e pelos extremos desses diametros lançando ao circulo quatro tangentes (*liv.* 1. *numero* 109.) ellas formaráõ o quadrado pedido, como he evidente.

PROBLEMA V.

124 Circunscrever hum circulo a hum quadrado. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 9.

Dado o quadrado ABCD, lançando-lhe as diagonaes de hum a outro angulo opposto, e tomando pelo radio metade de huma dessas diagonaes, o circulo, que se descrever será o pedido, como he evidente.

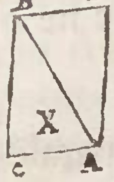
CAPITULO V.

Da medida da área das superfices.

THEOREMA I.

125 Em todo o paralélogramo os lados, e angulos oppostos saõ iguaes entre si, e a diagonal os divide pelo meyo. *Eucl. liv.* 1. *Prop.* 34.

Seja X o paralélogramo, e AB a sua diagonal. Devemos mostrar, que os lados AC, e BD saõ iguaes, os



os dous angulos A B D, B A C oppostos alternativamente saõ iguaes (*num.* 24.) pela mesma razaõ B A D = A B C, o lado A B he commum; e assim esses dous triangulos A B D, B A C saõ inteiramente iguaes (*num.* 94.) logo o angulo D = ao angulo C, e o angulo A, ao angulo B, pois saõ compostos de angulos iguaes, e A D = C B, como tambem A C = B D: logo tambem A B, diagonal, divide em dous igualmente o paralélogramo A B C D.

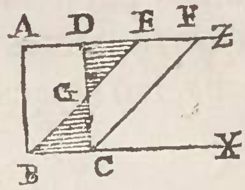
THEOREMA. II.

126 OS paralélosgramos sobre huma mesma baze, ou sobre bazes iguaes, entre as mesmas paralélas, saõ iguaes. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 35. *e* 36.

Se os paralélosgramos A B C D, E F C B estaõ entre as mesmas paralélas X, e Z, e sobre huma mesma baze, ou outra sua igual, digo, que saõ iguaes.

Devemos mostrar, que esse ultimo paralélogramo he igual ao paralélogramo A B C D.

Os lados A B, e C D do paralélogramo saõ paralélos (supposiçaõ) e saõ iguaes (*num.* 125.) e o mesmo se mostrará dos lados E B, F C; mas,



se a A D, e E F, suppostos iguaes, se ajuntar E D, os todos A E, e D F seraõ iguaes; e assim os dous triangulos E A B, F D C, tendo os seus tres lados iguaes saõ inteiramente iguaes (*num.* 90.) e tirando desses dous triangulos iguaes a parte D G E, que lhe he commua, seraõ iguaes os trapezios A B G D, e C G E F: logo ajuntando a hum, e outro a mesma grandeza B G C, seraõ iguaes os dous paralélosgramos A B C D, e B C E F; e he o que se queria mostrar.

Deve-se notar, que se o ponto E se achasse entre D, e A, em outra figura, em lugar de se ajuntar, se devia

devia diminuir, para concluir a igualdade das linhas A E, e D F.

COROLARIO I.

127 SEgue-ſe, que na ſuperfice de hum paralélogramo, para a ſua mediçaõ, ſó ſe deve conſiderar a ſua baze, e a perpendicular, que lhe mede a altura.

COROLARIO. II.

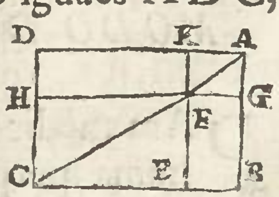
128 NA mediçaõ de hum paralélogramo rectangulo, ſenaõ deve attender ao ſeu circuito; porque, quando os lados B E, e C F forem de hum milhaõ de legoas, ou indefinitos, pois que as linhas X, e Z (*figura idem*) ſe podem produzir indefinitamente, eſſe tal paralélogramo, que o entendimento percebe, teria hum circuito indefinito, e nunca ſeria mayor, que A B C D, que tem o ſeu contorno terminado.

THEOREMA III.

129 SE por hum ponto dado na diagonal de hum quadrado ſe tirarem duas linhas paralélas aos lados, dividiráõ o paralélogramo em quatro partes, das quaes as duas, por onde a diagonal naõ paſſa, ſaõ iguaes. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 43.

DEMONSTRAC, A M.

POis que A B C = A D C, e A G F = A K F, e F E C = F H C (*n.* 125.) ſe dos triangulos iguaes A D C, e A B C tirarmos as duas grandezas iguaes A K F, e F H C de huma parte, e A G F, e F E C, da outra, os reſtos F K D H, e B E F G ſeraõ iguaes;



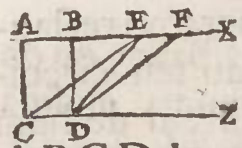
e he

e he o que ſe queria moſtrar.

THEOREMA IV.

130 OS paralélosgramos ſaõ duplos dos triangulos da meſma baze, e da meſma altura. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 41.

O triangulo ECD, e o paralélogramo ABCD tem a meſma baze, e eſtaõ entre as meſmas paralélas X, e Z: lance-ſe DF paraléla a CE, para fazer o paralélogramo DCEF, o qual he igual a ABC (*n.* 126.) mas CED he igual a EDF (*num.* 125.) logo DCEF, ou a grandeza igual ABCD he o dobro do triangulo CED; e he &c.



COROLARIO I.

131 OS triangulos da meſma baze, ou de igual baze, e da meſma altura ſaõ iguaes. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 37. *e* 38.

He evidente; pois que todos ſaõ metade de hum paralélogramo da meſma baze, e da meſma altura.

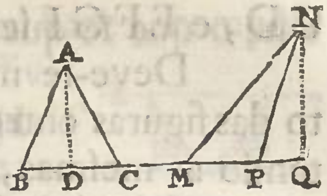
COROLARIO II.

132 PAra medir a ſuperfice de hum triangulo, naõ he neceſſario haver reſpeito mais, do que á ſua baze, e á ſua altura.

Pois fica moſtrado ſer elle metade do paralélogramo, que tem igual baze, e igual altura.

MODO DE MEDIR OS TRIANGULOS.

PAra medir o triangulo ABC, he neceſſario lançar huma perpendicular do ſeu vertice A, ſobre o lado



do BC, que he a ſua altura AD, e multiplicar BC por metade de AD, ou AD por metede de BC, ou tambem BC por AD, e tomar metade do producto, que vem a ſer o meſmo.

Se o triangulo for obtuzangulo, como MNP, neſſe caſo para ter a altura ſe deve produzir o lado MP, e do vertice N, lançar a perpendicular NQ.

THEOREMA V.

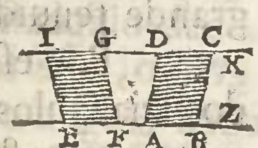
133 OS triangulos iguaes da meſma baze, ou de bazes iguaes, e poſtos de huma meſma parte, eſtaõ entre as meſmas paralélas. *Euclid. livro* 1. *Prop.* 39. *e* 40.

Se os triangulos ſaõ iguaes, teraõ a meſma altura (*num.* 131.) e por conſequencia as perpendiculares lançadas ſobre as bazes, ſeraõ iguaes: logo lançando huma linha pelos ſeus vertices ſerá eſta paraléla ás ſuas bazes (*liv.* 1. *num.* 63.)

ADVERTENCIA.

EStas propoſiçoens a cima, ſe podem demonſtrar por outro methodo, do qual he util dar aqui algum conhecimento.

He evidente, em primeiro lugar, que, quando duas ſuperfices planas ſaõ feitas por duas linhas rectas, e iguaes, ſe o movimento de huma, e outra linha for igual, e em igual tempo, eſſas duas ſuperfices ſeraõ iguaes, como, por exemplo, AB = EF; e ſe

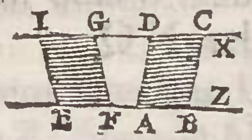


eſſas duas linhas ſe movem paralélamente a ſi meſmas de hum movimento igual, chegaráõ no meſmo tempo de Z a X, linhas paralélas, e os dous paralélosgramos AB

CD, e EFGI ſeraõ iguaes.

Deve-ſe notar, que o mayor, ou menor circuito das figuras entre paralélas naõ altéra a ſua igualdade, tendo as meſmas, ou iguaes bazes.

Se as duas linhas AB, EF, movendo-ſe, deixaſſem a cada inſtante hum veſtigio, ou ſignal, he evidente, que, como ſe ſuppoem, que ellas paſſaõ em hum meſmo tempo de Z a X, as duas ſuperfices ABCD, e EFGI, que ellas pelo ſeu movimento deſcrevem, ſeriaõ cobertas de hum numero igual de linhas iguaes, e por cõſequencia devem ſer iguaes eſſas ſuperfices.

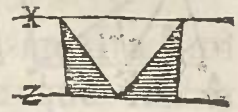


Iſto ſe póde moſtrar ainda de modo mais ſenſivel; porque, ſe em lugar, que até aqui conſideramos as linhas AB, e EF, ſem largura; ſuppondo agora, que a tem; mas tal, que abſolutamente ſenaõ póde dividir, ſuppondo-as aſſim, e dando-lhe o meſmo movimento entre Z, e X paralélas; pois que eſte eſpaço he por toda a parte o meſmo, e que eſſas linhas indiviſiveis ſaõ iguaes, tantas haverá ſobre AB, como ſobre EF; e porconſeguinte eſſas duas ſuperfices ſeraõ iguaes; ſe as que eſtaõ ſobre EF forem ſempre paralélas entre ſi teraõ igual circuito; mas, ſe a extremidade da ſegunda paſſar para lá de E, e a da terceira, tambem para a meſma parte, neſſe caſo o circuito EFGI ſerá mayor, que o de ABCD.

Eſte methodo, que aqui explicamos ſe chama o methodo dos indiviſiveis; porque ſe ſuppoem, que as linhas tem huma largura indiviſivel por cauſa da ſua grande tenuidade.

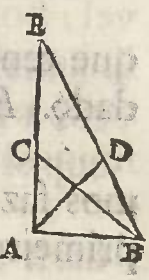
Por eſte methodo podemos moſtrar a igualdade dos triangulos, que tem a meſma baze, e a meſma altura, e que eſtaõ entre as meſmas paralélas; porque, ſuppondo, que as duas linhas iguaes movendo-ſe ſevaõ proporcionalmente diminuindo até ficarem hum ponto, ellas faraõ iguaes ſuperfices, como tambem ſe podem perceber

ceber duas ſuperfices iguaes ſobre iguaes bazes, compoſtas de hum igual numero de linhas indiviſiveis, que movendo-ſe, ſe foraõ proporcionalmente diminuindo, de ſorte, que todas ficáraõ iguaes, cada huma a cada huma; e aſſim eſſas duas ſuperfices, ou triangulos devem ſer iguaes.



134 Deve-ſe mais notar, que de dous triangulos de igual ſuperfice, o que tiver os angulos, e lados mais iguaes entre ſi, terá menor circuito, e hum triangulo rectangulo de igual ſuperfice a hum equilateral, terá mayor circuito.

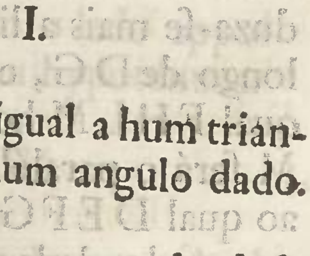
Seja ABC hum triangulo rectangulo, e ABD hum equilateral da meſma baze, e da meſma altura (*n.* 131.) ſeraõ iguaes: produza-ſe AC para E, de ſorte, que AC = CE, o circuito de ACB he AB + BC + CE; produza-ſe BD para E, cada angulo de ABD he de 60. gráos, e EAB de 90. os angulos AEB, e EAD ſaõ cada hum de 30 gràos; e aſſim EDA he iſoſceles, e DE = AD: logo AB + BE he o circuito de ABD; mas BE < BC + CE: logo o circuito ABD he menor, que o circuito ABC; ao diante moſtraremos, que huma figura, quanto mais uniforme em todas as ſuas partes, he mais capaz, e tem menor circuito, que outra ſua igual, menos uniforme.



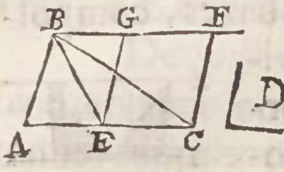
PROBLEMA I.

135 FAzer hum paralélogramo igual a hum triangulo dado, e que tenha hum angulo dado. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 42.

Seja o triangulo dado ABC, e o angulo dado D, devemos fazer hum paralélogramo igual ao triangulo dado, e que tenha hum de ſeus angulos igual ao angulo dado. Em primeiro lugar, pelo



vertice

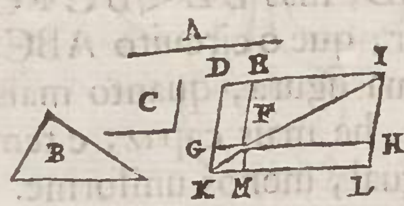


vertice B do triangulo A B C ſe lance B F paraléla á baze A C (*liv.* 1. *num.* 71.) Em ſegundo lugar, ſobre E, metade da baze, ſe levante E G, que faça com A C o angulo igual a D (*num.* 28.) Em terceiro lugar, acabe-ſe o paralélogramo E G C F (*liv.* 1. *num.* 71.) que ſerá o pedido, pois he igual ao triangulo A B C (*num.* 130.) e tem o angulo G E C igual ao dado D; e he o que ſe queria fazer, &c.

PROBLEMA II.

136 SObre huma linha recta dada fazer hum paralélogramo igual a hum triangulo dado, e que tenha hum angulo igual a outro angulo rectilineo dado. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 44.

Seja a linha dada A, e o angulo dado C: devemos fazer hum parlélogramo igual ao triangulo B. Em primeiro lugar, pelo problema precedente faço o angulo C, e o paralélogramo D E F G igual ao triangulo B. Em ſegundo lugar, produza-ſe G F, e D E, de ſorte, que F H = A, e E I = F H, e acabe-ſe o paralélogramo E F H I; produza-ſe mais a linha I F, até que ella encontre o prolongo de D G, e acabe-ſe o paralélogramo D K L I, no qual F H L M he igual a D E F G (*num.* 131.) e F H L M ſerá o paralélogramo buſcado, igual ao triangulo B, ao qual D E F G foy feito igual, tendo hum angulo igual ao angulo dado C, e feito ſobre F H = á linha dada A.

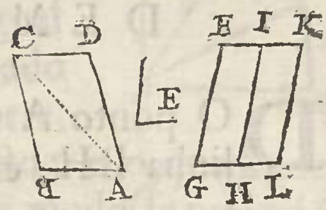


PRO-

PROBLEMA III.

137 DEſcrever hum paralélogramo igual a huma figura rectilinea dada, e que tenha hum angulo igual a hum angulo rectilineo dado. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 45.

Seja a figura rectilinea dada ABCD, e o angulo dado E. Em primeiro lugar, divida-ſe a figura dada em dous triangulos, pela linha AC. Em ſegundo lugar, faça-ſe o paralélogramo GI igual ao triangulo ABC, tendo o angulo G igual ao angulo dado E (*num.* 135.) Em terceiro lugar, ſobre HI ſe faça o paralélogramo IL igual ao triangulo ABC, que tenha o angulo E (*num.* 136.) iſto feito, ſerá GK = GI + IL: logo GK = ABCD; e he o paralélogramo, que ſe queria fazer.



Se a figura ſe dividiſſe em mais de dous triangulos, ſe faria o meſmo ſobre a linha KL; para o terceiro triangulo o meſmo, que ſe fez ſobre HI para o ſegundo; e aſſim dos mais, ſe em mais ſe dividiſſem.

DEFINIÇAM.

138 EM hum triangulo rectangulo o lado oppoſto ao angulo recto ſe chama hypotenuza.

THEOREMA VI.

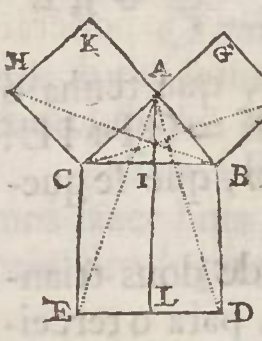
139 EM todo o triangulo rectangulo o quadrado da hypotenuza he igual aos quadrados dos outros dous lados. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 47.

Seja o triangulo rectangulo CAB; ſe ſobre a hypotenuza CB ſe fizer o quadrado CD (os quadrados, e os paralélosgramos ſe coſtumaõ nomear por duas letras dos angulos oppoſtos) e ſobre os dous lados C A, e A B ſe façaõ os quadrados C K, B G.

Digo, que C D = C K + B G; do vertice A ſe lance a linha A L perpendicular ſobre a hypotenuza B C, a qual dividirá o paralélogramo B C E D, em dous, a ſaber, I E, e I D, dos quaes o primeiro he igual a C K, e o ſegundo igual a B G.

DEMONSTRACAM.

DO ponto A ſe lance a linha A E, e do ponto B a linha B H; eſſas duas linhas formaráõ dous triangulos A C E, e H C B (*num.* 133.) e porque o lado C E = C B, e C A = H C, e os angulos A C E, e H C B, formados por eſſes lados iguaes, tendo cada hum o angulo recto, e o angulo A C B commum, ſaõ iguaes; mas o trianlo A C E he metade do paralélogramo I E (*num.* 130.) pois tem huma meſma baze, e ſaõ entre as meſmas paralélas. Da meſma ſorte o triangulo H C B he metade de C K, pela meſma razaõ; mas eſſes triangulos ſaõ iguaes: logo os paralélosgramos, que ſaõ o dobro, ſeraõ tambem iguaes.



O que temos moſtrado do paralelogramo I E, e do quadrado C K ſe moſtrará do paralélogramo I D, e do quadrado B G: logo, &c.

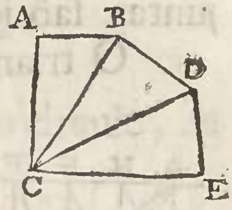
Eſta propoſiçaõ he de hum grande uſo, e muy frequente na Geometria, como tambem para a reſoluçaõ dos problemas da Análizi.

PRO-

PROBLEMA IV.

140 Achar hum quadrado igual a dous, ou a mais quadrados dados.

Devem-se ajuntar as duas bazes como AB, AC dos dous quadrados propostos, de sorte, que formem hum angulo recto, e a baze BC, ou a hypotenuza desse triangulo será o lado de hum quadrado igual aos dous dados (theorema precedente) se fosse para hum quadrado igual a tres quadrados, e que BD seja o lado do terceiro, ajunto BC, e BD, de sorte, que essas duas linhas façaõ angulo recto; e o quadrado de CD será o que se pede; e por este modo se poderáõ somar quantos quadrados quizerem; e o mesmo de todas as figuras regulares, e tambem circulos, usando dos seus diametros, como de lados de figura.

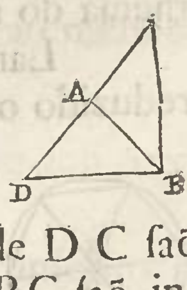


THEOREMA VII.

141 SE o quadrado de hum dos lados de hum triangulo for igual aos quadrados dos outros dous lados, o angulo comprehendido entre esses dous lados será recto, *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 48.

Se supozermos, que no triangulo ABD o quadrado BD he igual aos quadrados dos outros dous lados AB, AD, digo, que o angulo BAD he recto.

Seja AC perpendicular sobre AD, e igual a AD: logo os quadrados de AD, e de AC saõ iguaes ao quadrado de DC (*num.* 139.) mas esses dous quadrados saõ iguaes (pela hypotezi) ao quadrado de BD: logo os quadrados de BD, e de DC saõ iguaes: logo os dous triangulos ABD, e ABC saõ inteiramente iguaes (*numero* 90.) e assim BAD he recto,



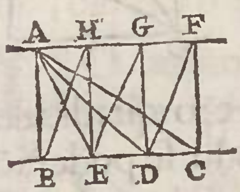
como

como tambem CAB : aqui se suppoem o que he evidente; porque os quadrados iguaes tem iguaes lados.

THEOREMA VIII.

142 HUm triangulo he igual a dous, ou a mais triangulos da mesma altura, cujas bazes juntas saõ iguaes à sua baze.

O triangulo ABC he igual aos triangulos ABE, EAD, e DAC, que saõ suas partes; mas ACD = CFD, e DAE = DGE, e EAB = EHB (*num.* 131.) logo CAB igual a dous, ou mais triangulos; e he o que se queria mostrar.



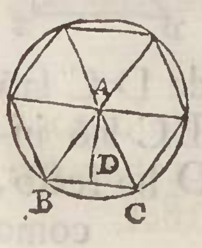
DEFINIÇAM.

143 APothema se chama aquella parte do radio comprehendida entre o lado de hum poligono inscrito ao circulo, e o centro (*figura seguinte.*) como AD.

THEOREMA. IX.

144 A Superfice de hum poligono regular, he igual a hum triangulo, que tiver por baze o circuito do mesmo poligono, e por altura o apothema do mesmo poligono.

Lançando linhas do centro A a cada angulo fica reduzido o poligono a outros tantos triangulos iguaes, quantos saõ os lados, e todos iguaes ao triangulo ABC, que tem por baze o lado BC, e por altura o apothema AD; mas o triangulo, que tem AD por altura, e por baze o circuito do poligono, he igual a todos



dos esses triangulos, pois que todos esses lados do poligono, e bazes dos triangulos compoem o circuito (*num.* 140.) logo he o que se queria demonstrar.

PROPOSIC,OENS EVIDENTES, QUE RESPEITAM aos poligonos.

PROPOSIC,AM I.

145 HUm poligono he mayor, que o circulo, ao qual he circunscrito.

PROPOSIC,AM II.

146 HUm poligono he menor, que o circulo, no qual he inscrito.

PROPOSIC,AM III.

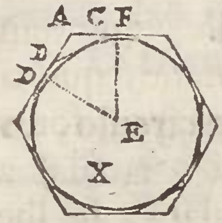
147 HUm circulo póde ser considerado, como hum poligono de hum numero indefinito de lados.

Se suppozermos hum poligono, cujo diametro seja extremamente pequeno, e que tem hum milhaõ de lados, he evidente na nossa consideraçaõ, que esses lados naõ fariaõ nenhuma diferença sensivel do circulo; se percebermos em hum circulo tantos lados, quantos saõ os pontos sensiveis, será hum poligono, e ao mesmo tempo hum circulo.

THEOREMA X.

148 DE dous poligonos regulares circunscritos a hum circulo, o que tiver mayor numero de lados, terá menor circuito, e menor superfice.

Seja X o poligono circunſcrito a hum circulo, e dividaõ-ſe os ſeus lados, para formar outro poligono de mayor numero de lados, e lançando tangentes, que ficaráõ fóra do circulo (*liv.* 1. *n.* 103.) e aſſim ſerá eſſe poligono mayor, que o circulo (*n.* 143.) conſidere-ſe a parte deſſes dous poligonos circunſcrita ao meſmo circulo, por exemplo, E F D; pois que B A ∗ A C ⊳ B C: logo B D ∗ B A ∗ A C ∗ C F ⊳ D B ∗ B C ∗ C F; e aſſim o circuito daquelle poligono, que tem menos lados he, mayor; por quanto a figura E F C A B D, que tem menos lados, he mayor, que a figura E F C B D, pelo triangulo A B C: logo a ſuperfice do poligono, que tiver mayor numero de lados, he menor, ſendo circunſcritas as figuras.



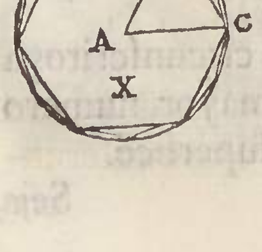
C O R O L A R I O.

149 SEgue-ſe, que quanto for mayor o numero de lados de hum poligono circunſcrito, tanto mais a ſua ſuperfice ſe hirá chegando a igualar a ſuperfice do meſmo circulo; de ſorte, que ſendo o numero de lados indefinito, as ſuas áreas naõ teraõ nenhuma diferença.

T H E O R E M A XI.

150 DOus poligonos regulares inſcritos em hum circulo, o que tiver mayor numero de lados, terá mayor circuito, e mayor área.

Sejaõ dous poligonos inſcritos no circulo X, ſe conſiderarmos a parte A B C D deſſes dous poligonos, acharemos, em primeiro lugar, que B D ∗ D C he mayor, que B C: logo tem mayor circuito, e mayor ſuperfice: em ſegundo lugar, a figura A B C D he mayor, que A B C pelo trian-



triangulo BDC: logo o poligono inſcrito, que tem mayor numero de lados, tem mayor ſuperfice, e he o que ſe queria provar.

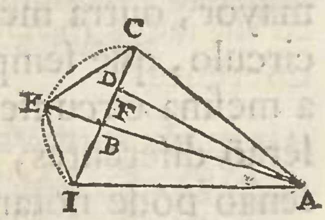
COROLARIO.

151 POis que de dous, ou mais poligonos inſcritos no circulo he mayor aquelle, que tem mayor numero de lados, ficando ſempre menor que o circulo (*num.* 144.) ſegue-ſe, que quanto mayor for o numero de ſeus lados, mais elle ſe chegará a igualar a área do circulo até que com effeito o igualará, ſe lhe ſuppozermos hum numero indefinito de lados.

THEOREMA XII.

152 DE dous poligonos regulares inſcritos em hum meſmo circulo, ou em circulos iguaes, o que tiver mayor numero de lados terá mayor apotema.

Seja EC a corda do poligono de mayor numero de lados; IC do que tem menor: ſendo CE a corda de hum menor arco, ſerá, por conſequencia, mais diſtante do centro A, do que a corda IC (*livro* 1. *número* 94.) logo a perpendicular AD, que he apothema do poligono CE, he mayor, que AB, apothema do poligono IC, de que CI he a corda; e he o que ſe queria demonſtrar.



THEOREMA XIII.

153 A Superfice de hum circulo he igual a hum triangulo, que tem por baze a circunferencia,

cia, e o radio por altura.

Podemos ſuppor, ſegundo os dous theoremas precedentes, e ſeus corolarios, que hum circulo he igual a hum poligono de hum numero indefinito de lados, ou ſeja inſcrito, ou circunſcrito; e a ſuperfice deſſe poligono ſerá igual a hum triangulo, que tem por baze o ſeu circuito, que ſe ſuppoem igual á meſma circunferencia do circulo, e por altura o apotgema, que ſendo o poligono já conſiderado, como circulo, o apothema naõ ſerá diferente do radio.

O radio de hum circulo ſe póde facilmente medir; mas naõ he o meſmo da circunferencia, que ainda ſenaõ conhece; e he o que falta, para poder achar aquadratura do circulo, a ſaber, fazer hum quadrado igual á ſuperfice, que a circunferencia do circulo comprehende; porque, conhecendo a circunferencia em certa medida, formariamos hum triangulo igual ao circulo, que teria a baze igual á circunferencia, e a perpendicular, ou altura igual ao radio; e, feito o tal triangulo, ſe poderia facilmente reduzir a hum quadrado, ſeu igual; naõ ſe póde expreſſar a grandeza de qualquer parte da circunferencia do circulo, que por duas linhas huma mayor, outra menor, que a dita parte, ou que todo o circulo, que ſempre huma ſerá mayor, ou menor, que a meſma circunferencia; e porém eſſas duas linhas naõ ſeraõ diferentes, mais do que por huma quantidade, que ſenaõ póde notar.

LOGICA GEOMETRICA, LIVRO III.

DAS PROPRIEDADES, QUE CONVEM A QUALquer grandeza aplicadas ás linhas, aos planos, aos solidos, e demonstradas.

CAPITULO I.

Das operaçoens da Arithmetica: somar, diminuir, multiplicar, e repartir linhas, planos, e solidos.

NA terceira parte desta obra havemos de tratar esta materia mais difusamente, aplicada ás grandezas em geral, e sem attençaõ de serem linhas, planos, ou solidos.

OPERAÇAM I.

do somar.

1 SUpponho, que os que entraõ neste estudo sabem ao menos a Arithmetica mercantil, que

nas eſcolas ſe enſina aos rapazes, e a meſma ſuppoſiçaõ faremos na terceira parte, pelo que toca ás operaçoens ordinarias, e ſó ſe lhe daraõ as regras para a extracçaõ das raizes das potencias quadradas, cubicas, &c.

Somar, he ajuntar huma grandeza a outra grandeza do meſmo genero, como huma linha a outra linha, hũ plano a outro plano, e hum ſolido a outro ſolido; e diminuir eſtas grandezas, he tirar as menores das mayores, e o que fica ſe chamaõ reſtos; e eſtas ſaõ em rigor as duas unicas operaçoens de toda a Arithmetica; porque multiplicar he hum ſomar abreviado; e dividir, ou repartir, he hum diminuir tambem abreviado.

A razaõ he; porque a primeira, e a mais ſimples propriedade de toda a grandeza, e por conſequencia das linhas, planos, e ſolidos, he poderſe aumentar, ou diminuir.

Para ajuntar huma grandeza a outra, he, como fica dito, com eſte ſinal *; e aſſim para ajuntar a grandeza A á grandeza B eſcreveremos A * B; mas, porque huma meſma grandeza ſe póde repetir mais vezes, como duas, ou tres, para abreviar a eſcrita, em lugar de a a a * b, eſcreveremos 3 a * b.

Quando ſe acha o ſinal *, e o ſinal — ſe apagaõ as grandezas; porque fica a ſoma = o.

Na Geometria coſtumaõ alguns notar as linhas com huma ſó letra menor no meyo, ou, o que he mais ordinario, por duas letras mayuſculas nos dous extremos da linha, como A B.

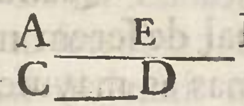
A ―――――― B
a

OPE-

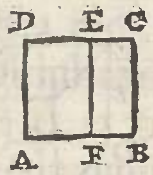
OPERAC,AM II.

Do diminuir.

2 O Sinal da diminuiçaõ he, como fica dito, huma barrinha; e aſſim para tirar a grandeza B da grandeza A eſcreveremos A — B. A diferença de duas grandezas, he o exceſſo da mayor ſobre a menor, ou a mayor menos a menor: ſejaõ as duas linhas AB, e C D diminuindo da linha AB, a linha AE = CD, a diferença ſerá a porçaõ E B.



Se do plano ABCD ſe diminuir o plano BCEF, para notar eſſa diminuiçaõ eſcreveremos ABCD — EBCF, que ſerá a diferença dos dous planos; porque, feita a diminuiçaõ, o reſto he ADEF. A regra geral da diminuiçaõ por eſte eſtillo he de mudar os ſinaes das grandezas; e porque aquella, de que ſe ha de diminuir ſe lhe ſuppoem ſempre o ſinal mais, ainda que o naõ tenha, para diminuir B de A, he neceſſario mudar o ſinal em menos, como + A + B, ou A — B, mudando o ſinal.



OPERAC,AM III.

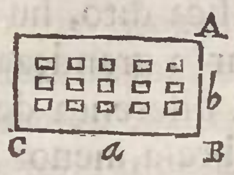
Do multiplicar.

3 MUltiplicar huma grandeza por outra, he repetir huma dellas (naõ importa qual ſeja) tantas vezes, quantas forem as unidades da outra.

Multiplicar A por B, he repetir tantas vezes B, quantas forem as unidades de A, ou de partes; e iſto ſe nota nas multiplicaçoens, ajuntando ſómente AB; porque AB ſem ſeparaçaõ denota, que eſtas duas grandezas eſtaõ multiplicadas, huma por outra.

He

He evidente, que o plano AC he feito pelo movimento da linha b, movida de B em C; e assim repetida tantas vezes, quantas saõ as partes de a; no movimento da linha, em que falamos, se entende, que A B se

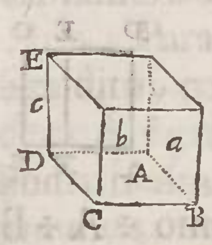


move sobre B C perpendicularmente, formando hum angulo recto; e assim o extremo B pelo movimento passa por todas as partes, ou pontos da linha BC.

Quando nos servirmos de letras minusculas he sinal de serem multiplicadas humas por outras, como a b; mas as mayusculas, ou Romanas, ainda que estejaõ juntas significaõ os dous extremos da linha.

O sinal da multiplicaçaõ com letras Romanas he $\times$ entre ellas; como A B $\times$ B C he sinal, que a linha A B se acha multiplicada por B C.

Se considerarmos, que o plano A B C D se move, percorrendo todos os pontos da li-



nha D E, gerará hum solido A B C D $\times$ D E; e assim, se A B $=$ a, e A D $=$ b, e D E $=$ c, o producto em letras será a, b, c; e como hum plano se nota com duas letras minusculas, hum solido se nota com tres.

OPERAÇAM IV.

Da divisaõ.

DEFINIÇAM.

4 CHamamos *dividendo* á grandeza, que se quer dividir, ou repartir; e a grandeza, que reparte se chama *divisor*; e a grandeza, que expressa as vezes, que o dividendo coube no divisor, se chama *quociente.*

Para notar por letras, que huma grandeza se dividio

vidio por outra grandeza, como A por B, ſe eſcreve o A por cima, e B por baixo com huma barrinha no meyo, deſta ſórte $\frac{A}{B}$: a diviſaõ he huma eſpecie de diminuiçaõ.

Quando huma grandeza literal ſe tira de outra ſemelhante, como a de a, naõ tem reſto; porque qualquer grandeza ſe contèm em ſi meſmo huma ſó vez; e aſſim as letras, que ſe achaõ igualmente no diviſor, ou no dividendo ſe apagaõ, ou ſe deſvanecem, como, para dividir c d por c, ſe devem apagar as letras c, e ficar ſó d, por quociente de c d. A diviſaõ desfaz o que faz a multiplicaçaõ; e aſſim para multiplicar c por d ſe ajuntaõ ſem diviſaõ c d, mas dividindo c d por c, c deve deſaparecer, e ficar ſó d. Se foſſe neceſſario multiplicar c d por a, ſe deve apagar a letra a, quer dizer, que o producto de $\frac{cd}{a}$ he c d; porque c d dividido por a, e deſvanecendo a, que o dividia, fica c d; porque a diviſaõ desfaz o que tinha feito a multiplicaçaõ.

Deve-ſe bem notar, que o quociente de huma diviſaõ multiplicado pelo diviſor, produz huma grandeza igual àquella, que foy dividida; o que he evidente; porque multiplicar o quociente pelo diviſor he repetilo tantas vezes, quantas elle he contheudo na grandeza a dividir.

As meſmas operaçoens, que temos feito nas grandezas ſimples, ſe deve fazer nas complexas.

5 HUma grandeza ſe diz complexa, quando he compoſta de huma, ou mais grandezas, que ſaõ notadas cada hũa de ſeu ſinal particular; como a ✱ b, e a — b ſe chamaõ grandezas complexas; porém, mais huma grandeza, menos a meſma grandeza = o, ✱ b — b = o; e aſſim para fazer huma expreſſaõ clara, ſe apagaõ aquellas letras, que ſe achaõ com ſinaes contra-

rios; e assim 5 b — 2 b = 3 b, em que fica reduzido.

Já fica advertido, que quando huma grandeza naõ leva o sinal ✳, nem por isso deixa de se entender ser mais, como 5 b — 2 b, he o mesmo, que se dissera ✳ 5 b — 2 b, e porisso nesta expressaõ, em que se achaõ 2 b, com o sinal menos, apago estas grandezas, e escrevo ✳ 3 b, ou simplesmente 3 b.

Somar grandezas complexas.

6 AS grandezas complexas se somaõ, como as simples; e assim para somar b ✳ c, com f ✳ b, os poremos juntos com o sinal mais, b ✳ c ✳ f ✳ b, e sempre he necessario agagar as letras, que se achaõ com sinaes contrarios; e assim somando b ✳ d com c — d, escreveremos sómente b ✳ c.

Quando as mesmas letras se achaõ repetidas muitas vezes naõ se poem mais, que huma, e diante della o numero de vezes por carâctères do algarismo, como aqui; para ajuntar 4 f ✳ 6 g, com 3 f ✳ 4 g, escreveremos 7 f ✳ 10 g; e se esta operaçaõ se escrevesse inteira diriamos 4 f ✳ 6 g ✳ 3 f ✳ 4 g, 4 f ✳ 3 f saõ 7 f; mas 4 f ✳ 3 f = 7 f, e ✳ 6 g ✳ 4 g = 10 g; logo saõ 7 f ✳ 10 g.

Para ajuntar de huma, e outra parte o sinal de igualdade a huma mesma grandeza, onde elle se acha com o sinal — se deve apagar daquella parte, e ajuntalla da outra com o sinal ✳. Seja esta igualaçaõ, a = b — d, para ajuntar d de huma, e outra parte escrevo a ✳ d = b; porque b — d mostra, que b naõ era grandeza inteira, pois para ser inteira lhe faltava d, que tinha de menos, e apagando-se d fica b grandeza inteira mayor, que a, pelo mesmo d; e assim ajuntando a, fica a ✳ d = b.

Da

Da diminuiçaõ das grandezas complexas.

7 A Regra deſta operaçaõ he a meſma, que a das grandezas ſimples, devemos trocar os ſinaes à grandeza, que queremos diminuir; e ſempre devemos entender, que he mais aquella grandeza, que naõ leva ſinal nenhum diante de ſi; e aſſim b − d he como ſe foſſe eſcrito + b − d; e aſſim para diminuir b + d, de c + f devemos eſcrever c + f − b − d; porque, em primeiro lugar, devemos ajuntar b com c + f; porque he ſinal da diminuiçaõ: em ſegundo lugar, naõ he ſómente + b, que nós queremos diminuir, mas tambem + d, e aſſim devemos eſcrever − d.

Pelo contrario para tirar b − d de c + f, ſe devem trocar os ſinaes de + b − d, eſcrevendo c + f − b + d; porque diminuindo b, como grandeza inteira, diminuimos mais da verdade; porque naõ era grandeza inteira, pois lhe faltava o valor de d, pondo-o com o ſignal +.

Deve-ſe notar, que neſta expreſſaõ c + f − b − d, naõ he de b, que d ſe diminue; mas aſſim b, como d ſe diminuem de c + f.

Quando ſe deve diminuir de huma, e outra parte do ſinal da igualaçaõ huma meſma grandeza, naõ ha mais, que deſvanecela onde ella ſe acha com o ſinal +, pondo-a da outra parte com o ſinal −; para apagar d da igualaçaõ a = b + d, eſcrevo a − d = b.

Da multiplicaçaõ das grandezas complexas.

8 A Multiplicaçaõ das grandezas complexas tem tres diferentes caſos: o primeiro, quando multiplicamos huma linha + outra linha, por outra linha, como a + b por f + g; o ſegundo caſo he, multiplicar huma linha − outra linha por huma linha + outra

tra linha, como $a - b$ por $f + g$. O terceiro caso, quando multiplicarmos huma linha menos outra linha, como $a - b$ por $f - g$, daremos as regras para estes tres casos.

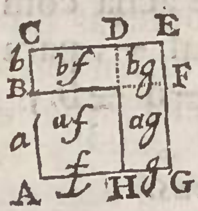
REGRA PRIMEIRA.

Quando duas grandezas dadas se multiplicaõ huma por outra, tendo ambas o sinal +, o seu producto deve tambem ter o sinal +.

PAra multiplicar $a + b$, por $f + g$, devemos começar a multiplicaçaõ de a por f, primeiras letras da operaçaõ, e naõ, como na Arithmetica, escrevendo af, que juntas sem distincçaõ se entendem multiplicadas, e fazendo o mesmo de a por g diremos ag, e logo b por f fará bf, e b por g farà bg; e assim o producto de $a + b$ por $f + g$ serà $af + ag + bf + bg$.

Para fazer fixa a imaginaçaõ desta regra, e a fazer mais sensivel.

SEja $a + b = AC$, e seja $a = AB$, e $b = BC$; seja tambem $f + g = AG$, e $f = AH$, e $g = HG$: Supponhamos, que ACEG he hum rectangulo cortado por paralélas, que formaõ os paralélosgramos ABIH, FGIH, BCDI, DEFI, aos quaes he igual a sua soma ACEG. O todo he igual às suas partes, os 4 productos $af + bf + ag + bg$ saõ iguaes aos 4 paralélosgramos, como he evidente: saõ logo iguaes a $AC \times AG$, a saber, ao paralélogramo AC por AG, ou de $a + b$ por $f + g$.



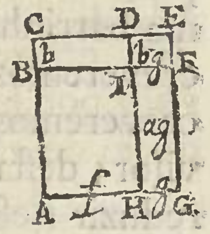
REGRA

REGRA SEGUNDA.

Mais por menos, ou menos por mais devem ter no porducto o ſinal —.

SEgundo eſta regra, para multiplicar a + b por f — g: primeiro multiplico a + b por f, o que faz af + bf; mas como naõ era a multiplicaçaõ por todo o valor de f, que ſe devia multiplicar a + b, pois lhe faltava o valor de g, eſſe producto af + bf he mayor da verdade pelo valor de g, multiplicando a + b por ag + bg, ſe tiraria, o que ſe meteo de mais, e a expreſſaõ ſerá, af + bf — ag — bg.

Para mais clareza, ſeja a = AB, ou HI; b = BC, ou ID; g = HG, ou IF; e f = AG; e aſſim a + b = AG, e f — g = AH: logo af = AB × AG; e bf = BC × EF. Devemos moſtrar, que af + bf — ag — bg = ACDH, ou que ACDH = ACEG — FGHI — DEFI, como he evidente.



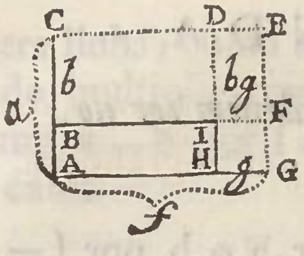
REGRA TERCEIRA.

Menos por menos dá mais.

MUltiplicando eſtas duas grandezas complexas huma por outra, como a — b por f — g, o ſeu producto he af — bf — ag + bg, donde ſe manifeſta, que ſe nota o producto de — g por — b com o ſinal +.

Devemos moſtrar, que aſſim deve ſer.

SEja a = AC, e b = BC, e a — b = AB: ſeja tambem f = AG, e g = HG, e f — g = AH; para a prova, que pertendemos, ſe conſidére, que ABIH he



igual a ACEG, ou a f. Se diminuirmos, em primeiro lugar, DEGH, ou a g, e BCEF, ou b f, com a condiçaõ de lhe tornar a ajuntar DEFI, ou b g; e assim $af - bf - ag + bg$ he o verdadeiro producto de $a - b$ por $f - g$: logo $-$ por menos dá $+$, a saber, que no fim do producto deve haver o sinal $+$; porque diminuindo mais do necessario se lhe deve acrescentar no fim.

Da divisaõ das grandezas complexas.

9 A Regra geral desta operaçaõ, ou as grandezas sejaõ complexas, ou incomplexas, se há de pôr o dividendo por cima, e o divisor por baixo, e huma barrinha entre elles; e assim para dividir a por b escreveremos $\frac{a}{b}$, e para dividir $ax + cd$ por $xd + cb$, escreveremos por cima o dividendo, e por baixo o divisor; desta sorte $\frac{ax + cd}{xd + cb}$; mas esta expressaõ se póde reduzir a esta mais simples $\frac{a + d}{b + c}$; porque como a divisaõ desfaz, o que fez a multiplicaçaõ, e a letra X se acha multiplicada por a no dividendo, e por d no divisor, fica bem reduzida em $\frac{a + d}{b + c}$.

Esta materia havemos de tratar mais difusamente na terceira parte desta obra, e por hora he o que basta, para o que temos, que tratar geometricamente.

CAPITULO II.

Das potencias das linhas.

QUando multiplicamos huma grandeza por si mesma, a subimos a diferentes gráos, a que chamaõ, *potencias*.

DEFI-

DEFINIC,AM I.

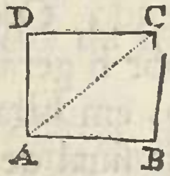
10 A Primeira potencia de huma linha he a mesma linha, e assim qualquer outra grandeza.

DEFINIC,AM II.

11 A Segunda potencia, ou quadrado de huma linha, he o seu producto, quando he multiplicada por si mesma.

A segunda potencia da linha b he bb, ou b^2; este numero 2 do algarismo he sinal de duas dimençoens, que se achaõ em bb, e note-se bem a diferença, que há entre b^2, e 2b; porque 2b he sinal, que b foy junto a si mesmo; e b^2 he sinal, que foy multiplicado por si mesmo. O que he bem diferente; porque 3, por exemplo, 3 e 3, ou 3 juntos a si mesmo fazem 6, em lugar, que 3 vezes 3, ou 3 multiplicado por si mesmo, faz 9.

Quando se nota huma linha com duas letras capitaes, como AB, sinificaõ as suas extremidades, e multiplicando-se, o seu producto, ou a sua segunda potencia, que he o quadrado ABCD, se nota com essas 4 letras, ou por duas sómente nos extremos da diagonal, como aqui AC; e multiplicando AB por si mesma se escreve $AB \times AB$, ou tambem se lhe póde ajuntar o sinal da segunda potencia desta sorte $\overline{AB}^2$ pondo-lhe huma barrinha por cima.



Desta mesma sorte o quadrado de MN, que he o lado do seu quadrado multiplicado por si mesmo he o seu producto $\overline{MN}^2$.

Deve-se advertir, que Euclides, e os Geometras antigos davaõ o nome de primeira potencia ao quadrado; e todos os Modernos geralmente daõ o nome de pri-

primeira potencia aqualquer grandeza, que por si mesma he o primeiro gráo, e tem em si valor real, que he a sua primeira potencia.

DEFINIC,AM III.

12 CHamamos rais quadrada a huma linha, que se multiplicou por si mesma, e gerou o quadrado.

A raiz quadrada de bb, ou de b^2, he huma linha igual a b, a saber, o lado de hum quadrado igual a bb; e o mesmo de qualquer outra cousa, ou numero.

Deve-se advertir, que quando a raiz de huma potencia senaõ póde expressar em numeros, como ás vezes succede, se lhe deve pôr diante o sinal $\sqrt{}$ com o carácter 2, se he quadrado $\sqrt[2]{}$, ou $\sqrt[3]{}$, se he raiz cubica.

DEFINIC,AM IV.

13 O Cubo he a terceira potencia de huma linha, ou o producto, que ella faz, multiplicada pelo seu quadrado.

O quadrado de b, he bb; se bb se multiplicar por b gerará bbb solido, ou cubo, terceira potencia de b; em lugar de bbb se expressa assim b^3, e o carácter 3 he sinal de que ali se achaõ 3 dimençoens; e como se advertio do quadrado bb, ou b^2 naõ ser o mesmo, que 2b, assim b^3, he diferente de 3b; porque no primeiro caso he multiplicaçaõ, e no segundo he soma, por ser b junto a si mesmo 3 vezes.

Se tomarmos tres vezes o numero 4 ajuntando-o a si mesmo será 12, que tambem póde ser producto de 3 multiplicados por 4; mas tomando o quadrado de 4, que he 16, e multiplicando-o pela sua raiz 4 faz 64. Quando huma linha, como AB, se nota com duas letras capi-

capitaes aos ſeus extremos ſe poderá expreſſar a ſua terceira potencia AB × AB × AB, e ſerá a ſua potencia cubica a que nos dá a conhecer. Em primeiro lugar, que AB ſe multiplicou por AB de que reſultou o quadrado $\overline{AB}^2$. Em ſegundo lugar, que ſe multiplicou eſſe quadrado de AB por AB raiz deſſe quadrado.

Para abreviar eſta operaçaõ ſe expreſſa metendo ſobre AB huma barrinha com o caracter 3, que moſtrará, que o cubo de AB he $\overline{AB}^3$.

DEFINIÇAM V.

14 TOda a grandeza, que he producto de outras duas ſe chama por nome geral plano.

E aſſim b d he huma grandeza plana, ou hum plano do qual huma deſtas letras he o ſinal da ſua largura, e a outra do ſeu comprimento, que ſaõ as primeiras dimençoens deſta ſorte AB × BC he huma grandeza plana, ou hum plano.

DEFINIÇAM VI.

15 TOda a grandeza feita do producto de tres grandezas ſe chama ſolido.

E aſſim b c d he hum ſolido cujas tres letras ſaõ os ſinaes das ſuas 3 dimençoens. O porducto deſſas duas primeiras letras de nota o plano, ou a ſua ſuperfice, e a terceira ſinala a ſua altura, ou a ſua groſſura, ou a ſua profundidade.

16 Deve-ſe advertir, que neſta multiplicaçaõ por letras he indiferente começar por humas mais de preſſa do que por outras; porque multiplicando eſtas duas letras a, e b, tanto importa, que o porducto ſeja a b, como b a; porque ſempre he o meſmo plano, e o meſmo ſe deve entender de muitas letras, como por

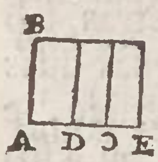
exemplo de 3 ou mais, como a b c, b c a, c a b; porque multiplicadas tanto importa o producto a b c, como b c a, como c a b, ſeja qual for a ordem da multiplicaçaõ o producto he ſempre o meſmo. Nós com Euclides entendemos por plano, hum plano rectangulo, cujos angulos ſaõ rectos.

Deve-ſe notar, que he muito importante, que nos acoſtumemos a eſte calculo da Arithmetica literal, para precebermos facilmente a formaçaõ dos quadrados, dos planos, e dos ſolidos; porque queremos evitar, ou ſuprimir as figuras de Euclides, e de ſeus interpetres, de que quaſi todos ſe ſervem nas ſuas demonſtraçoens, e nós as ſuprimiremos nas propoſiçoens ſeguintes.

PROPOSIÇAM I.

17 SE de duas linhas rectas huma for cortada, ou dividida em tantas partes iguaes, que quizerem, os rectangulos comprehendidos da linha naõ cortada, e de cada huma das partes da dividida, ſaõ iguaes ao rectangulo das duas linhas inteiras. *Euclid. liv.* 2. *Propoſiçaõ* I.

Sejaõ as duas linhas AB, e AE, divida-ſe AE nas partes AD, CD, CE, e fique inteira a linha AB.



Devemos moſtrar, que o rectangulo de AB por AE, he igual aos rectangulos feitos de AB por cada huma das partes em que foy dividida AE, a ſaber, que $AB \times AE = AB \times AD + AB \times CD + AB \times CE$.

DEMONSTRAÇAM.

AS partes ſaõ iguaes ao todo, e aſſim tanto importa AE, como $AB + CD + CE$, e por conſequencia o meſmo he multiplicar AB por AE, como por A

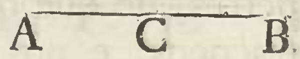
D

D + C D + C E: logo A B X A E = A B X A D + A B X C D + A B X C E, e he evidente o que ſe queria moſtrar.

PROPOSIC,AM II.

18 SE huma linha recta ſe dividir, como quizerem, os rectangulos comprehendidos da toda por cada huma das ſuas partes, ſaõ iguaes ao quadrado de toda a linha. *Eucl. liv. 2. Prop. 2.*

Seja a linha A B dividida em duas partes no ponto C, e ſeja A B = a, e A C = b, e B C = d, como o todo he igual ás ſuas partes, ſerá a = b + d: logo o



meſmo he multiplicar a por a, que multiplicar a, pelas ſuas partes b + b, e por conſequencia a a = a b + a d, e aſſim o quadrado da toda A B, ou a a igual aos rectangulos da toda A B, e das ſuas partes A C, e C B, e he o que ſe queria moſtrar.

PROPOSIC,AM. III.

19 SE ſe dividir huma linha, como quizerem em duas partes, o rectangulo da toda, e de huma de ſuas partes, he igual ao rectangulo das duas partes, e mais ao quadrado da outra parte. *Euclid. liv. 2. Prop. 3.* (*fig. idem.*)

Seja a linha A B dividida em duas partes como quizerem no ponto C, devemos moſtrar, que A B X A C = A C X B C + $\overline{AC}^2$ (*num.* 11.)

Seja A B = a, e A C = b, e B C = d, e como A C + C B = A B aſſim tambem a = b + d, e multiplicando a, e b + d pelo meſmo mulplicador b, ſeráõ os porductos iguaes a b = b d + b d; mas ab he rectangulo de A B por A, e b d + bb he o rectangulo feito das partes b, e d, e o quadrado da parte b; logo he evidente o que ſe queria moſtrar.

PRO-

PROPOSIC,AM. IV.

20 SE ſe dividir huma linha, como quizerem, em duas partes; digo, que o quadrado de toda a linha he igual a cada hum dos quadrados das partes, e mais a dous rectangulos, feitos de huma parte por outra. *Euclid. liv. 2. Prop. 4.*

Seja a linha AB dividida no ponto D devemos moſtrar, que $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + 2\,AD \times DB + \overline{DB}^2$.

Ponhamos $AD = b$, e $DB = d$: logo $AB = b + d$; mas o quadrado de $b + d$ he $b^2 + 2\,bd + d^2$ (*num.* 8.) logo $\overline{AB}^2 = bb + 2bd + dd$, e he o que ſe queria moſtrar.

A D B

PROPOSIC, AM V.

21. SE huma linha ſe dividir em duas partes iguaes, e em duas deſiguaes, o rectangulo feito das duas partes deſiguaes com o quadrado da parte intremedia, ſaõ iguaes ao quadrado da metade da linha. *Euclid. liv. 2. Prop. 5.*

A linha AB he dividida no ponto C igualmente, e deſigualmente em D, digo, que $AD \times DB + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$. Seja AC, ou $CB = a$, e $CD = b$: logo $DB = a - b$, e $AD = a + b$, mas o rectangulo de $a + b$ por $a - b$, he $aa + ab + ab + bb$ (*num.* 8.) mas $+ ab - ab = 0$: logo eſſe rectangulo he $aa - bb$, e por conſequencia $AD \times DB = aa - bb$, logo ajuntando de huma, e de outra parte da igualaçaõ bb, ou $\overline{CD}^2 = bb$, ſerá $AD \times DB + \overline{CD}^2 = aa$, o que ſe queria moſtrar.

A C D B

Para ajuntar bb, ã $aa - bb$, baſta ſuprimir $- bb$; pois he evidente, que $aa - bb + bb = aa$, e aſſim $+ bb - bb$ ſe deſvaneſſem, como ſe expjicou (*num.* 6.)

PRO-

PROPOSIC,AM VI.

22 SE a huma linha recta dividida pelo meyo, se ajuntar outra linha, o rectangulo feito da toda, e da acrescentada (como de huma só linha) pela acrescentada, com o quadrado da metade da toda, saõ iguaes ao quadrado da metade da toda, e da acrescentada, como de huma só linha. *Euclid. liv* 2. *Prop.* 6.

Seja a linha A B cortada pelo meyo no ponto C, e se lhe ajunte direitamente a linha recta B D, devemos mostrar, que $AD \times BD + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$. Seja A C, ou C B $= b$: logo $AB = 2b$, e $\overline{BC}^2$, ou $\overline{AC}^2 = bb$, e seja $BD = d$: logo $CD = b + d$, e $2b + d = AD$; e assim $AD \times BD = 2bd + dd$, e $AD \times BD + \overline{BC}^2 = 2bd + dd + bb$; mas o quadrado de C D, ou de $b + d$, he $bb + 2bd + dd$ (*num.* 8.) logo $AD \times BD + \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$; e he o que se queria mostrar, a saber, que o rectangulo $AD \times BD$, e mais o quadrado de A C, ou B C eraõ iguaes ao quadrado de C D.

A C B D

PROPOSIC,AM VII.

23 SE huma linha se dividir à vontade, o quadrado da toda, e o de huma de suas partes seraõ iguaes ao quadrado da outra parte, e a dous rectangulos feitos da toda, e da parte primeira tomada. *Euclid. liv.* 2. *Prop.* 7.

A linha A B foy cortada à vontade no ponto C: devemos mostrar, que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AB \times BC + \overline{AC}^2$.

Seja $AC = b$: logo $\overline{AC}^2 = bb$. Seja $BC = d$: logo $\overline{BC}^2 = dd$; pois que $AB = b + d$: logo $\overline{AB}^2 = bb + 2db + dd$ (*num.* 8.) e $AB \times BC = bd + dd$. Dobrando essas duas grandezas $2AB \times BC = bd + 2dd$, e ajuntando-lhe $\overline{AC}^2$, ou sua igual bb dará esta igua-

A C B

laçaõ $2\,AB \times BC + \overline{AC}^2 = 2bd + 2dd + bb$, e por conſequencia igual a $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; e he o que ſe queria demonſtrar.

PROPOSIC,AM VIII.

24 SE huma linha recta ſe dividir á vontade quatro vezes, o rectangulo comprehendido da toda, e de huma de ſuas partes, com o quadrado da outra parte, ſaõ iguaes ao quadrado da toda, e da parte primeira tomada, como de hũa ſó linha. *Eucl. liv.* 2. *Prop.* 8. (*figura idem.*)

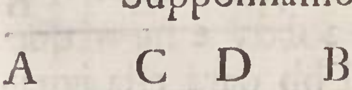
Seja AB a linha cortada á vontade no ponto C. Devemos moſtrar, que $4\,AB \times BC + \overline{AC}^2$ he igual ao quadrado de huma linha igual a $AB + BC$.

Seja $AC = b$, e $BC = d$: logo $AB = b + d$, e $AB + BC = b + d + d$, ou $b + 2d$, cujo quadrado he $bb + 4bd + 4dd$ (*num.* 8.) que ſerà igual ao quadrado de $AB + BC$; mas $AB \times BC = bd + dd$; pois que $AB = b + d$, e $CB = d$: logo $4\,AB \times BC = 4bd + 4dd$, e ajuntando de huma parte $\overline{AC}^2$, e da outra bb, ſua igual, temos $\overline{AC}^2 + 4\,AB \times BC = bb + 4bd + 4dd$, que he o meſmo valor, que ſe achou pelo quadrado da linha $b + 2d = AB + BC$; e aſſim o quadrado de $AC + 4\,AB \times BC$, ſaõ iguaes ao quadrado da linha $AB + BC$; e he o que ſe queria demonſtrar.

PROPOSIC,AM IX.

25 SE huma linha ſe dividir em duas partes iguaes, e duas deſiguaes, os quadrados das duas partes deſiguaes, ſaõ o dobro do quadrado da metade da toda, e do quadrado da parte intermedia. *Euclid. liv.* 2. *Prop.* 9.

Supponhamos a linha AB dividida em duas partes iguaes no ponto C, e em duas deſiguaes no ponto D. Devemos moſ-



moſtrar, que o quadrado de A D, e mais o quadrado de D B ſaõ ambos o dobro do quadrado de A C, e mais de C D. Deſta ſórte $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$.

Seja A C, ou B C $= b$, ſeja C D $= d$: logo A D $= b + d$, e D B $= b - d$, e ſerá $\overline{AD}^2 = bb + 2bd + dd$ (*num.* 8.) e $\overline{DB}^2 = bb - 2bd + dd$, teremos mais $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = bb + 2bd + 2dd - 2bd$; e pois que $+ 2bd - 2bd$ ſe deſvanecem: logo $\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = 2bb + 2dd$; que ſaõ o dobro de $\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$; e he o que ſe queria moſtrar.

PROPOSIÇAM X.

26 SE huma linha recta ſe dividir em duas partes iguaes, e ſe ſe lhe ajuntar por direito outra qualquer linha, o quadrado da toda, e da acreſcentada, conſiderada como huma ſó linha, com o quadrado da acreſcentada, ſeràõ o dobro do quadrado da metade da toda, com o quadrado da dita metade, e da acreſcentada (como de huma ſó linha) *Euclid. liv.* 2. *Prop.* 10.

A linha A B ſe cortou pelo meyo no ponto C, e ſe lhe ajuntou a linha B D. Devemos moſtrar, que o quadrado de A B + B D, e mais o quadrado de B D ſaõ o dobro do quadrado de B C, e C D; deſta ſórte $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{BC}^2 + 2\overline{DC}^2$.

A C B D

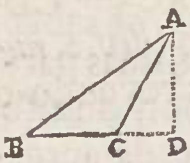
Seja A C, ou B C $= b$: logo $\overline{BC}^2 = bb$, e A B $= 2b$: logo $\overline{AB}^2 = 4bb$. Seja B D $= d$: logo A D $= 2b + d$, e $\overline{AD}^2 = 4bd + 4bd + dd$: logo o quadrado de A B + B D com o quadrado de B D he igual a $4bb + 4bd + 2dd$; mas o quadrado B C, ou bb com o quadrado de B C + B D, ou $b + d$ he $2bb + 2bd + dd$ metade de $4bb + 4bd + 2dd$; e he o que ſe queria demonſtrar.

PRO-

PROPOSIÇAM XI.

27 EM todo o triangulo obtuzangulo (a que tambem chamaõ ambligonio) o quadrado do lado , que he baze do angulo obtuzo , he igual aos quadrados feitos ſobre os outros dous lados , e mais duas vezes o rectangulo do lado, ſobre que cahe a perpendicular (altura do triangulo) e do prolongo deſſe até a perpendicular. *Euclid. liv.* 2. *Prop.* 11.

O triangulo ABC he obtuzangulo, e o angulo ACB he o obtuzo, e AD ſe ſuppoem cahir perpendicular ſobre o lado BC prolongado : iſto ſuppoſto, devemos moſtrar, que o quadrado da baze AB, he igual aos quadrados dos outros dous lados AC, e BC, e mais a duas vezes o rectangulo feito do lado BC, e do ſeu prolongo, ou parte produzida CD, ſobre que cahe a perpendicular, cujo prolongo fica entre o angulo obtuzo, e a perpendicular; o que ſe expreſſa deſta ſorte: $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$.



Sendo o angulo ADB recto (*liv.* 2. *n.* 139.) $\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$; e pela meſma razaõ $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$; mas $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + 2BC \times CD + \overline{CD}^2$ (*num.* 20.) ſubſtituindo pois eſta grandeza em lugar de $\overline{BD}^2$; e em lugar de $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$, a grandeza $\overline{AC}^2$, teremos $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2BC \times CD$; e he o que ſe queria moſtrar.

PROPOSIÇAM XII.

28 EM todo o triangulo acutangulo (a que tambem chamaõ oxigonio) o quadrado de hum de ſeus lados he igual aos quadrados dos outros dous lados, menos duas vezes o rectangulo feito de hum dos ditos outros dous lados, e de huma das ſuas partes comprehendida entre a perpendicular, que a corta, e o angulo

gulo o oppoſto ao lado primeiramente tomado. *Euclid. liv.* 2. *Prop.* 12.

Suppondo que o triangulo ABC he acutangulo, e que AD he huma perpendicular, que cahe ſobre o lado BC: devemos moſtrar, que o quadrado do lado AB he igual aos quadrados dos outros dous lados AC, e BC, menos duas vezes o rectangulo do lado BC, e da ſua parte CD comprehendida entre a perpendicular AD, e o angulo C oppoſto ao lado AB primeiramente tomado; o que ſe póde expreſſar deſta ſorte: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$, ſendo recto o angulo ADC, $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ (*liv.* 2. *num.* 139.) e tirando $\overline{CD}^2$ de huma, e outra parte da igualaçaõ recta $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$ eſta diminuiçaõ ſe faz, como fica dito (*liv.* 2. *numero* 139.) aonde eſtava com o ſinal $+$, e eſcrevendo-o da outra parte com o ſinal $-$.

Pois que ADB he recto: logo (*l.* 2. *n.* 142.) $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2$; mas $BD = BC - CD$, o quadrado de $BC - CD$ he $\overline{BC}^2 - 2BC \times CD + \overline{CD}^2$, e aſſim $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - 2BC \times CD + \overline{CD}^2$, e pondo na igualaçaõ em lugar de $\overline{AD}^2$, e $\overline{BD}^2$ as grandezas, q̃ lhe ſaõ iguaes, teremos $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD + \overline{CD}^2$; e como $- \overline{CD}^2 + \overline{CD}^2 = 0$ fica a igualaçaõ $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$; e he o que ſe queria demonſtrar.

Eſtas propoſiçoens do liv. 2. de Euclides ſe moſtraráõ por methodo mais facil, e mais breve na terceira parte deſta obra, em que ſe propoem eſtas verdades geraes, e aqui foraõ aplicadas ás linhas, que ſenaõ podem bem notar, ſenaõ por duas letras nos ſeus dous extremos.

CAPITULO III.

Das razoens, e proporçoens das linhas, das ſuperfices, e dos ſolidos.

NO's podemos conſiderar o que he huma linha em ſi meſma, ou o que ella he a reſpeito de outras linhas, o qual reſpeito, relaçaõ, ou ordem, que as linhas, ſuperfices, e ſolidos pódem ter humas com as outras ſe chama *razaõ*; o que ſe faz por comparaçaõ, como conſiderando huma linha de dez palmos a reſpeito de outra de cinco, ſe diz a primeira dupla da ſegunda, e o meſmo he das ſuperfices, e dos ſolidos.

Tambem ſe pódem conſiderar duas linhas, ſegundo huma ſe diz menor, ou mayor, que outra, e o exceſſo da mayor ſobre a menor ſe chama *diferença*, ou tambem ſe póde conſiderar o numero das vezes, que huma contém, ou he contheuda na outra, o que faz duas ſortes de reſpeitos; ao primeiro chamaõ diferença, e ao ſegundo chamaõ *razaõ*. Aqui naõ tratamos da razaõ chamada diferença arithmetica, de que os Geometras uſaõ mui pouco; mas ſó trataremos da razaõ geometrica nas definiçoens ſeguintes.

DEFINIÇAM I.

29 A Razaõ de huma linha a outra linha, de hum plano a outro plano, e de hum ſolido a outro ſolido, he a quantidade relativa, que ſe acha entre as duas linhas comparadas huma com outra, o que melhor ſe explicará na terceira parte deſta obra aonde toca.

De ſer a razaõ huma quantidade naõ abſoluta, mas relativa, ſe ſegue, que huma linha póde conter, ou ſer contheuda em outra, hum certo numero de vezes,

zes, que he o que se considéra quando duas linhas se comparaõ, é nisto se distingue a razaõ geometrica, da arithmetica, que só considéra os excessos, ou diferenças das cousas comparadas.

O modo de conhecer o como huma grandeza he contheuda, ou contém outra grandeza, he pela divisaõ, como, por exemplo, a razaõ da linha A para a linha B se conhece, dividindo B por A, que se nota a modo de numeros quebrados; desta sorte $\frac{B}{A}$, ou $\frac{A}{B}$; porque esta expressaõ expoem, ou declara quantas vezes A he contheudo em B, e a parte B se chama expoente da razaõ de A para B.

DEFINIC,AM II.

30 HUma razaõ, cujo expoente se póde expressar por numeros, se chama razaõ *de numero a numero.*

O expoente declara o modo, com que huma grandeza he contheuda em outra, ou que ella a contém, a saber, ella he o expoente da divisaõ das duas grandezas, dividida huma por outra. Se o expoente, ou quociente da divisaõ he hum numero, como se a linha B fosse contheuda em A 6 vezes, a razaõ dessas duas linhas A, e B será razaõ de numero a numero.

DEFINIC,AM III.

31 HUma razaõ, cujo expoente senaõ póde expressar por algum numero, se chama *surda*, ou *irracional.*

Se senaõ achar numero algum, que possa declarar inteiramente quantas vezes a linha A contém, ou he contheuda na linha B, a razaõ dessas duas linhas se chama razaõ *surda*, como em outra parte se verá.

DE-

DEFINIC, AM IV.

32 A Igualdade de razoens ſe chama *proporçaõ.* Havendo a meſma razaõ de A para B, que de C para D diremos, que eſſas quatro grandezas ſaõ proporcionaes, o que por abreviaçaõ ſe nota deſta ſorte.

$$A \,.\, B :: C \,.\, D$$

Fica dito, que a razaõ de A para B ſe póde expreſſar deſta ſorte $\frac{A}{B}$, e tambem a razaõ de C. D do meſmo modo $\frac{C}{D}$, e por conſequencia tambem a razaõ deſſas quatro grandezas, que conſiſte na igualdade ſe póde expreſſar deſta ſorte. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

DEFINIC, AM V.

33 O Primeiro termo de huma razaõ ſe chama *antecedente*, e o outro termo *conſequente.*

A razaõ deſta definiçaõ he; porque intercede comparaçaõ entre a grandeza, que ſe refere, ou diz reſpeito a outra grandeza, e aquella, a que he referida, ou diz reſpeito, e toda a comparaçaõ pede dous termos.

DEFINIC, AM VI.

34 T Oda a proporçaõ tem dous antecedentes, e dous conſequentes.

A razaõ he; porque a proporçaõ he huma igualdade de razoens comparadas, e como cada razaõ pede dous termos, duas razoens pedem quatro.

DEFINIC, AM VII.

35 H Um meſmo termo póde ſervir de antecedente, e de conſequente em huma meſma

ma proporçaõ, quando ella he continua.

Se A.B::B.C, o que ſaz duas razoens iguaes, e por conſeguinte hũa proporçaõ, em que B ſerve de conſequente da primeira razaõ, e de antecedente na ſegunda.

Quando a proporçaõ he continua ſeja de 3, ou de mais termos, ſe há de expreſſar deſta ſorte.

∺ A. B. C

DEFINIC,AM VIII.

36 HUma proporçaõ continua de mais de quatro termos, ſe chama *progréſſaõ*.

Se A para B, como B para C, e B para C, como C para D, e C para D como D para E, e aſſim por diante, iſto ſe chama progréſſàõ, e ſe nota deſta ſorte.

∺ A.B.C.D.E. &c.

DEFINIC,AM IX.

37 QUando de huma parte há hum certo numero de grandezas, como, por exemplo, 3, e da outra parte outras 3; ſe ellas ſe compararem juntas, em primeiro lugar, a primeira com a ſegunda de huma parte, e a quarta com a quinta; em ſegundo lugar, a ſegunda com a terceira, e a quinta com a ſexta, eſtando em proporçaõ, lhe daremos o nome de proporçaõ ordenada.

Seja A.B.C de huma parte, e D.E.F da outra: ſe A.B::D.E, e B.C::E.F a proporçaõ he ordenada.

DEFINIÇAM X.

38 TOmando tres grandezas de huma parte, e tres da outra, se compararmos a primeira com a segunda, e a quinta com a sexta, e ellas forem em proporçaõ, e que mudando de ordem se compare a segunda com a terceira, e a quarta com a quinta, e que ellas sejaõ ainda em proporçaõ, esta se chamará proporçaõ *perturbada*.

Sejaõ A.B.C e (D.E.F
12. 8. 4 (12.6.4

Se A.B::E.F, e B.C::D.E, esta proporçaõ se chama perturbada, em razaõ de naõ seguir a mesma ordem.

DEFINIÇAM XI.

39 O Primeiro, e ultimo termo da proporçaõ se chamaõ *extremos*, e o segundo, e terceiro se chamaõ *meyos*.

Nesta proporçaõ A.B::C.D os termos A, e C, saõ os antecedentes, B, e D os consequentes; mas o primeiro A, e o ultimo D saõ os extremos, e B, e C os meyos.

DEFINIÇAM XII.

40 OS termos homologos de huma proporçaõ saõ, os que se achaõ em hum mesmo lugar, ou que tem o mesmo nome.

Nesta proporçaõ A.B::CD; A, e C saõ termos homologos, que saõ ambos antecedentes, e B, e D da mesma sorte saõ homologos, por terem ambos o mesmo nome de consequentes, e serem ambos segundos na ordem da proporçaõ.

PROPOSIC,OENS EVIDENTES, QUE RESPEITAM *as razoens, e proporçoens.*

PROPOSIC,AM I.

41 AS razoens iguaes tem iguaes expoentes, e iguaes consequentes.

Os expoentes declaraõ o modo, com que o termo de huma razaõ contém, ou he contheudo no outro; e se os antecedentes, por exemplo, de duas razoens contém, ou saõ igualmente contheudos nos seus consequentes, dividindo-se, devem ter expoentes iguaes; como nesta proporçaõ 4 . 2 : : 6 . 3, se dividirmos 4 por 2, será 2 o seu expoente, e o mesmo expoente acharemos dividindo 6 por 3; e como tem iguaes expoentes saõ as razoens iguaes; o que na Arithmetica se chama consequente, chamaõ os Geometras expoente.

PROPOSIC,AM II.

42 GRandezas desiguaes naõ podem ser expoentes de razoens iguaes.

Seja X o expoente da razaõ de A para B, e de C para D, essas duas razoens, que tem o mesmo expoente devem ser iguaes, o que naõ succederia se X fosse mayor, ou menor na primeira razaõ, do que na segunda.

LEMMA.

43 O Primeiro termo de huma razaõ he igual ao segundo multiplicado pelo expoente dessa mesma razaõ.

Seja A o primeiro termo, ou antecedente da razaõ de A para B, o quociente desta razaõ seja Q, que nota, ou he o sinal de quantas vezes A he contheudo do em B: logo tomado outras tantas vezes, quantas he contheudo, ou multiplicado (*num.* 4.) deve ſer igual a B; e aſſim A Q = B, o que ſe queria moſtrar.

Qualquer proporçaõ póde começar por antecedente mayor, que o conſequente, como 6 para 3, ou por menor, como 3 para 6; mas daqui por diante ſempre devemos entender, que as razoens, de que tratarmos tem ſempre os ſeus antecedentes menores, que os conſequentes, para evitar confuſaõ; e porque ſempre os expoentes ſaõ numeros inteiros, principalmente paſſando as razoens a progreſſoens; porque aſſim ſaõ ſempre as razoens de numero a numero, e as razoens ſe chamaõ de menor deſigualdade, ſendo menores os antecedentes.

PROPOSIC,AM III.

44 QUatro termos ficaõ ſempre proporcionaes, ainda que recebaõ varias mudanças, como ſempre o primeiro antecedente ſeja na primeira razaõ, como o ſegundo antecedente para o ſeu conſequente.

He o meſmo, que a ſua definiçaõ.

PROPOSIC,AM IV.

45 SE quatro grandezas forem proporcionaes, e dos antecedentes ſe fizerem conſequentes, e dos conſequentes antecedentes, ficará ſempre a meſma proporçaõ.

Se A. B :: C. D, devemos moſtrar, que B. A :: D. C. Conter, e ſer contheudo ſaõ termos reciprocos; e aſſim, ſe A contém a B, como C contém a D, tem por conſequencia igualdade de razaõ: Será logo B contheudo em A, como D contheudo em C; e aſſim neſ-

ta

ta mudança, que se chama *premutando* ficaõ sempre os termos proporcionaes, ainda que os antecedentes passem para consequentes, e os consequentes para antecedentes.

PROPOSIC, AM V.

46 SE quatro grandezas forem proporcionaes, alternando ficaõ sempre proporcionaes. *Euclid. liv. 5. Prop.* 16.

Alternar he tomar hum sim, outro naõ de qualquer sorte de grandezas postas por ordem; e assim nesta proporçaõ A.B::C.D alternando será A.C::B.D.

Devemos mostrar, que sendo proporcionaes A.B::C.D, tambem alternando seraõ proporcionaes A.C::B.D; seja Q o expoente dessas duas razoens (*num.* 43.) logo $AQ = B$, e $CQ = D$: logo em lugar de A.B::C.D posso fazer esta proporçaõ A.AQ::C.CQ; o que he evidente, pois que o quociente de C dividido por A he $\frac{C}{A}$ o mesmo, que de CQ dividido por AQ, q̃ he $\frac{CQ}{AQ}$; mas segundo as regras da divisaõ (*numer.*40.) podemos apagar Q em hum, e outro termo, e o resto he $\frac{A}{C}$, e assim essas duas razoens, tendo o mesmo expoente, saõ iguaes.

PROPOSIC, AM VI.

47 AJuntando aos dous termos de huma razaõ outros dous, que tenhaõ a mesma razaõ, o antecedente ao antecedente, e o consequente ao consequente, assim acrescentados teraõ sempre a mesma razaõ.

Sejaõ estas duas razoens A.B::C.D: devemos mostrar, que A+C.B+D::A.B; o expoente das razoens de A para B, e de C para D he Q: logo $AQ = B$, e $CQ = D$ (*num.* 43.) devemos mostrar, que A+

C. AQ + CQ :: A . B; o quociente de AQ + CQ dividido por A + C he Q (*num.* 43.) logo elles dous termos A + C, e AQ + CQ, tendo o mesmo expoente, que A, e AQ, ou A, e B (*num.* 41.) tem a mesma razaõ.

PROPOSIC, AM VII.

48 SE de dous termos de duas razoens diminuirmos outros dous termos, que tenhaõ a mesma razaõ, os antecedentes aos antecedentes, e os consequentes aos consequentes, depois desta diminuiçaõ ficaráõ sempre os termos diminuidos com a mesma razaõ, que tinhaõ.

Seja esta proporçaõ : A . B :: C . D, devemos mostrar, que A − C . B − D :: A . B; sendo Q o expoente dessas razoens será AQ = B, e CQ = D (*n.* 43.) resta mostrar, que A − C . AQ − CQ :: A . B; mas o quociente de AQ − CQ dividido por A − C he tambem Q: logo esses termos, tendo o mesmo expoente, conservaõ a mesma razaõ; e he o que se queria mostrar.

PROPOSIC, AM VIII.

49 QUatro grandezas em proporçaõ conservaõ a razaõ, que tem *compondo*, que vem a ser, comparando o antecedente mais o seu consequente com o mesmo consequente. *Euclid. liv.* 5. *Proposiçaõ* 18.

Na proporçaõ A . B :: C . D mostraremos, que A + B . B :: C + D . D. Em primeiro lugar, alternando A . C :: B . D (*num.* 46.) logo ajuntando a A, e a B os termos C, e D, que tem a mesma razaõ (*num.* 47.) logo A + B . C + D :: B . D, e tornando a alternar, será A + B . B :: C + D . D; e he o que se queria mostrar.

PRO-

PROPOSIÇAM IX.

50 SEndo quatro grandezas em proporçaõ, a soma dos antecedentes he para a soma dos consequentes, como cada antecedente para o seu consequente. *Euclid. liv. 5. Prop.* 12.

Seja A . B : : C . D : : E . F : devemos mostrar, que A + C + E . B + D + F : : A . B : : C . D : : E . F ; pela proposiçaõ antecedente A + C . C : : B + D . D, alternando A + C . B + D : : C . D ; mas a razaõ de C . D he a mesma, que de E . F : logo A + C . B + D : : E . F ; e assim alternando A + C . E : : B + D . F ; e pela mesma precedente A + C + E . B + D + F : : E . F, ou A . B, ou C . D ; pois he sempre a mesma razaõ ; e he o que se queria mostrar.

PROPOSIÇAM X.

51 QUatro grandezas em proporçaõ se conservaráõ sempre nella *dividindo*, a saber, sendo o primeiro antecedente, menos o seu consequente para o mesmo consequente, como o segundo antecedente, menos o seu consequente para o mesmo consequente. *Euclid. liv. 5. Prop.* 17.

Seja A . B : : C . D : devemos mostrar, que A − B . B : : C − D . D ; pois que A . B : : C . D : logo alternando A . C : : B . D, e tirando B de A, e C de D (*numero* 8.) será A − B . C − D : : A . C ; mas a razaõ de A . C he a mesma, que a de B . D, será A − B . C − D : : B . D : logo alternando A − B . B : : C − D . D ; e he o que se queria mostrar.

PROPOSIÇAM XI.

52 SE duas grandezas tiverem a mesma razaõ a huma terceira, ellas a teraõ entre si. *Euclid. liv. 5. Prop.* 9.

Seja

Seja A.B::C.B : logo A = C; e ſeja Q o expoente de A.B, e o ſerá tambem de C.B : logo AQ = B, e CQ = B (*num.* 43.) e aſſim AQ = B = CQ; eſſas duas grandezas ſaõ iguaes á terceira B, e aſſim ſaõ iguaes entre ſi (*axioma* 3.)

PROPOSIC, A M XII.

53 COmo duas grandezas (aſſim tambem duas razoens) iguaes a huma terceira, ſaõ iguaes entre ſi. *Euclid. liv.* 5. *Prop.* 11.

Seja A.B::E.F, e C.D::E.F: devemos moſtrar, que A.B::C.D; ſe o expoente da razaõ de A.B he Q; ſe E.F tem a meſma razaõ, o ſeu expoente ſerá tambem Q, e como A.B, e C.D tem tambem o meſmo expoente: logo ſaõ iguaes (*num.* 41.) e he o que ſe queria moſtrar.

PROPOSIC, A M XIII.

54 SE duas grandezas forem multiplicadas por huma terceira grandeza, ellas teraõ depois de multiplicadas a meſma razaõ, que de antes tinhaõ.

Supponhamos, que ſe multiplicou A, e B por X: devemos moſtrar, que AX.BX::A.B; o expoente da razaõ de A.B he $\frac{A}{B}$, e o expoente da razaõ de AX.BX he $\frac{AX}{BX}$; mas he hum meſmo expoente o que ſe acha por baixo da linha (*num.* 4.) logo apagando X, reſta $\frac{A}{B}$, que he a meſma razaõ, que eſtas grandezas tinhaõ antes de multiplicadas; e aſſim tendo a meſma razaõ depois de multiplicadas, e as razoens tendo o meſmo expoente (*num.* 4.) logo ſaõ iguaes.

PRO-

PROPOSIÇAM XIV.

55 SE duas grandezas ſe dividirem por huma terceira grandeza, conſervaraõ depois de divididas a meſma razaõ, que tinhaõ antes de ſe dividirem.

Sejaõ as duas grandezas, B, e D, e ſe dividaõ por X, e ſeja P o quociente de B multiplicado por X, o de D multiplicado por X, ſeja Q; devemos moſtrar, que P. Q : : B. D; mas P X = B, e Q X = D : logo P X . Q X : : B . D : P, e Q multiplicados por X (*propoſiçaõ precedente*) fazem P X . Q X : : P . Q; e aſſim, pois que P X . Q X : : P . Q : ſegue-ſe, que P . Q : : B . D (*num.* 33.) e he o que ſe queria moſtrar.

PROPOSIÇAM XV.

56 QUando quatro grandezas ſaõ proporcionaes, o producto, ou rectangulo dos extremos he igual ao rectangulo dos meyos. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 16.

Seja A . B : : C . D : devemos moſtrar, que A X D = B X C; ſeja X o expoente das duas razoens iguaes: logo A X = B, e C X = D; e aſſim poſſo expreſſar a expreſſaõ, deſta ſorte : A . A X : : C . C X : logo naõ ha mais, que moſtrar; porque A C X = A C X, o que he evidente.

COROLARIO.

57 DE tres grandezas em proporçaõ contínua, o rectangulo dos extremos he igual ao quadrado do termo do meyo. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 17.

Sejaõ ∺ A . B . C; pois que A . B : : B . C : logo A C = B B, ou A C = B^2, e &c.

PROPOSIÇAM XVI.

58 SE quatro grandezas ſe diſpozerem de ſorte, que o rectangulo dos extremos ſeja igual ao dos meyos, eſſas quatro grandezas ſeraõ proporcionaes. *Euclid. liv. 6. Prop.* 16.

Nas quatro linhas A, B, C, D, o producto de A D ſe acha igual ao producto de B C: devemos moſtrar, que ſaõ proporcionaes, e que A.B::C.D; ſeja X o quociente de $\frac{B}{A}$, e Z o de $\frac{D}{C}$: logo A X = B, e CZ = D, e reduzindo eſſes quatro termos, teremos A. A X::C.CZ; porque ſe ſuppoem A X C Z = A X X C, tirando de huma, e outra parte A X C reſtará Z = X; e aſſim o expoente de A.B igual ao expoente de C.D: logo ſaõ iguaes (*num.* 41.) e proporcionaes ás quatro grandezas, como ſe queria moſtrar.

COROLARIO I.

59 OS quatro termos de huma proporçaõ ſe podem mudar, ou trocar huns por outros; a condiçaõ, que dous meſmos termos ſejaõ ſempre os meyos, ou extremos; e deſta ſorte ſeraõ ſempre proporcionaes.

Neſtes quatro termos A.B::C.D, ſe A, por exemplo, e D, forem ſempre os extremos, ou meyos, ſeraõ ſempre os ſeus porductos iguaes, e por conſequencia proporcionaes. (*prop. antecedente.*)

COROLARIO II.

60 DIvidindo o producto dos meyos de huma proporçaõ pelo primeiro, o quociente da diviſaõ ſerá o quarto termo, e dividindo eſſe meſmo producto pelo quarto termo, o quociente dará o primeiro.

A ra-

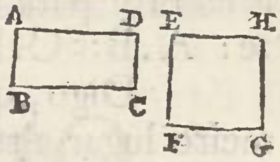
A razaõ he; porque o quociente, que multiplica o divisor torna a fazer o que a divisaõ tinha desfeito (*num.* 4.) &c.

Note-se, que estes dous corolarios tem grande uso em toda a Geometria, e na Arithmetica, e he o fundamento da regra de tres.

DEFINIC, AM.

61 O Producto de duas grandezas, sendo igual ao de outras duas (ellas poderáõ fazer huma proporçaõ) e se a primeira for para a terceira, como a quarta para a segunda, esta proporçaõ se chama *reciproca*, ou por outro nome *inversa*.

Sejaõ os dous rectangulos AC, e EG iguaes, se AB . EF :: FG . BC, esta proporçaõ se chamará *reciproca*, ou *inversa*, a qual começa, e acaba na mesma figura, se hum dos lados desses dous rectangulos for mayor, outro seu reciproco será menor.



PROPOSIC, AM XVII.

62 SE se tomar de huma parte qualquer numero de grandezas, e outras tantas de outra parte, aquellas, que tomadas de duas em duas, tiverem a mesma razaõ, seraõ proporcionaes. *Euclid. liv.* 5. *Proposiçaõ* 22.

Sejaõ tres grandezas A, B, C de huma parte, e outras tres de outra, e sejaõ D, E, F: devemos mostrar, que, se A . B :: D . E, e B . C :: E . F, em razaõ igual será A . C :: D . F; e assim em primeiro lugar, alternando B . F :: A . D, e B . E :: C . F (*num.* 46.) logo as duas razoens de A . B, e de C . F, sendo iguaes á terceira de B . E, B . E, ſaõ entre ſi iguaes (*num.* 53.) e por conſequencia A . D :: C . F, e em ſegundo lugar, alternando A . C :: D . F; e he o que ſe queria demonſtrar.

PROPOSIÇAM XVIII.

63 SE tomadas tres grandezas de huma parte, e tres da outra, e comparadas de duas em duas, for a primeira para a ſegunda, como a terceira para a quarta, e a quinta para a ſegunda, como a ſexta para a quarta, a primeira, e mais a quinta ſerá para a ſegunda, como a terceira, e mais a ſexta para a quarta. *Euclid. liv.* 5. *Prop.* 24.

Sejaõ A, B, C, D, E, F ſeis grendezas; ſe a primeira A he para a ſegunda B, como a terceira C para a quarta D, e a quinta E para a ſegunda B, como a ſexta F para a quarta D; o que ſe expreſſa deſta ſorte: A . B :: C . D, e E . B :: F . D.

Digo, que A + E . B :: C + F . D; porque em primeiro lugar alternando (*num.* 46.) A . C :: B . D, e E . F :: B . D : logo A . C :: E . F, e tambem A + E . C + F :: A . C (*numero* 50.) e pois que A . C :: B . D : logo A + E . C + F :: B . D (*num.* 47.) e alternando A + E . B :: C + F . D; e he o que ſe queria moſtrar.

CAPITULO IV.

Das razoens compoſtas, e ſuas propriedades.

HUma razaõ ſe chama ſimples, quando o ſeu expoente ſenaõ entende haver ſido multiplicado pelo expoente de outra razaõ; porque neſſe caſo a razaõ ſe chama compoſta.

DEFI-

DEFINIÇAM I.

64 AS razoens compoſtas ſaõ aquellas, cujos expoentes ſaõ feitos pela multiplicaçaõ de huma, ou de muitas razoens.

Seja a razaõ de A para B, e o ſeu expoente X; ſe eſte expoente X = Z Y he ſinal, que a razaõ de A para B he compoſta da razaõ de C para D, e de E para F, cujos expoentes eraõ Z Y; e aſſim, ſendo X = Z Y, a razaõ de A para B ſe diz compoſta.

DEFINIÇAM II.

65 HUma razaõ compoſta de duas razoens iguaes ſe chama *duplicada*.

Se o expoente da razaõ de A para B for feito de Z multiplicado por Z, ſerá Z Z o expoente deſta razaõ, e ſe dirá duplicada.

COROLARIO.

66 SEgue-ſe, que os expoentes, ſendo quadrados, a razaõ deve ſer ſempre duplicada.

Sendo Z Z, ou Z^2 o expoente da razaõ de A para B, e feito de Z multiplicado por Z, eſſes dous expoentes iguaes, formando hum quadrado, ſaõ expoentes da razaõ duplicada.

DEFINIÇAM III.

67 HUma razaõ compoſta de tres razoens iguaes ſe chama *triplicada*.

COROLARIO.

68 SEgue-ſe, que a razaõ, cujo expoente he hum cubo feito de tres expoentes iguaes, he triplicada.

THEOREMA I.

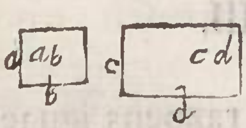
69 MUitas grandezas juntas, e ſeguindo-ſe humas a outras, a razaõ da primeira para a ultima he compoſta de todas as intermedias.

Sejaõ as grandezas A, B, C, D, E, F, &c. devemos moſtrar, que a razaõ de A para C he compoſta das razoens de A para B, e de B para C. Seja X o expoente de A para B: logo A X = B; ſeja Z o expoente da razaõ de B para C: logo B Z, ou A X Z = C; e aſſim poſſo mudar as tres grandezas A, B, C neſta ſuas iguaes A, A X, AXZ; divido A X Z por A, o quociente da diviſaõ he X Z, expoente da razaõ de A para A X Z.

THEOREMA II.

70 A Razaõ de dous planos he compoſta das razoens, que tem os ſeus lados de huns para outros de comprimento a comprimento, e de largura a largura.

Sejaõ os dous planos a b, e c d: devemos moſtrar, que a ſua razaõ he compoſta da razaõ dos ſeus lados de a . c, e de b . d: ſeja Z o expoente da razaõ de a para c: logo (*numero* 43.) a z = c; ſeja X o de b para d; e aſſim b x = d, e a z b x = c d: logo dividindo a z b x por a b, o quociente ſerá z x, que ſaõ os dous expoentes multiplicados hum por outro: logo eſſes dous planos ſaõ em razaõ compoſta dos ſeus lados, como de a para c, e de b para d; e he o que ſe queria moſtrar.



Deve-

Deve-ſe advertir, que os planos, ou ſolidos, de que aqui tratamos, ſaõ rectangulares.

THEOREMA III.

71 A Razaõ de hum ſolido a outro ſolido he compoſta da razaõ, que tem os tres lados de hum para os tres lados do outro.

Sejaõ os dous ſolidos a b c, e d e f. Devemos moſtrar, que a ſua razaõ he compoſta das tres razoens $\frac{a}{d}$ $\frac{b}{e}$ $\frac{c}{f}$, e a razaõ deſſes dous ſolidos ſe póde expreſſar deſta ſorte $\frac{abc}{def}$; mas eſte expoente he feito das razoens ſobreditas, ou compoſta dos lados deſſes dous ſolidos: logo (definiçaõ) eſſes dous ſolidos ſaõ entre ſi em razaõ compoſta de ſeus lados.

THEOREMA IV.

72 QUando quatro grandezas ſaõ proporcionaes, o producto dos antecedentes, he para os conſequentes em razaõ duplicada de cada antecedente para o ſeu conſequente, ou como os ſeus quadrados.

Seja a . b : : c . d, o producto a c dos antecedentes he para b d, porducto dos conſequentes em razaõ compoſta de a para b, e de c para d; e como ſaõ iguaes, a razaõ he duplicada (*num.* 65.) o quadrado a a do antecedente a, he para b b do conſequente b em razaõ compoſta das razoens iguaes de a para b, e de a para b; e por conſequencia duplicada deſſas duas razoens; porem ellas ſaõ as meſmas, que as duas de a para b, e de c para d: logo o producto a c he para o producto b d, como o quadrado a a para o quadrado b b; e he o que ſe queria demonſtrar.

CORO-

COROLARIO.

73 OS planos ſemelhantes, a ſaber, cujos lados ſaõ proporcionaes, eſtaõ entre ſi em razaõ duplicada da razaõ dos lados de hum para os lados do outro.

A ſua razaõ he compoſta da que tem os lados de hum para os lados do outro (*num.* 70.) e como eſſas razoens ſaõ iguaes : logo a razaõ he duplicada (*numero* 65.) deſta ſorte, como os quadrados ſaõ planos ſemelhantes, tem entre ſi a razaõ duplicada dos ſeus lados.

THEOREMA V.

74 SEndo ſeis grandezas proporcionaes o producto dos ſeus tres antecedentes he para o dos ſeus tres conſequentes em razaõ triplicada de cada antecedente para o ſeu conſequente, ou como o cubo de cada antecedente para o cubo do ſeu conſequente.

Sejaõ a . b . c :: d . e . f, o producto a b c he para o producto d e f em razaõ compoſta de a para d, de b para e, e de c para f (*num.* 71.) mas eſſas tres razoens ſaõ iguaes: logo fazem a razaõ compoſta triplicada (*numero* 67.) a razaõ de a a a, cubo de a, he para d d d, cubo de d, em razaõ triplicada de a para d; porque he a meſma, que a de a para d, de b para e, e de c para f, e por conſequencia os productos, de que ſe trata, ſaõ entre ſi, como o cubo de cada antecedente para o cubo do ſeu conſequente.

COROLARIO.

75 OS ſolidos ſemelhantes, a ſaber, que tem os lados proporcionaes, ſaõ em razaõ triplicada da que tem os lados de hum para os lados do outro.

Os

Os lados desses solidos fazem seis grandezas proporcionaes; e assim a razaõ de hum para outro he triplicada; como os cubos saõ solidos semelhantes, tem entre si a razaõ triplicada dos seus lados.

THEOREMA VI.

76 EM huma progressaõ geometrica, a razaõ de dous termos, entre os quaes ha dous intervallos, he duplicada, e se há tres, triplicada.

Seja ∺ A, B, C, D; a razaõ de A para C he composta, ou igual a huma razaõ composta de A para B, e a de B para C (*num.* 69.) mas esses termos postos em progressaõ tem as duas razoens iguaes, que a compoem: logo he razaõ duplicada (*num.* 65.) do mesmo modo mostraremos, que a razaõ de A para D he triplicada (*num.* 67.)

THEOREMA VII.

77 SEndo as grandezas proporcionaes saõ tambem proporcionaes os seus quadrados.

Se a.b::c.d, digo, que aa.bb::cc.dd; estes quadrados estaõ em razaõ duplicada dos seus lados (*numero* 73.) a saber, em razaõ duplicada de a.b, e de c.d; e como essas duas razoens saõ iguaes (supposiçaõ) assim seraõ tambem iguaes, as que as compoem, a razaõ de aa.bb: he logo igual á de cc.dd: logo saõ proporcionaes.

THEOREMA VIII.

78 SEndo as grandezas proporcionaes, tambem seraõ proporcionaes os seus cubos.

Seja a.b::c.d; digo, que $a^3.b^3::c^3.d^3$; porque a razaõ de $a^3.b^3$, e a de c^3 para d^3 saõ triplicadas de huma mesma razaõ (*num.* 75.) e assim saõ iguaes.

THEOREMA IX.

79 DE tres grandezas em proporçaõ contínua, o quadrado da primeira he para o quadrado da segunda, como a primeira para a terceira.

Seja ∸ a . b . c : digo, q̃ $a^2 . b^2 :: a . c$; a razaõ de a para c, he composta das duas razoens de a para b, e de b para c (*num.* 69.) e assim saõ iguaes, e a razaõ de a para c duplicada (*num.* 65.) mas a razaõ de a^2 para b^2 he tambem duplicada das mesmas razoens (*num.* 73.) logo $a^2 . b^2 :: a . c$.

THEOREMA X.

80 QUatro grandezas em proporçaõ contínua, o cubo da primeira he para o cubo da segunda, como a primeira para a quarta.

Sejaõ ∸ b . c . d . f; a razaõ de b . f he composta das tres razoens interpostas (*num.* 69.) e essas tres razoens, sendo as mesmas, que a razaõ de b para f, será esta triplicada (*num.* 67.) mas o cubo b^3 he para o cubo c^3 em razaõ triplicada da mesma razaõ (*numer.* 75.) logo $b^3 . c^3 :: b . f$.

THEOREMA XI.

81 SE tres grandezas de huma parte, e tres da outra, tomadas de duas em duas, estiverem em proporçaõ perturbada, essas grandezas em razaõ igual seraõ proporcionaes.

Sejaõ 3 grandezas A, B, C, e outras tres D, E, F, tomadas de duas em duas, teraõ a mesma razaõ; mas a proporçaõ será perturbada, a saber, que A . B :: E . F, e B . C : : D E : devemos moſtrar, que A . C : : D . F.

A razaõ de A para C he compoſta das razoens de A para B, e de B para C : tambem a de D para F he compoſta das razoens de D para E, e de E para F; mas eſſas duas razoens ſaõ compoſtas de razoens iguaes; porque A . B : : E . F, e B . C : : D . E : por conſequencia, ſendo iguaes as razoens, componentes, o ſeraõ tambem as compoſtas : logo A . C : : D . F; o que ſe queria demonſtrar.

e F. C :: D E devemos mostrar, que A. G :: D. E.

A razaõ de A para C he composta das razoens de A para B, e de B para C : e tambem a de D para F he composta das razoens de D para E, e de E para F : mas estas duas razoens saõ componentes destas: porque A. B :: E. F, e B. C :: D. E; por consequencia, sendo iguaes as razoens componentes, seraõ tambem as compostas : logo A. C :: D. F, o que se queria demonstrar.

GEOMETRICA

LOGICA GEOMETRICA, LIVRO IV.

DAS RAZOENS, E PROPORÇOENS DAS linhas, dos triangulos, das figuras, assim dos lados, como dos seus contornos, e superfices.

CAPITULO I.

Modo de achar, e demonstrar as proporçoens das linhas.

DEFINIÇAM I.

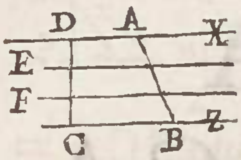
1 Chamamos espaço paralélo, o que se acha entre duas paralélas.

Se A, e B forem duas linhas paralélas, o espaço, que ha entre ellas, se chama espaço paralélo.

LEMMA I.

2 SE se cortar hum espaço paralélo, ou a perpendicular, que o mede, por linhas paralélas, as linhas obliquas comprehendidas no espaço seraõ divididas em tantas partes, como a perpendicular.

Sejaõ X, e Z duas paralélas, que terminaõ o eſpaço, que a perpendicular D C mede, e A B ſeja huma linha obliqua comprehendida no eſpaço, ſe ſe dividir D C em tres partes, lançando as duas linhas paralélas E, e F; digo, que eſſas duas paralélas dividiráõ tambem em tres partes a obliqua A B; eſſas duas paralélas

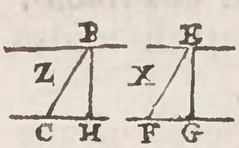


E, e F dividem todo o eſpaço paralélo comprehendido entre X, e Z em outros tres eſpaços paralélos, que ſe achaõ com a linha obliqua A B, como tambem D C: logo A B he dividido em tantas partes, quantas a perpendicular C D; e he o que ſe queria provar.

L E M M A II.

3 AS linhas obliquas, que nos eſpaços paralélos iguaes fazem os meſmos angulos, ſaõ iguaes, e igualmente obliquas.

Sejaõ X, e Z dous eſpaços paralélos iguaes, em que as linhas obliquas B C, e E F fazem angulos iguaes B C H, e E F G: digo, que eſſas duas obliquas ſaõ iguaes, e igualmente obliquas; dos pon-



tos B, e E ſe lancem as perpendiculares B H, e E G, as quaes ſaõ iguaes (*liv.* 1. *num.* 64.) e aſſim os triangulos B C H, e E F G ſaõ rectangulos, e inteiramente iguaes (*liv.* 2. *numero* 94.) e portanto B C, e E F ſaõ linhas iguaes, como tambem C H, e F G, e por conſequencia B C, e E F ſaõ igualmente obliquas (*liv.* 1. *num.* 54.) o que ſe queria moſtrar.

L E M M A III.

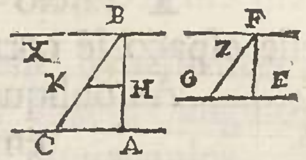
4 AS linhas obliquas, que fazem os meſmos angulos em eſpaços paralélos deſiguaes, ſaõ deſiguaes, e mayores, ſe for mayor o eſpaço, e menores,

ſe

ſe o eſpaço for menor.

As linhas B C, e F G obliquas nos eſpaços paralélos X, e Z fazem os meſmos angulos.

A perpendicular A B he mayor, que E F; e aſſim o eſpaço X he mayor, que o eſpaço Z: devemos moſtrar, que a obliqua F G he menor, que a obliqua B C. Sobre A B ſe tome a parte B H = E F, e por H ſe lance huma paraléla á baze A C; os dous triangulos A B C, E F G, ſendo rectangulos, o angulo B C A = F G E (*ſupoſiçaõ*) ſeraõ equiangulos (*liv.* 2. *num.* 78.) o angulo B K H = B C A, e B H K = B A C (*liv.* 2. *num.* 26.) e aſſim o triangulo B K H he equiangulo com B A C, e tambem com F G E, ſuppoſto F E = B H: logo F G = B K (*liv.* 2. *num.* 94.) mas B K he parte de B C: logo F G = B K, que he tambem parte de B C, e por conſequencia menor, como ſe queria moſtrar.



THEOREMA I.

5 Dividindo hum eſpaço paralélo por duas, ou mais paralélas, a perpendicular deſſe eſpaço, e a linha obliqua, que for lançada, ſeraõ divididas proporcionalmente.

Em primeiro lugar, a linha obliqua ſerá cortada em tantas partes, quantas a perpendicular (*lemma* 1.) ſe, por exemplo, a perpendicular for cortada em cém partes, a obliqua o ſerá tambem em outras tantas.

Em ſegundo lugar, ſe as partes da perpendicular forem entre ſi iguaes, o ſeraõ tambem as da obliqua (*num.* 3.) e por quanto eſſas obliquas fazem os meſmos angulos ſobre as paralélas (*liv.* 2. *num.* 26.) logo ſaõ iguaes, e igualmente obliquas.

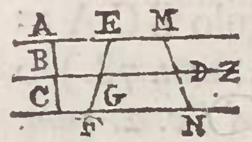
Em terceiro lugar, ſe as partes da perpendicular ſaõ deſiguaes, as da obliqua o ſeraõ tambem (*lemma* 2.) logo

logo essas linhas saõ cortadas, ou divididas proporcionalmente.

THEOREMA II.

6 TOdas as linhas obliquas em hum espaço paralélo saõ cortadas proporcionalmente, se esse espaço se cortar por huma linha paraléla.

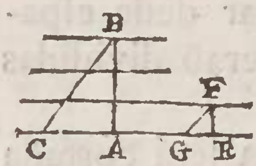
As obliquas E F, e M N entre duas paralélas, entre as quaes A C he perpendicular, e



este espaço he dividido por Z, huma paraléla: logo (*theorema precedente*) será MN.AC::MD.AB; e da mesma sorte, EF.AC::EG.AB, e alternando MN.MD::AC.AB::EF.FG: logo MN.MD::EF.EG, e premutando MN.EF::MD.EG; o que se queria mostrar.

THEOREMA III.

7 AS linhas obliquas, que fazem os mesmos angulos em espaços paralélos diferentes, saõ entre si, como esses espaços.



As linhas BC, e FG obliquas fazem os angulos BCA, e FGE iguaes: por consequencia se AB = EF (*num.* 3.) será BC = FG.

Se AB he mayor, que EF, BC será mayor, que FG (*num.* 5.) se AB for, por exemplo, o triplo de EF, BC será triplo de FG; porque, suppondo AB dividido em tres partes iguaes (*num.* 1.) BC será tambem dividido em tres partes, as quaes (*num.* 3.) seraõ cada huma igual a FG, pois fazem os mesmos angulos (*liv.* 2. *num.* 26.) e assim saõ igualmente obliquas, e BC he triplo de FG, como fica mostrado.

CAPI-

CAPITULO II.

Das razoens, e proporçoens dos lados dos triangulos.

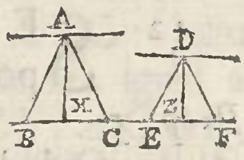
DEFINIÇAM I.

8 DOus triangulos ſe dizem ſemelhantes, quando os ſeus lados fazem angulos iguaes, ou quando ſaõ equiangulos.

DEFINIÇAM II.

9 NOs triangulos ſemelhantes, que ſe comparaõ, os lados oppoſtos a angulos iguaes ſe chamaõ lados *homologos.*

Sejaõ X, e Z dous triangulos ſemelhantes, ou equiangulos; cada hum dos ſeus lados, como AB, e DE oppoſtos aos angulos iguaes, C, e F, ſaõ lados homologos, a ſaber, proporcionaes; logo ſe moſtrará, que eſte nome lhe convém.



THEOREMA I.

10 DOus triangulos ſemelhantes tem os lados proporcionaes. *Euclid. liv. 6. Prop. 4.*

Pelo vertice dos triangulos ABC, e DEF ſe lancem linhas paralélas ás ſuas bazes, e do meſmo vertice para as bazes, as perpendiculares X, e Z (*figura precedente.*)

Os angulos ABC, e DEF ſaõ iguaes, as obliquas AC, e DF fazem os meſmos angulos: logo AB. DE :: X.Z :: AC.DF (*num. 7.*)

E aſſim tambem AB.DE :: AC.DF, e lançando por B, e E as linhas paralélas aos lados A C, e D F, moſtraremos da meſma ſorte, que A B . D E : : B C . E F: logo os dous triangulos ſemelhantes tem os ſeus lados proporcionaes.

THEOREMA II.

11 DOus triangulos ſemelhantes a hum terceiro, ſaõ ſemelhantes entre ſi. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 21.

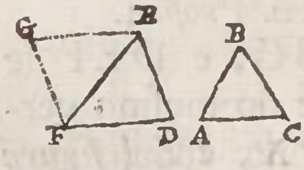
Sejaõ A, B, C tres triangulos; ſe A, e C ſaõ ſemelhantes a B, os angulos de B ſeraõ iguaes aos angulos de A, e de C: logo os angulos de A, e de C ſaõ tambem iguaes huns aos outros (*liv.* 3. *num.* 52.) ſegundo (*a definiçaõ num.* 8.) A, e C ſaõ ſemelhantes.

THEOREMA III.

12 SE dous triangulos tiverem os ſeus lados proporcionaes, ſeraõ ſemelhantes. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 5.

Os lados dos dous triangulos A B C, e D E F ſaõ taes, que da ſua diſpoſiçaõ ſe ſegue, que A B . B C : : F E . E D, e A C . A B : : D F . E F. Digo, que eſſes dous triangulos ſaõ ſemelhantes.

Faça-ſe ſobre o lado E F, o angulo G E F igual ao angulo A B C, e o angulo E F G = B A C, e aſſim E G F ſerá igual A C B (*liv.* 2. *num.* 78.) e por conſequencia E F G, e A B C ſaõ dous triangulos ſemelhantes (*num.* 80.) falta moſtrar, que os dous triangulos E F G, E F D ſaõ iguaes, e que E F D he o meſmo, que E F G, e ſemelhante a A B C.



Pois que E F G, e A B C ſaõ ſemelhantes : logo A B . B C : : E F . E G (*e pela ſuppoſiçaõ*) A B . B C : : E F.

F. E D : logo E G, e E D tem huma mesma razaõ, com E F, e saõ iguaes (*liv.* 3. *num.* 52.) da mesma sorte se mostrará, que todos os lados do triangulo E F G saõ iguaes aos do triangulo E F D; e he o que se queria mostrar.

THEOREMA IV.

13 DOus triangulos saõ semelhantes, quando tem hum angulo igual, e proporcionaes os lados, que o comprehendem. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 6.

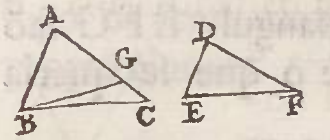
O angulo F E D (*figura idem*) he igual a A B C; e assim A B . B C : : F E . E D : digo, que A B C, e F E D saõ triangulos semelhantes. Para o provar, faço, como a cima, o triangulo E F G semelhante a A B C, e da mesma sorte, que a cima se mostra, que os triangulos E F G, e D E F saõ iguaes; porque A B . B C : : E F . E G : : E F . E D; e assim E G, e E D tem a mesma razaõ com E F : logo saõ iguaes (*liv.* 3. *num.* 52.) mas, pois que o angulo D E F he supposto igual ao angulo A B C : logo he tambem supposto igual a F E G, que se fez igual a A B C, e assim esses dous triangulos D E F, e G E F, tendo os dous lados iguaes E G, a E D, e E F, a E F, e os angulos F E D, e G E F, que esses lados comprehendem, sendo iguaes, seraõ tambem iguaes (*liv.* 2. *numero* 96.) logo, pois que D E F, e C B A saõ semelhantes a E G F, saõ tambem semelhantes entre si (*num.* 11.)

THEOREMA V.

14 SE dous triangulos tiverem hum angulo igual a hum angulo, e os lados á roda de hum, e outro angulo proporcionaes, sendo os terceiros angulos da mesma especie, ou agudos, ou obtuzos, esses dous triangulos seraõ equiangulos; e os angulos, que tem os lados proporcionaes, seraõ iguaes. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 7.

Sejaõ

Sejaõ esses dous triangulos A B C, e D E F; o angulo A he igual ao angulo D, e os lados, que comprehendem hum, e outro angulo proporcionaes. Digo, que, se C, e F saõ ambos da mesma especie, esses dous triangulos saõ equiangulos; e os angulos, cujos lados saõ proporcionaes, saõ tambem iguaes. Em primeiro lugar, supposndo, que C, e F saõ agudos, esses triangulos, pela precedente, saõ equiangulos; mas, se B he mayor, que E, faça-se A B G = D E F (*liv.* 2. *num.* 28.) e o terceiro angulo A G B será igual ao terceiro angulo F (*liv.* 2. *num.* 74.) e por tanto agudo, como elle, e A B G, e D E F seraõ equiangulos, e semelhantes, e será A B . B G : : D E . E F; mas D E . F E : : A B . B C, como se suppoem; e assim A B . B G : : D E . E F : : A B . B C : logo B C, e B G, tendo huma mesma razaõ com A B, seraõ iguaes (*liv.* 3. *Prop.* 52.) e assim o triangulo G B C he isosceles, e por conseguinte os angulos B C G, e B G C seraõ agudos (*liv.* 2. *numero* 82.) e por consequencia BGA será mayor, que recto (*liv.* 2. *num.* 16.) mas o angulo A G B foy demonstrado igual ao angulo F, que se suppoz agudo; e assim seria ao mesmo tempo mayor, e menor, que hum recto, o que he absurdo.



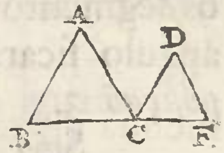
Que C, e F naõ sejaõ agudos: logo B G C = C naõ será agudo, o que repugna (*liv.* 2. *numero* 82.) por consequencia os angulos A B C, e E saõ necessariamente iguaes; e assim A B C, e D E F saõ inteiramente equiangulos (*liv.* 2. *num.* 78.) logo &c.

THEOREMA VI.

15 SE dous triangulos semelhantes tiverem hum ponto commum, e os lados homologos parallélos, os outros dous lados se encontraráõ direitamen-

te. *Euclides livro 6. Propoſiçaõ* 32.

Sejaõ os dous triangulos ſemelhantes ABC, DCF, que tem o ponto commum C, e os lados AB, e DC ſaõ paralélos, como tambem AC, e DF: digo, que BC + CF compoem huma meſma linha recta.



Pois que AB, e DC ſaõ paralélas, ſerá o angulo BAC = ACD (*liv.* 2. *num.* 24.) e o angulo ABC = DCF (ſupoſiçaõ) logo os tres angulos ACB, ACD, DCF ſaõ iguaes aos tres angulos ACB, CAB, ABC do triangulo ABC que valem dous rectos (*liv.* 2. *num.* 73.) logo BCF he huma linha recta (*liv.* 2. *num.* 88.)

THEOREMA VII.

16 SE huma linha cortar os dous lados de hum triangulo, e for paraléla á ſua baze, os lados ſeraõ cortados proporcionalmente. *Euclides liv. 6. Propoſiçaõ* 2.

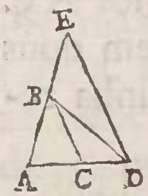
Seja o triangulo ABC, e lance-ſe EF paraléla á baze BC; digo, que AE.EB::AF.FC; o triangulo AEF he ſemelhante ao triangulo ABC, pois que ſaõ equiangulos (*num.* 8.) porque além de que o angulo A he commum, o angulo AEF = ABC; e o angulo AFE = ACB: logo AB.AE::AC.AF (*liv.* 2. *num.* 26.) e dividindo AB − AE.AE::AC − AF.AF; mas AB − AE = EB, e AC − AF = FC: logo EB.AE::FC.AF, e premutando AE.EB::AF.FC; como ſe queria moſtrar.

THEOREMA VIII.

17 SE o angulo de hum triangulo for igualmente dividido por huma linha recta, que divi-

da a baze em duas partes, eſtas partes, ou ſegmentos da baze, teraõ entre ſi a meſma razaõ, que os lados do triangulo; e ſe a linha lançada fizer com que os ſegmentos da baze ſejaõ proporcionaes aos lados, o angulo ficará dividido igualmente. *Euclides liv. 6. Propoſiçaõ* 3.

Seja o triangulo A B D; a linha B C tirada do vertice cortará igualmente o angulo B. Devemos moſtrar, em primeiro lugar, que A B . B D :: A C . C D; ſeja lançada D E paraléla a B C, e produza-ſe o lado A B até encontrar a paraléla no ponto E; os angulos A B C, e A E D ſaõ iguaes (*liv. 2. numer.* 26.) e pela meſma razaõ C B D, e BDE o ſaõ tambem (*liv.* 2. *num.* 24.) mas A B C, e C B D ſaõ ſuppoſtos iguaes: logo C B D, e B E D ſaõ tambem iguaes, e por conſequencia B D E, e B E D; e aſſim o triangulo D B E iſoſceles, ſerá B D = B E; mas A B . A C :: B E, ou B D . C D (*num.* 16.) logo A B . A C :: B D . C D, e alternando, A B . B D :: A C . C D.



Em ſegundo lugar, devemos moſtrar, que ſendo iſto aſſim, a linha BC deixará o angulo ABD dividido pelo meyo; ſendo D E paraléla a B C (ſuppoſiçaõ) e A B prolongada para E, ſegue-ſe, que A B . B E :: A C . C D (*num.* 16.) e A B produzida até E ſerá A B . B E :: A C . C D (*num.* 16.) e pela hypoteſi, A B . B D :: A C . C D: logo B E = B D (*liv.* 3. *num.* 52.) e o triangulo D B E ſerá iſoſceles (*liv.* 2. *num.* 55.) mas por cauſa das paralélas BC, e ED, os angulos A B C, e B E D, ou ſeu igual B D E, ſaõ iguaes (*liv.* 1. *num.* 81.) como tambem C B D, e B D E (*liv.* 2. *num.* 26.) logo o angulo A B C = C B D; o que ſe queria moſtrar.

DE-

DEFINIÇAM I.

18 AS linhas antiparalélas saõ aquellas, que com as linhas, que ellas cortaõ fazem os mesmos angulos, mas da outra parte.

As linhas paralélas fazem os angulos iguaes de huma mesma parte com as linhas, que cortaõ (*liv. 2. num. 26.*) se A F E = A B C, as linhas F E, e B C seraõ paralèlas; mas, se A F E = A C B, as linhas se chamaõ antiparalélas.

THEOREMA IX.

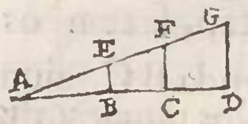
19 SE se cortarem os lados de hum triangulo por huma linha antiparaléla á sua baze, os lados desse triangulo seraõ cortados em proporçaõ reciproca.

Seja a linha F E (*figura idem*) antiparaléla a B C, e será A F E = A B C, e A E F = A C B: o triangulo A E F tem logo os mesmos angulos, que A B C, e por consequencia saõ semelhantes, e os seus lados proporcionaes (*num. 10.*) mas os seus lados homologos naõ tem a mesma situaçaõ; porque A B naõ he homologo como A F, senaõ como A E; e assim esses lados A B, e A C naõ saõ cortados em proporçaõ directa, A B naõ he para A F, como A C para A E, de sorte, que das quatro grandezas a primeira he para a quarta, como a terceira para a segunda, A B . A E :: A C . A F, e a proporçaõ reciproca.

PROBLEMA I.

20 COrtar huma linha recta do mesmo modo, que outra se acha cortada. *Euclid. liv. 6. Proposiçaõ* 10.

A linha A D se acha cortada em tres partes, A B, AB, BC, e CD; pede-ſe ſemelhantemente cortada a linha A G, à ſaber, em partes proporcionaes ás partes da linha A D: das duas linhas ſe forme hum angulo

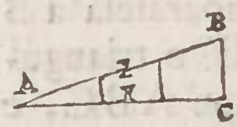


qualquer, e pelos pontos G, e D ſe lançe huma linha recta, e pelos pontos B, e C ſe lancem linhas paralélas a G D, e a linha A G ficará dividida em tres partes proporcionaes ás partes da linha A D; porque A D. A C :: A G. A F, e A C. A B :: A F. A E: logo eſtá feito o que ſe pedia.

PROBLEMA II.

21 DIvidir huma linha nas partes iguaes, que quizerem.

Seja a linha dada X, que ſe quer dividir em tres partes: faça-ſe della hum angulo com a linha Z, e abrindo o compaſſo á vontade, poſta huma



das ſuas pontas ſobre A, notem-ſe ſobre a linha Z tres partes iguaes, e logo de B, extremo deſſas tres partes, lanço huma linha ao ponto C, extremo de X, e a eſta lanço paralélas pelos pontos da diviſaõ, e ficará a linha A B dividida (*probl. precedente*) em tres partes, como ſe queria fazer.

PROBLEMA III.

22 SEparar de huma linha huma parte qualquer, que ſe pedir. *Euclid. liv. 6. Prop. 9.*

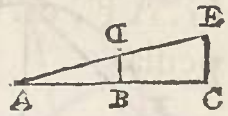
Se da linha A C ſe quizer tirar, por exemplo, a terça parte, (*figura a cima*) baſta dividir A C em tres partes iguaes, como fica moſtrado.

PRO-

PROBLEMA IV.

23 A Duas linhas dadas, achar huma terceira proporcional. *Euclid. liv. 6. Prop.* 11.

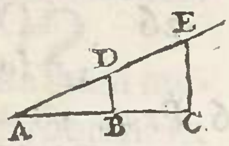
Seja a primeira linha AB, e a ſegunda BC; ajuntem-ſe eſſas duas linhas, de ſorte, que façaõ huma ſó linha, e tome-ſe AD = BC, e ajuntando-a com AB, de ſorte, que façaõ hum angulo qualquer. Do ponto D ſe lance huma linha ſobre B, ou ao ponto B, e a eſta huma paraléla do ponto C, e produza-ſe AD até encontrar a paraléla CE; iſto feito, digo, que DE he a terceira proporcional buſcada; porque AB he para AD, ou para a ſua igual BC (*num.* 16.) como AC para AE; e aſſim (*liv.* 3. *numer.* 48.) como AC − AB . AE − AD, a ſaber, como BC para DE; e aſſim ∺ AB.BC.DE; o que ſe queria fazer.



PROBLEMA V.

24 A Char huma quarta proporcional á tres linhas dadas em proporçaõ. *Euclid. liv. 6. Prop.* 12.

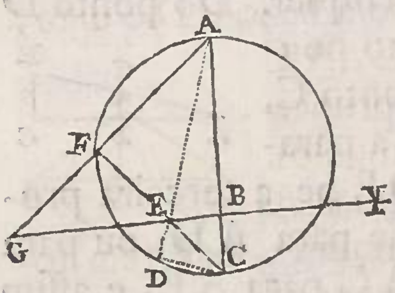
Seja a primeira linha AB, a ſegunda AD; com as quaes ſe faça o angulo BAD, e a terceira BC ſe ponha recta com AB, e lançando por B, e D huma linha recta, e a eſta pelo ponto C huma paraléla CE, produzindo AD até encontrar a paraléla CE, digo, que DE ſerá a quarta proporcional; porque (*numero* 16.) AB . AC :: AD . AE; e aſſim, dividindo (*liv.* 3. *num.* 48.) AB . AC − AB :: AD . AE − AD, a ſaber, que AB.BC :: AD. DE, e por conſeguinte alternando, AB . AD :: BC. DE; o que ſe queria fazer, e demonſtrar.



PROBLEMA VI.

25 ACHar todas as reciprocas possiveis a duas linhas dadas.

Sejaõ as duas linhas dadas AB, e AC; deve-se pôr a menor AB sobre a mayor AC, e descrever hum circulo, que tenha a mayor por diametro, e do ponto B, onde a menor se termína, lançar huma perpendicular indefinita, como YG. Toda a linha, que for lançada do ponto A cortará a indefinita, e se terminará no circulo, como AD, ou o cortará, e se terminará na indefinita, como AG, e satisfará o problema; porque AE, e AD saõ reciprocas a AB, e AC, como tambem AF, e AG, porque DE he antiparaléla a BC, pois que AEB = ACD, e ABE = ADC (*liv.* 2. *num.* 50. *e num.* 37.) e assim essas linhas saõ cortadas reciprocamente (*num.* 18.) AFC = ABG (*liv.* 2. *num.* 50. *e num.* 37.) e ACF = AGE (*liv.* 2. *num.* 37. *e num.* 51.) logo BG, e FC saõ antiparalélas, e AC, e AG cortadas reciprocamente.



PROBLEMA VII.

26 SObre huma linha dada, formar huma figura semelhante a outra figura dada. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 18.

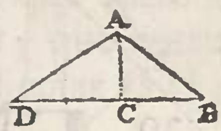
Divida-se a figura dada em triangulos (*liv.* 2. *num.* 119.) e sobre a linha dada se lancem linhas, que façaõ os mesmos angulos (*liv.* 2. *num.* 28.) e será feito o que se pedia.

LEM-

LEMMA I.

27 SE do angulo recto de hum triangulo rectangulo se lançar huma linha perpendicular sobre a baze, esta o dividirá em dous triangulos semelhantes a si mesmo, e entre si. *Euclid. liv. 6. Prop.* 8.

Seja o triangulo ABD; se do angulo A recto se lançar a perpendicular AC sobre a baze BD: digo, que os tres triangulos ABD, ABC, ACD saõ todos tres semelhantes. Em primeiro lugar, elles saõ todos tres rectangulos. Em segundo lugar, os dous triangulos ABD, e ABC tem o angulo B commum: logo tem todos os seus angulos iguaes (*liv.* 2. *num.* 78.) e por consequencia semelhantes (*num.* 8.) os triangulos ABD, e ADC tem tambem o angulo D commum: logo saõ semelhantes; pois que ABC, e ADC saõ semelhantes a hum terceiro, o seraõ tambem entre si (*num.* 11.) e por consequencia os tres triangulos semelhantes, como se queria mostrar.



THEOREMA X.

28 QUando em hum triangulo rectangulo se lança huma perpendicular do angulo recto sobre a hypotenusa succedem tres diferentes casos.

Em primeiro lugar, a perpendicular he hum meyo proporcional entre os dous segmentos da hypotenusa.

Em segundo lugar, o mayor lado do triangulo he meyo proporcional entre a hypotenusa, e o segmento mayor.

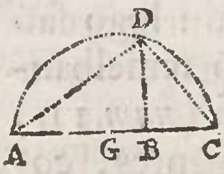
O lado menor he hum meyo proporcional entre a hypotenusa, e o menor segmento.

Pelo lemma precedente (*figura idem*) o triangulo lo rectangulo ABD he dividido pela perpendicular A C em dous triangulos rectangulos ſemelhantes entre ſi, de ſorte, que ABD, CBA, CAD ſaõ tres triangulos ſemelhantes, e por tanto (*num.* 10.) primeiramente, BC.AC::AC.CD, ou ∺ BC.AC.CD. Em ſegundo lugar, CD.AD::AD.BD, ou ∺ CD.AD. BD. Em terceiro lugar, BC.AB::AB.BD, ou ∺ BC.AB.BD; e he o que ſe queria demonſtrar.

PROBLEMA VIII.

29 ENtre duas linhas dadas achar huma meya proporcional. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 13.

As duas linhas dadas ſaõ AB, e BC: ajuntem-ſe, de ſorte, que façaõ huma meſma linha recta, e do



ponto G, meyo da linha compoſta, ſe deſcreva o ſemi-circulo ADC: levante-ſe do ponto da juncçaõ huma perpendicular, que ſe termine no ponto D da circunferencia.

Digo, que BD he a meya proporcional entre AB, e BC: de A para D, e de D para C ſe lancem duas linhas; o angulo ADC no ſemi-circulo he recto (*liv.* 2. *num.* 42.) BD he perpendicular (*ſuppoſiçaõ*) logo (*theorema precedente*) BD he meya proporcional, entre AB, e BC; e aſſim AB.BD.BC.

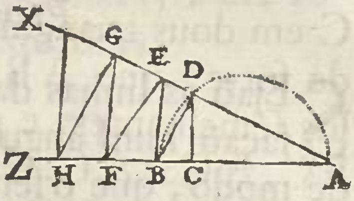
PROBLEMA IX.

30 DAdas as tres primeiras linhas de huma progreſſaõ geometrica, achar todas as mais, que ſe ſeguem indefinitamente.

Sejaõ as tres linhas em progreſſaõ AC.AD.AB: divida-ſe pelo meyo o intervallo da linha AB, e ſe deſcreva ſobre ella hum ſemi-circulo; ſobre eſta linha

AB

AB tomo huma parte igual á primeira linha AC, e do ponto C levanto huma perpendicular, que se terminará no ponto D da circunferencia, donde se lance huma linha ao ponto B, e de A por D a linha indefinita X: produza-se indefinitamente AB para Z, e do ponto B huma perpendicular, que corte a linha X no ponto E, do qual se lance huma perpendicular, que córte a linha Z no ponto F, e outra perpendicular, que corte X no ponto G, donde se lance a perpendicular GH; e assim indefinitamente.



DEMONSTRAC,AM.

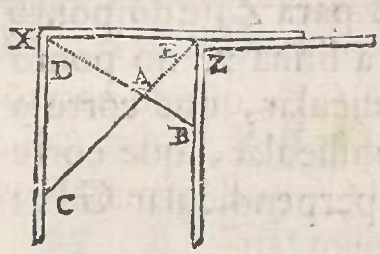
EM primeiro lugar, a linha AD he meya proporcional entre AC, e AB, (*num.* 28.) e igual á segunda linha dada.

Em segundo lugar, todos os triangulos ADB, ABE, AEF, AFG, &c. saõ equiangulos (*liv.* 2. *numer.* 78.) pois que além deterem o angulo XAZ commum saõ rectangulos; porque ADB na semi-circunferencia he recto (*liv.* 2. *num.* 42.) e pela construcçaõ EF, e GH saõ perpendiculares sobre X, como DC, BE, GF o saõ sobre Z; e assim (*num.* 8.) seraõ semelhantes, e teraõ proporcionaes os lados homologos (*num.* 10.) logo AC.AD::AD.AB, e AD.AB::AB.AE, e AB.AE::AE.AF, e AF.AG::AG.AH &c. por consequencia ÷ AC.AD.AB.AE.AF.AG.AH &c.

31 Até o presente senaõ tem achado o meyo de poder haver duas linhas meyas proporcionaes, por estes elementos, usando só da regoa, e do compasso; porém mecanicamente se podem achar duas, e mais linhas meyas proporcionaes.

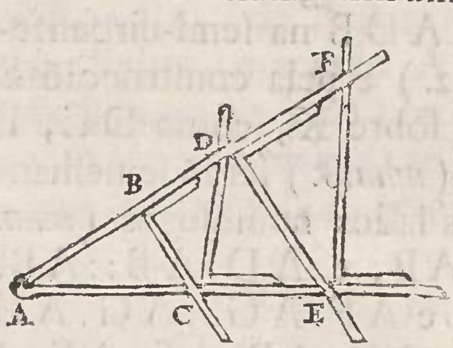
Primeiro modo, de Plataõ.

SEjaõ as linhas dadas A B, A C juntas, de ſorte, que façaõ hum angulo recto; diſponha-ſe a eſquadra X, de modo, que o ſeu angulo fique na linha A B produzida, e que huma das ſuas pernas toque o extremo da linha A C: ſeja Z huma ſegunda eſquadra diſpoſta de ſorte, que huma das ſuas regoas toque a regoa X, e a outra o extremo B da linha A B: deſta ſorte os triangulos CDE, e D E B ſaõ rectangulos, e D A, e E A ſaõ perpendiculares, e aſſim (*numer.* 28.) ∹ A C. A D. A E ∹ A D. A E. A B. logo ∹ A C. A D. A E. A B.



Segundo modo, de Cartezio.

ESte inſigne Filoſoſo, que deu principio á ſua Geometria, por onde os mais a acabaraõ, para eſte problema uſou de hum inſtrumento de muitas eſquadras, de tal ſorte ajuſtadas humas com outras, que, quando o angulo F A E he formado, ou que as duas regoas F A, e A E ſe tocaõ, todas as outras regoas B C, C D, D E, E F ſe tocaõ, e ajuſtaõ com o ponto A: ſe o angulo E A F ſe abre, as regoas ſeguem o meſmo movimento; o que ſuppoſto, ſendo dadas duas linhas, diſponho a regoa B C, de ſorte, que A B ſeja igual á menor, e faço o angulo E A F de tal abertura, que a regoa D E ſeja igual á ſegunda linha: he evidente, que A C, e A D ſaõ duas meyas proporcionaes entre A B, e A E.



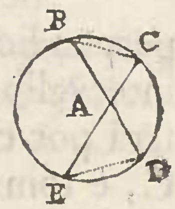
Para

Para achar mais meyas proporcionaes, basta augmentar o numero das regoas, ou esquadras.

THEOREMA XI.

32 DUas cordas, que se cortaõ dentro de hum circulo, tem as suas partes em proporçaõ reciproca.

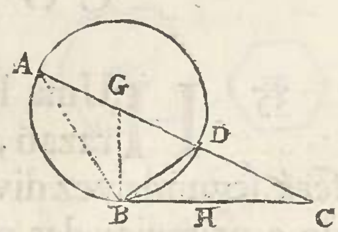
Sejaõ as duas cordas BD, e CE, que se cortaõ no ponto A. Devemos mostrar, que BA.CA::AE.AD: lancem-se as linhas ED, e BC, que formaráõ os dous triangulos BCA, EAD, cujos angulos em A saõ iguaes, e o angulo B igual ao angulo E, pois que se apóyaõ sobre arcos iguaes: logo tem os seus lados homologos proporcionaes (*num.* 10.) logo BA.CA::AE.AD, e alternando, será reciprocamente AB.AE::CA.AD; o que se queria mostrar.



LEMMA II.

33 SE de hum ponto fóra de hum circulo se lançar huma tangente, e huma secante, a tangente será meya proporcional, entre a secante inteira, e a sua parte fóra do circulo.

Seja a tangente CB, e a secante CA: devemos mostrar, que será AC.CB::CB.CD, ou ∺ AC.BC.CD. Os dous triangulos ACB, e DCB tem o angulo C commum, o angulo DBC tem por medida metade do arco (*liv.* 2. *num.* 35.) e assim os dous triangulos ACB, e BDC, que tem dous angulos iguaes, e por conseguinte o terceiro, saõ semelhantes, e proporcionaes (*num.* 8. *e* 10.) o lado DC do trian-



triangulo BCD he homologo com o lado BC do triangulo ACB; e assim AC.BC::BC.CD, ou ÷ AC. BC. CD; o que se queria demonstrar.

PROBLEMA X.

34 DIvidir huma linha de tal sorte, que a parte mayor seja meya proporcional entre a toda, e a parte menor: a este problema chamaõ dividir huma linha segundo a meya, e extrema razaõ. *Eucl. liv. 6. Prop.* 30. *Figura idem.*

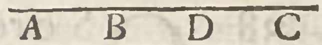
Seja BC a linha dada; do ponto B levanto a perpendicular BG, que seja metade de BC, e com o intervallo GB se descreva hum circulo, cujo diametro será por conseguinte igual a BC: lance-se a secante AC, e tomando CH sobre BC = CD; digo, que a linha BC está dividida no ponto H, como se queria: se HC, ou DC he a parte mayor, e BH, ou BC − HC he a parte menor, podemos mostrar, que ÷ BC.CH.HB; pelo lemma precedente, temos AC.BC::BC.CD, e tirando, ou diminuindo de AC, ou BC as linhas BC, e CD, os restos AC − BC, e BC − CD estaraõ na mesma proporçaõ (*liv.* 3. *num.* 48.) e assim BC.CD::AC − BC.BC − CD; mas AC − BC = DC = HC, e BC − HC = HB: logo ÷ BC.CH.HB; e he o que se queria demonstrar.

COROLARIO I.

35 HUma linha dividida em meya, e extrema razaõ, se se lhe ajuntar a sua parte mayor será segunda vez dividida em meya, e extrema razaõ, sendo a primeira das proporcionaes a parte mayor, de que a primeira será mediana.

Seja AC dividida em meya, e extrema razaõ no ponto

ponto B a mediana, ou parte mayor he BC, e ajuntando-lhe esta linha, de modo, que CD $=$ CB: devemos mostrar, que $\div$ AD . AC . CD. Seja AD $=$ a, e CB $=$ x: logo $a - x =$ AB, e, CD $= x$, e $a + x =$ AD: devemos mostrar, que $x . a + x :: a . x$; pela hypothezi $a . x :: x . a - x$; premutando, $x . a :: a - x . x$, e componendo, $x + a . a :: a - x + x . x$; mas $a - x + x = o$: logo $x + a . a :: a . x$, ou $\div\ x + a . a . x$; o que se queria mostrar.



CAPITULO III.

Das proporçoens, e razoens dos circuitos, que muitas figuras tem entre si com o radio do circulo, a que saõ inscritos.

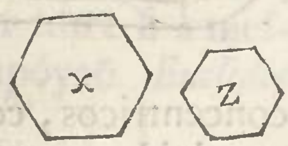
DEFINIÇAM.

36 DUas figuras se dizem semelhantes, quando os seus angulos saõ iguaes, cada hum a cada hum, e que os lados, que os comprehendem saõ proporcionaes.

THEOREMA I.

37 OS circuitos de duas figuras semelhantes tem entre si a mesma razaõ, que os seus lados, cada hum a cada hum.

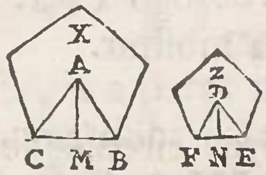
Sejaõ X, e Z dous exagonos; cada lado de x he a, e o seu circuito 6a, e cada lado de z he b, e seu circuito 6b; mas $6a . 6b :: a . b$ (*liv.* 3. *num.* 64.) logo &c.



THEOREMA II.

38 OS circuitos de duas figuras regulares, e ſemelhantes ſaõ entre ſi, como os radios, ou como os diametros dos circulos, a que ſaõ inſcritas.

Sejaõ X, e Z dous poligonos ſemelhantes, do centro do circulo, a que ſe ſuppoem inſcritos, ſe lancem as linhas A B, e A C, D E, e D F. Os dous triangulos B A C, D E F ſaõ iſoſceles, e ſemelhantes; e pelo theorema precedente ſe moſtra a razaõ, que tem os circuitos das figuras ſemelhantes com os diametros, ou ſemi-diametros do circulo, a que ſaõ inſcritas.



COROLARIO.

39 AS circunferencias de dous circulos ſaõ entre ſi, como os ſeus diametros, ou radios.

A razaõ he; porque os circulos ſe podem conſiderar, como hum numero indefinito de lados. Se percebermos hum circulo com hum numero indefinito de lados, e outros tantos circulos concentricos, e ſe conſiderarmos, que eſtas circunferencias ſe deſenrolaõ, e ſe poem em linha recta, o radio do circulo mayor, e o ſeu circuito formará hũ triangulo rectangulo, na hypotenuſa do qual ſe hiraõ terminar as extremidades dos circulos concentricos, conſiderando-ſe poſto em linha, de que ſe concluhio, que a ſuperfice do circulo compoſta deſſe numero indefinito de circulos concentricos, de que ſe compoem, he igual ao dito triangulo, como por outra via moſtràmos (*liv.* 2. *num.* 151.)

THEO-

THEOREMA III.

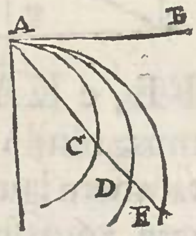
40 OS arcos de igual numero de gráos em diferentes circulos, tem entre ſi a meſma razaõ, que os circulos, de que ſaõ partes.

Porque os gráos dos circulos, ſaõ partes proporcionaes de hum todo : logo ſaõ na meſma razaõ, que o todo.

THEOREMA IV.

41 SE de hum ponto, em que muitos circulos ſe tocaõ, ſe lançar huma linha, que córte eſſes circulos, as partes deſſa linha teraõ entre ſi a meſma razaõ, que os circulos, que corta.

Seja o ponto A de huma linha, que corta os circulos C, D, E: devemos moſtrar, que as partes da linha A C, A D, A E ſaõ entre ſi, como os circulos, que corta. Lance-ſe a linha A B do ponto A, tangente; o angulo B A E tem por medida o arco C A, ou A D, ou A E (*liv.* 2. *num.* 36.) e aſſim os tres arcos ſaõ ſemelhantes; e aſſim as linhas A C, A D, A E teraõ a meſma razaõ, &c.



THEOREMA V.

42 EM hum meſmo circulo, ou em circulos iguaes, os angulos, que tem o ſeu vertice, ou na circunferencia, ou no centro, tem entre ſi a meſma razaõ, que os arcos, ſobre que ſe apóyaõ. *Euclides liv.* 6. *Prop.* 33.

Eſte theorema he evidente, pois que eſſes arcos ſaõ as ſuas medidas (*liv.* 2. *num.* 29. *e num.* 37.)

CAPI-

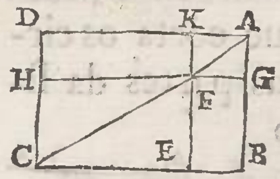
CAPITULO IV.

Das razoens, e proporçoens das ſuperfices.

THEOREMA I.

43 EM todo o paralélogramo, os paralélosgramos parciaes adjacentes ao diametro, ſaõ ſemelhantes entre ſi, e ao paralélogramo total. *Euclid. liv. 6. Prop.* 24.

Seja ABCD hum paralélogramo, e AC o ſeu diametro; á roda do qual ſe formem outros dous paralélosgramos AGFK, e CEFH. Em primeiro lugar, cada hum delles tem hum angulo commum, como ABCD nos paralélosgramos iguaes (*liv.* 2. *numer.* 116.) logo GAK = ECH = HFE, e KAG = KFG; e aſſim eſſes tres paralèlosgramos, tendo dous de ſeus angulos iguaes, os outros ſeraõ tambem iguaes; ſendo os ſeus lados paralélos (*liv.* 2. *numer.* 26.) ſeraõ os meſmos angulos: logo os triangulos ABC, AGF, FEC ſaõ equiangulos, e por conſequencia ſemelhantes (*num.* 8.) como tambem ADC, AKF, e FHC: logo AG.GF::AB.BC (*num.* 10.) e AG.AF::AB.AC, e AF.AK::AC.AD; da meſma ſorte AK.AG::AD.AB: Logo AKFG, e ABCD ſaõ ſemelhantes; e aſſim meſmo CEFH, e ABCD ſaõ ſemelhantes (*num.* 38.)



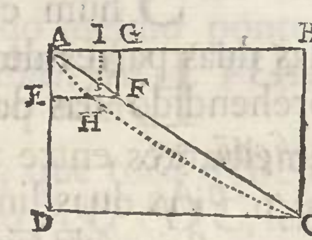
THEOREMA II.

44 SE de hum paralélogramo ſe tirar outro ſemelhante, e ſemelhantemente poſto ao total, tendo com elle hum angulo commum, o paralélogramo

gramo que ſe tirou, eſtará á roda do diametro do paralélogramo total. *Euclid. liv. 6. Prop. 26.*

Seja o paralélogramo ABCD, do qual ſe tire o paralélogramo AGFE, e he ſemelhante ao total, e tem o angulo commum EAG.

Devemos moſtrar, que os ſeus diametros ſe achaõ em huma meſma linha; ſe houver quem o negue, dizendo, que o diametro HC corta o lado EF no ponto H; lance-ſe HI paraléla a AE; E I, e DB ſaõ ſemelhantes (*num.* 43.) logo AE . EH :: AD . DC (*numero* 36.) e AD . DC :: AE . EF (*liv.* 3. *num.* 52.) logo EH = EF (*num.* 43.) de que reſultaria a parte igual ao todo; o que he abſurdo.



THEOREMA III.

45 SE huma linha for cortada em meya, e extrema razaõ, o rectangulo da toda, e da parte menor, he igual ao quadrado da mediana.

Seja a linha AB cortada em meya, e extrema razaõ no ponto D, ſerá AD a mediana: logo AB . AD :: AD . DB, ou ∺ AB . AD . DB: logo $\overline{AD}^2 = AB \times DB$ (*liv.* 3. *num.* 57.) e he o que ſe queria demonſtar.

COROLARIO.

46 COrtar huma recta de tal ſorte, que o rectangulo da toda por huma de ſuas partes ſeja igual ao quadrado da outra parte. *Euclides liv. 2. Prop. 11.*

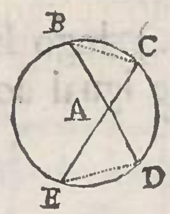
Eſte corolario ſe reſolve, cortando a linha dada em meya, e extrema razaõ, como fica moſtrado (*n.* 34.)

em que o rectangulo da toda, e da parte menor se mostrou igual ao quadrado da mayor.

THEOREMA IV.

47 SE duas linhas rectas se cortarem dentro de hum circulo, o rectangulo comprehendido das duas partes de huma será igual ao rectangulo comprehendido das duas partes da outra. *Eucl. liv.* 3. *Proposiçaõ* 35.

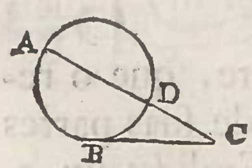
As duas linhas B D, e C E, que se cortaõ dentro do circulo, no ponto A, devemos mostrar, que B A X D A = C A X A E; fica provado (*num.* 32.) que B A . A E : : A C . A D : logo B A X A D producto dos dous extremos = A E X A C, producto dos dous meyos (*liv.* 3. *num.* 56.) e he o que se queria mostrar.



THEOREMA V.

48 SE de hum ponto tomado á vontade fóra de hũ circulo, se lançarem duas linhas rectas, das quaes huma o toque, e outra o córte, e se vá terminar na circunferencia concava, o rectangulo de toda a secante pela parte fóra do circulo, será igual ao quadrado da tangente. *Eucl. liv.* 3. *Prop.* 36.

Do ponto C fóra do circulo se lance C A, que o córte no ponto D, e a linha C B, que o toque no ponto B. Devemos mostrar, que AC X CD = $\overline{BC}^2$, fica mostrado (*num.* 33.) que, ÷ A C . B C . D C : logo A C X C D = $\overline{BC}^2$; o que se queria mostrar.



THEO-

THEOREMA VI.

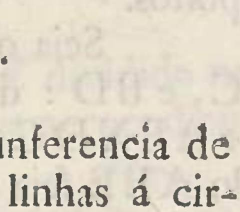
49 SE de hum ponto dado fóra de hum circulo, se lançarem duas linhas rectas, e huma córte o circulo, e se termine na circunferencia concava: se o rectangulo de toda a secante, pela parte exterior for igual ao quadrado da outra, lançada do mesmo ponto, esta segunda linha tocará o circulo. *Eucl. liv.* 3. *Proposiçaõ* 37.

Pois que o quadrado da linha, que toca o circulo (*figura idem*) he igual ao rectangulo A C x D C, será igual á tangente B C, cujo quadrado he igual ao rectangulo, e naõ podendo ser diferente: logo he tangente; e he o que se queria demonstrar.

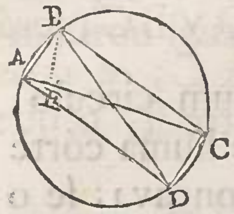
THEOREMA VII.

50 SE de hum ponto dado na circunferencia de hum circulo, se lançarem duas linhas á circunferencia concava, e por dous pontos igualmente distantes do ponto dado, se lançar huma terceira linha, que córte as duas primeiras, o rectangulo feito de huma, e da sua parte comprehendida, entre o ponto dado, e a terceira linha, he igual ao rectangulo feito da outra linha, e da sua parte comprehendida entre o ponto dado, e a terceira linha.

Seja K o ponto dado; delle se lancem as linhas K F, e K G, e pelos pontos E, e D, igualmente distantes de K, se lance a linha E D, que cortará as duas primeiras nos pontos B, e C: devemos mostrar, que K F X K B = K G X K C, as duas linhas B C, e F G saõ antiparalélas; porque o angulo K B C tem por medida metade do arco E F, e mais a de K D, ou de seu igual K E (*liv.* 2. *num.* 50.)



mas



mas metade de K F he tambem a medida de K G F (*liv.* 2. *numer.* 37.) logo o angulo K B C = K G F ; e pela meſma razaõ K C B = *K* F G ; e aſſim pela definiçaõ das antiparalélas (*num.* 18.) F G, e B C ſaõ antiparalélas : logo *K* F. *K* C : : *K* G. *K* B (*num.* 19.) logo *K* F X *K* B = *K* G X *K* C (*liv.* 3. *num.* 56.) e he o que ſe queria moſtrar.

THEOREMA VIII.

51 SE hum quadrilatero for inſcrito em hum circulo, o rectangulo feito das duas diagonaes ſerá igual á ſoma dos rectangulos feitos dos lados oppoſtos.

Seja o quadrilatero A B C D, e as diagonaes A C, e B D : devemos moſtrar A C X B D = B C X A D + A B X D C : lance-ſe a recta B E de ſorte, que o angulo A B E ſeja igual ao angulo C B D ; e tirando de hum, e de outro o angulo A B C, os reſtantes C B E, e A B D ſaõ iguaes, aſſim como os angulos A D B, e A C D ſaõ iguaes, apoyados de iguaes arcos (*liv.* 2. *num.* 38.) os triangulos B D A, e B C E ſaõ equiangulos (*liv.* 2. *num.* 78.) e ſemelhantes (*num.* 8.) e aſſim o rectangulo dos extremos igual ao dos meyos ; porque B D . A C : : B C . C E (*num.* 8.) e por conſequencia B D X C E = A D X B C (*liv.* 3. *num.* 56.)

Pela meſma razaõ a cima, os triangulos B D C, e B A E ſaõ ſemelhantes ; porque A B E = D B C (conſtrucçaõ) e B A C = B D C, por ſerem apoyados do meſmo arco B C : logo teraõ os lados homologos proporcionaes : logo B D . C D : : A B . A E ; e aſſim B D X A E = C D X A B (*liv.* 3. *num.* 56.) mas B D X A E + B D X

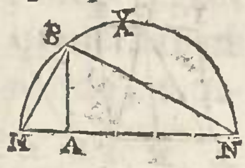
C E

CE = BD X AC (*liv.* 3. *num.* 17.) logo, pois que BD X AD = CD X AB, e BD X CE = AD X BC, ferá logo CD X AB + AD X BC = BD X AC; e duas cousas iguaes a huma terceira saõ iguaes entre si; o que faltava para demonstrar.

THEOREMA IX.

52 SE se cortar o diametro de hum circulo, de sorte, que huma das suas partes seja quadrupla da outra, e que sobre o ponto da divisaõ se levante huma perpendicular terminada na circunferencia; digo, que o quadrado de huma corda lançada da extremidade desse triangulo á extremidade da perpendicular, he o quintuplo da menor parte desse diametro, do qual a da perpendicular he o quadruplo.

Seja o diametro MN do circulo X dividido no ponto A, de sorte, que AN = 4 AM: seja perpendicular AB, e as cordas MB, e BN, formando o triangulo rectangulo MBN (*liv.* 2. *numer.* 42) Digo, que $\overline{MB}^2 = 5\,\overline{AM}^2$. Seja AM = a: logo, supposiçaõ, MN = 5 a: seja MB = b: logo $\div$ 5 a . b . a (*num.* 28.) e por tanto, bb = 5 aa (*liv.* 3. *num.* 57.) Seja mais BA = d; e assim $\div$ a . d . 4 a (*num.* 28.) logo pela mesma razaõ 4 aa = dd; o que se queria demonstrar.

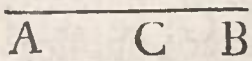


THEOREMA X.

53 SE hũa linha recta for cortada segundo a meya, e extrema razaõ, o quadrado da toda, e o da parte menor em soma, seràõ o triplo da parte mayor.

Seja AB cortada em meya, e extrema razaõ, e seja AB = z, e AC = a, e BC = e: logo $\div$ z . a . e.

Devemos mostrar, que $zz + ee = 3aa$. Em primeiro lugar, $zz = aa + 2ae + ee$ (*liv.* 3. *n.* 20.)



e assim devemos mais mostrar, $aa + 2ae + 2ee = 3aa$. Em segundo lugar, $ae + ee = ze$ (*liv.* 3. *numer.* 19.) e $ze = aa$ (*liv.* 3. *num.* 57.) segundo a supposiçaõ; e assim $ae + ee = aa$, e substituindo a igualaçaõ, em lugar de $2ae + 2ee$, o seu valor $2aa$, teremos, $aa + 2aa = 3aa$; o que se queria mostrar.

THEOREMA XI.

54 OS triangulos, e paralélosgramos semelhantes, saõ entre si em razaõ duplicada dos seus lados da mesma razaõ. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 19.

Sejaõ A B D, e G L F dous triangulos semelhantes; e dos seus vertices se lancem as perpendiculares A C, e G H; os triangulos L G H, e B A C saõ semelhantes, sendo rectangulos, e o angulo B igual ao angulo L: logo $BC . AC :: LH . GH$ (*num.* 10.) os dous triangulos D A C, e F G H, sendo tambem semelhantes: logo semelhantemente $CD . AC :: FH . GH$; e assim mais, $BC + CD . AC :: LH + HF . GH$ (*liv.* 3. *num.* 63.) seja $AC = b$, e $BD = d$, e $GH = m$, e $LF = n$; e assim será $b . d :: m . n$, e alternando, $b . m :: d . n$ (*liv.* 3. *num.* 46.) a superfice de A B D he metade de bd (*liv.* 2. *num.* 132.) e a superfice de G L F he metade de mn; mas a razaõ de bd para mn he composta das duas razoens de b para m, e de d para n (*liv.* 3. *num.* 70.) e essas duas razoens saõ as mesmas: logo a razaõ de bd para mn he duplicada (*liv.* 3. *num.* 65.)

Sejaõ os dous paralèlosgramos B D M N, e L F K I semelhantes; pelas mesmas razoens a cima, mostraremos, que $b . d :: m . n$, e $b . m :: d . n$; bd he a superfi-

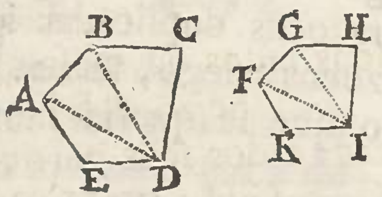
ce

ce de B D M N, e m n he a de L F *K* I ; a razaõ de b d para m n he compoſta das duas razoens de b para m, e de d para n, e ſendo iguaes: he logo a razaõ duplicada, como ſe queria provar.

L E M M A.

55 AS figuras poligonas ſemelhantes, póde cada huma ſer dividida, como a outra em igual numero de triangulos ſemelhantes, cada hum ao ſeu.

Sejaõ duas figuras ſemelhantes A B C D E, e F G H I *K* : digo, que ellas ſe podem dividir em igual numero de triangulos ſemelhantes. Em primeiro lugar, pois que as figuras ſaõ ſemelhantes, teraõ hum igual numero de lados, e os angulos comprehendidos iguaes (*num.* 36.) Em ſegundo lugar, todos os triangulos de huma figura ſeraõ ſemelhantes aos da outra, cada hum ao que lhe correſponde, e tudo o mais fica claro.



T H E O R E M A XII.

56 TOdas as figuras rectilineas ſemelhantes ſaõ entre ſi, como os quadrados de ſeus lados homologos.

Suppoſtas as figuras a cima, e pelo lemma precedente, eſtaõ divididas em igual numero de triangulos ſemelhantes entre ſi, e cada hum ao ſeu correſpondente: logo cada triangulo de huma figura ſerá para o correſpondente da outra figura, em razaõ duplicada de cada lado homologo (*num.* 54.) mas o quadrado de A E he para o de F*K* em razaõ duplicada de AE para F*K* (*liv.* 3. *numero* 73.) e o meſmo he dos mais triangulos, &c.

CORO-

COROLARIO.

57 SE quatro linhas forem proporcionaes, as figuras semelhantes feitas sobre essas linhas, seráõ proporcionaes, e se as figuras semelhantes forem proporcionaes, o seràõ tambem as linhas. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 22.

Sejaõ proporcionaes, a.b::c.d, e sobre ellas descritas quatro figuras semelhantes, v, x, y, z; e pelo theorema precedente, serà v.x::aa.bb, e y.z::cc,dd; mas aa.bb::cc.dd (*liv.* 3. *numer.* 77.) logo v.x::y.z, e por tanto serà a.b::c.d; porque as razoens duplicadas iguaes saõ compostas de iguaes razoens: logo, se aa.bb::cc.dd, tambem a.b::c.d; o que se queria mostrar.

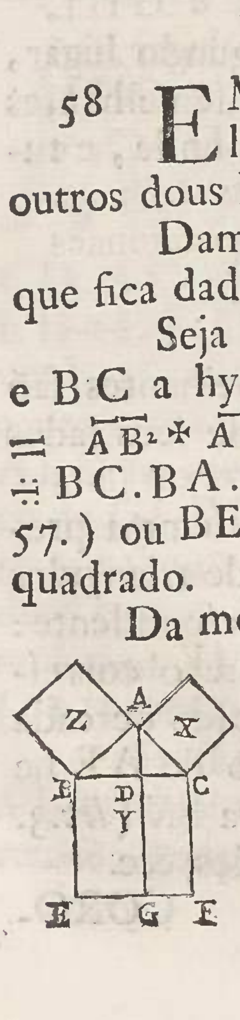
THEOREMA XIII.

58 EM hum triangulo rectangulo, o quadrado da hypothenusa he igual aos quadrados dos outros dous lados. *Euclid. liv.* 1. *Prop.* 47.

Damos aqui outra demonstraçaõ diferente da que fica dada (*liv.* 2. *num.* 139.)

Seja o triangulo ABC, o angulo recto em A, e BC a hypothenusa: Devemos mostrar, que $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$: lance-se a perpendicular AD: logo ∺ BC.BA.BD: logo $\overline{AB}^2 = BC \times BD$ (*liv.* 3. *num.* 57.) ou $BE \times BD$, pois que $BC = BE$, por causa do quadrado.

Da mesma sórte ∺ BC.AC.CD ∺ BC, AC.



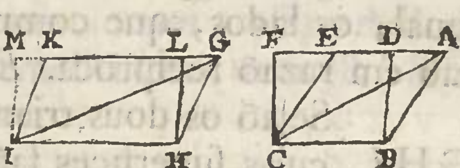
CD: logo $\overline{AC}^2 = C \times CD$, ou $CF \times CD$, pois que $CF = CB$ (*liv.* 3. *num.* 18.) mas $\overline{BC}^2 = BE \times BD + CF \times CD$: logo $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; o que se queria mostrar.

THEO-

THEOREMA XIV.

59 OS pararélosgramos, que tem hum angulo commum, ou igual, eſtaõ em razaõ compoſta dos lados, que o comprehendem. *Eucl. liv.* 6. *Prop.* 23.

O angulo ABC he igual ao angulo GHI; digo, que os dous paralélosgramos eſtaõ em razaõ compoſta de AB para GH, e de BC para HI; eſſes paralélosgramos ſaõ iguaes aos rectangulos BDFC, HLMI, cada hum ao ſeu



(*liv.* 2. *num.* 116.) os quaes ſaõ em razaõ compoſta de BD para HL, e da de BC para HI (*liv.* 3. *num.* 70.) mas a razaõ de BD para HL he a meſma, que a de AB para GH, e os dous triangulos ABD, e GHL iguaes, e ſemelhantes; porque, em primeiro lugar, ſaõ rectangulos, e em ſegundo, os angulos ABC, e GHI, ſendo iguaes, ſe tirarmos os angulos rectos DBC, e LHI, os reſtos ABD, e GHL ſaõ iguaes (*liv.* 2. *numer.* 78.) e por tanto ſeràõ os lados proporcionaes (*num.* 10.) &c.

COROLARIO I.

60 SE dous paralélosgramos iguaes tiverem hum angulo commum, ou igual, os lados, que o comprehendem eſtaràõ em razaõ reciproca. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 14.

Se os paralélosgramos ABCE, e GHIK forem iguaes (*figura idem*) digo, que AB.BC.GH.HI eſtaõ em razaõ reciproca, a ſaber, que AB.GH:: HI.BC; pois que BD × BC = HL × HI : logo (*liv.* 3. *n.* 58.) BD.HL::HI.BC; mas, pois que os angulos ABC, GHI ſaõ iguaes (*ſupp.*) concluiremos (*num.* 7.) que AB.GH::BD.HL::HI.BC; e por tanto, AB.GH::HI.BC (*liv.* 3. *num.* 53.) e he o que ſe queria demonſtrar.

COROLARIO II.

61 SE dous triangulos tiverem huma ſuperfice igual, e hum angulo commum, ou igual, os lados, que comprehenderem eſſe angulo eſtaraõ em razaõ reciproca. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 15.

Sejaõ os dous triangulos (*figura idem*) ABC, GHI, cujas ſuperfices ſaõ iguaes, e iguaes os angulos ABC, e GHI: Devemos moſtrar, que AB.GH::HI.BC; eſſes triangulos ſaõ metade dos paralélosgramos ABCE, GHIK, de que fica provado, que AB.GH::HI.BC, e he o que agora ſe queria moſtrar.

PROBLEMA I.

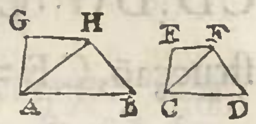
62 ACHar hum quadrado igual a hum rectangulo dado.

Seja BD o rectangulo dado: devemos buſcar huma meya proporcional, entre b, e d (*num.* 29.) e ſeja x: logo ÷ b.x.d, e bd = xx (*liv.* 3. *num.* 57) e eſtà achado, o que ſe queria.

PROBLEMA II.

63 SObre huma linha recta dada deſcrever huma figura rectilinea ſemelhante a huma figura rectilinea dada, e ſemelhantemente poſta. *Eucl. liv.* 6. *Prop.* 18.

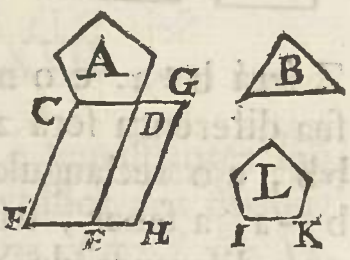
Seja AB huma linha recta, ſobre a qual ſe quer fazer huma figura ſemelhante á figura dada CD EF, EF, e ſemelhantemente poſta: dividindo eſta figura dada em dous triangulos (*liv.* 2. *num.* 119.) e ſobre A B faço A B H triangulo ſemelhante ao triangulo C D F (*liv.* 2. *num.* 95.) e ſobre A H o triangulo A G H ſemelhante a C E F, e aſſim dos mais, ſe mais houveſſe: eſſes triangulos ſemelhantes tem os ſeus lados proporcionaes (*num.* 10.) e como elles compoem eſſas duas figuras, teràõ tambem os ſeus angulos iguaes, e os ſeus lados homologos proporcionaes; aſſim AB. AG :: DC. CE, e as figuras ſemelhantes (*num.* 38.) e he o que ſe queria moſtrar.



PROBLEMA III.

64 DAdas duas figuras rectilineas, fazer huma terceira ſemelhante a huma, e igual a outra. *Eucl. liv.* 6. *Prop.* 25.

Deve-ſe fazer hum rectilineo igual ao dado A, e ſemelhante ao rectilineo B; ſobre C D faço o paralèlogramo C E igual a A (*liv.* 2. *num.* 136. *e num.* 137.) e da meſma ſórte ſobre D E o paralélogramo D H = B, tendo o angulo dado B; logo buſco I K meyo proporcional entre C D, e D G (*num.* 29.) ſobre I K faço L ſemelhante a A (*num.* 63.) Digo, que a figura L he a pedida; e aſſim devemos moſtrar, que L = B. As figuras A, e L ſaõ ſemelhantes (conſtrucçaõ) e ſeráõ huma para a outra, como $\overline{CD}^2$. para $\overline{IK}^2$. (*num.* 56.) em razaõ duplicada de C D para I K (*liv.* 3. *num.* 73.) mas pela hypoteſi ∻ C D. I K. D G; e aſſim C D he para D G em razaõ duplicada de C D para I K (*liv.* 3. *num.* 65.) e por conſequencia C D. D G :: A. L; mas tambem



CD.

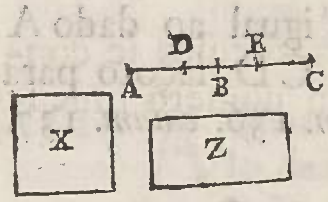
CD . DG :: CE . DH (*liv.* 3. *numer.* 72.) e pela conſtrucçaõ, CE = A, e DH = B : logo CD . DG :: (A . B; (A . L por tanto B = L (*liv.* 3. *num.* 62.) o que ſe queria demonſtrar.

Eſta conſtrucçaõ ſe faria mais facilmente, ſe em lugar do paralélogramo CE, ſe fizeſſe hum rectangulo.

THEOREMA XV.

65 HUm quadrado do meſmo circuito, ou contorno de hum paralélogramo rectangulo, he mayor, que o paralèlogramo, pelo valor do quadrado da metade da diferença, que ha entre os lados do paralèlogramo.

Seja X o quadrado, e Z o paralélogramo de igual circuito; AC he a ſoma dos dous lados de X, e de Z, metade de AC, que he AB, que he o lado do quadrado X; e AE he o lado mayor de Z, e EC o ſeu lado menor: ſeja AB, ou BC = b, e BE = a, e tome-ſe BD = a: logo AE, lado mayor de Z ſerá b + a. e o menor EC, ou AD ſerá b − a, a ſua diferença ſerá 2a: o quadrado X ſerá logo igual a bb, e o rectangulo Z igual ao producto de b + a X b − a, a ſaber, bb − ab + ab + aa, ou bb − aa: logo a diferença de X, e de Z he aa, quadrado da metade da diferença dos lados.



De dous poligonos regulares, o de mayor numero de lados terá mayor ſuperfice, e de todas as figuras Iſoperimetras, id eſt, de igual circuito, he o circulo a mais capaz.

THEOREMA XVI.

66 OS poligonos regulares, e ſemelhantes tem razaõ duplicada de ſeus lados. *Euclid. liv. 6. Prop.* 20.

Sejaõ X, e Z dous poligonos ſemelhantes; elles ſaõ iguaes a dous triangulos ſemelhantes (*liv.* 2. *num.* 142.) e ſe a he metade do circuito de X, e b o ſeu apothema, e c metade do circuito de Z, e d o ſeu apothema, ſerà a b = X, e c d = X; mas a b he para c d em razaõ duplicada de a . c, e de b . d (*num.* 64.) pois que ella he igual, pela hypoteſi, ſeràõ as figuras ſemelhantes na razaõ duplicada.

COROLARIO.

67 A Superfice de hum circulo he para a de outro circulo em razaõ duplicada do ſeu circuito, ou do ſeu diametro.

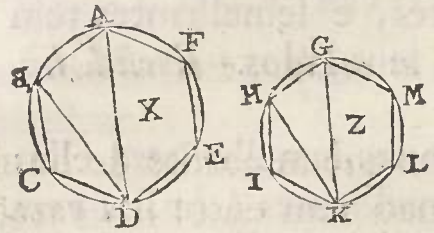
O que he claro; porque dous circulos ſe conſidéraõ, como dous poligonos de hum numero indefinito de lados.

THEOREMA XVII.

68 OS poligonos regulares, e ſemelhantes ſaõ entre ſi, como os quadrados dos diametros dos circulos, em que ſaõ inſcritos. *Euclid. liv.* 12. *Prop.* 1.

Sejaõ dous poligonos X, e Z inſcritos em dous circulos: devemos moſtrar, que tem entre ſi a meſma razaõ, que os quadrados dos ſeus diametros A D, e G K.

Pois que X, e Z ſaõ poligonos ſemelhantes, ſeráõ hum para outro em razaõ do lado A B para o lado, GH pelo precedente; mas por causa da semelhança, os triangulos ABD, e GHK saõ tambem semelhantes; porque todos os seus angulos saõ iguaes, apoyados por iguaes arcos (*liv.* 2. *num.* 37.) e assim AB.GH :: AD.GK; e assim a razaõ duplicada de AB para GH serà a mesma, que a de AD para GK: logo o poligono X he para o poligono Z em razaõ duplicada de AD para GK, ou como o quadrado AD ao quadrado GK (*liv.* 3. *numer.* 73.) e he o que se queria mostrar.



COROLARIO.

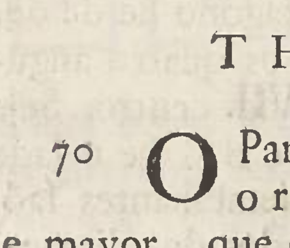
69 OS circulos saõ considerados, como poligonos; e assim as suas superfices tem entre si a mesma razaõ, que os quadrados dos seus diametros. *Euclides liv.* 12. *Prop.* 2.

O que fica mostrado.

THEOREMA XVIII.

70 O Paralélogramo ABDH serà mayor, que o rectangulo AFGK, sendo AB=BC, e mayor, que qualquer outro, do qual o ponto G se achar na diagonal DC. *Euclid. liv.* 6. *Prop.* 27.

Sendo BG=GE (*liv.* 2. *num.* 31.) serà BG+GC=GE+GC, e BI=KE; mas BF=BI, pois que AB=BC: logo BF+BG, ou AG=BG+KE; mas BG+KE he menor, que BE, ou menor, que AD, seu igual: logo AG menor, que AD, como he evidente.



CAPI-

CAPITULO V.

Da razaõ, que tem entre ſi as cordas, e os radios.

71 DEvemos advertir, que as cordas de hum meſmo circulo naõ tem entre ſi a razaõ dos arcos, de que ſaõ cordas; por exemplo, BED, e CFD, ſendo iguaes, o arco BDC he duplo de hum, e de outro arco, e ſe BC, corda deſſe arco, foſſe o dobro da corda BD, ou da corda DC, como BDC he duplo de BED, ſeria BD + CD = BC; o que he impoſſivel (*liv.* 1. *num.* 12.) logo naõ devemos ſuppor, que as cordas de hum meſmo circulo ſejaõ entre ſi, como os arcos, de que ſaõ cordas.

THEOREMA I.

72 O Radio de hum circulo he igual á corda de 60. gràos.

O angulo do centro de hum Exagono he de 60. gràos, ſexta parte de 360. que valem os quatro angulos rectos, que ſe percebem á roda do centro. Seja pois BAC hum angulo de 60. gráos, e BC he o lado do Exagono, e devemos moſtrar ſer igual a AB, ou AC. O triangulo BAC he iſoſceles, e os angulos, ſobre a baze ſaõ iguaes; mas o angulo do vertice he de 60. gráos; e aſſim os dous da baze em ſoma fazem 120: logo cada hum he de 60. gráos, e o triangulo equilateral; e aſſim BC = AB, ou BC = AC; e he o que ſe queria moſtrar.

COROLARIO I.

73 DAdo hum circulo inſcrever nelle hum Exagono. *Euclid. liv.*4. *Prop.* 15.

Eſta operaçaõ ſó depende de abrir o compaſſo da grandeza do radio, e aplicada ao circulo ficará dividido em ſeis partes iguaes.

COROLARIO II.

74 INſcrever hum triangulo equilatero em hum circulo.

Tomando duas partes das ſeis do Exagono ſeráõ a corda da terça parte do circulo.

COROLARIO III.

75 A Razaõ da circunferencia do circulo para o ſeu radio, he mayor, que 3 para 1.

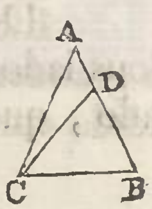
Cada lado do Exagono he igual ao radio; os ſeis lados ſaõ iguaes a tres vezes o diametro; e aſſim a circunferencia deſſe poligono he para o radio do circulo, em que he inſcrito, como 3 para 1; mas a circunferencia do circulo he mayor, que a do Exagono, cada porçaõ de circulo será mayor, que o lado, que lhe ſerve de corda: logo a razaõ da circunferencia para o radio he mayor, que 3 para 1.

LEMMA I.

76 DEſcrever hum triangulo iſoſceles, que tenha cada hum dos angulos da baze duplo do angulo do vertice. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 10.

Deve-ſe dividir a linha em meya, e extrema razaõ (*num.* 34.) De B, e de D com o intevallo da mediana

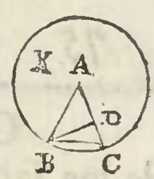
diana ſe façaõ dous arcos, que ſe cruzem no ponto C; e aſſim BC = DC = AD; os dous triangulos ADC, DCB ſaõ iſoſceles (conſtrucçaõ) logo ∸ AB.AD.DB, e pondo as linhas AB.BC :: BC. BD, ſeràõ ſemelhantes, e equiangulos os triangulos BAC, e DBC (*num.* 13.) e iſoſceles; mas o angulo BDC he igual a DAC + ACD: logo DBC = BDC he duplo de BAC; e he o que ſe queria moſtrar.



THEOREMA II.

77 A Medianna do radio cortado em meya, e extrema razaõ he o lado do Decagono, ou corda de 36. gràos. *Eucl. liv.* 4. *Prop.* 10.

Seja AC radio do circulo dividido em D, em meya, e extrema razaõ (*num.* 34.) e feita a corda BC igual à mediana AD, e os angulos ſobre a baze BC, ſerá cada hum duplo de BAC (*num.* 76.) logo BC he a decima parte da circunferencia do circulo, e lado do Decagono.



PROBLEMA I.

78 CIrcunſcrever hum Pentagono regular em hum circulo. *Eucl. liv.* 4. *Prop.* 12.

Em primeiro lugar, devemos inſcrever hum Pentagono no circulo dado. Em ſegundo, lançar do centro deſſe circulo linhas rectas aos cinco angulos do Pentagono. E em terceiro, lançar tangentes por eſſes pontos da circunferencia, e ſerà feito o que ſe pedia, como he evidente.

PROBLEMA II.

79 INscrever hum circulo em hum Pentagono regular. *Euclid. liv.* 4. *Prop.* 13.

Devem-se lançar perpendiculares do meyo de dous lados desse Pentagono, que daràõ o centro do circulo, que se busca.

PROBLEMA III.

80 CIrcunscrever hum circulo a hum Pentagono. *Eucl. liv* 4. *Prop.* 14.

Tendo achado o centro do circulo, pelo problema precedente, devemos tomar o intervallo desse centro a hum dos angulos do pentagono, e descrever o circulo, que serà o buscado.

LOGICA GEOMETRICA, LIVRO V.

DA TERCEIRA ESPECIE DA EXTENC,AM, ou dos ſolidos.

CAPITULO I.

Das ſecçoens, ou encontros dos planos, para conhecimento da formaçaõ dos ſolidos.

DEVEMOS advertir, que para percebermos hum ſolido, ou corpo, o devemos conſiderar compoſto de hum grande numero de ſuperfices, ou planos, huns ſobre outros, e cada plano compoſto de muitas linhas, e cada linha de muitos pontos; porque conſiderando, que hum ponto indiviſivel ſe move, gerarà huma linha, movendo-ſe a linha, gerarà huma ſuperfice, e movendo-ſe a ſuperfice, gerarà hum corpo, ou ſolido.

Propo-

Propoſiçoẽs evidentes, que reſpeitaõ aos planos, os quaes ſe geraõ pelo movimento de huma linha recta, ou pela mais curta diſtancia entre dous pontos.

PROPOSIC, AM I.

1 HUma linha recta, movendo-ſe pelo comprimento de outra linha recta, e immovel, e guardando ſempre a meſma ſituaçaõ perpendicular, gèra huma ſuperfice, ou hum plano.

Eſta ſuperfice faz a diſtincçaõ, entre as ſuperfices planas, e convexas.

PROPOSIC, AM II.

2 HUma linha recta ſe póde aplicar em todo o ſentido ſobre huma ſuperfice plana, e ajuſtarſe, ou convir com ella.

PROPOSIC, AM III.

3 A Superfice de hum plano he a mais curta, que ſe póde perceber, entre os ſeus extremos.

A razaõ he; porque a ſuperfice plana he compoſta de linhas rectas, que ſaõ as mais curtas entre os ſeus extremos.

PROPOSIC, AM IV.

4 HUm plano levantado ſobre outro, ſe dirá perpendicular, quando ſe naõ inclina mais para huma, que para outra parte.

PRO-

PROPOSIC,AM V.

5 DOus planos ſe dizem paralélos, quando ſaõ hum do outro por toda a parte igualmente diſtantes, e que produzidos, nunca ſe encontraõ.

PROPOSIC,AM VI.

6 HUm plano ſe póde produzir, ou perceber produzido de todos os lados, tanto, quanto quizerem, ou for neceſſario.

PROPOSIC,AM VII.

7 HUma linha recta naõ póde eſtar parte em hum plano, e parte no ar, ou fóra do plano. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 1.

A razaõ he; porque eſta linha naõ ſe poderia aplicar a hum plano, e ajuſtarſe com elle (*Prop.* 2.) e a parte, que eſtiveſſe no plano, naõ ſeria parte da linha no ar, e tendo eſſas duas linhas dous pontos communs, naõ podiaõ ſer diferentes. (*liv.* 3. *Prop.* 16.)

PROPOSIC,AM VIII.

8 DUas linhas rectas, que ſe cortaõ, pódem eſtar ambas em hum meſmo plano. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 2.

As linhas DB, e EC ſe cortaõ no ponto A, e à roda de B, C, D, E, B, he hum plano, que ſe póde conſiderar produzido de qualquer deſſas linhas, á roda da outra; e aſſim eſſas duas linhas eſtaõ em hum meſmo plano, ou parte nelle, e parte no ar, o que naõ he poſſivel, como fica moſtrado.

PROPOSIC,AM IX.

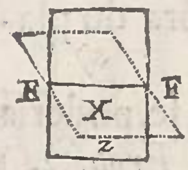
9 TOdo o triangulo ſe póde conſiderar, como hum plano, e o he effectivamente.

Porque he o mais curto eſpaço, entre os termos do meſmo triangulo.

PROPOSIC,AM X.

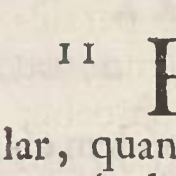
10 A Commua ſecçaõ, ou encontro de dous planos, he huma linha recta. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 3.

Os planos X, e Z ſe cortaõ, e os extremos da ſua ſecçaõ ſaõ os pontos E, e F, entre os quaes eſtà a linha recta EF, ſobre a do outro plano. Se eſſas duas linhas naõ foſſem huma ſó linha, poderiamos lançar ſobre ellas, e pelos dous pontos E, e F, outra linha recta; o que he impoſſivel (*liv.* 1. *num.* 15.) logo a commua ſecçaõ deſſes dous planos he huma linha recta.



PROPOSIC,AM XI.

11 HUma linha recta, como AB levantada ſobre o plano X, ſe deve dizer perpendicular, quando do ponto A, que he o ſeu pé, como centro, ſe deſcrever hum circulo: B, ſeu extremo ſe conſidéra igualmente diſtante da circunferencia deſſe circulo; e naõ ſendo aſſim, naõ ſe póde conſiderar perpendicular.



Pela ſuperfice ſe entende a figura X, e o circulo A, e a linha A B he perpendicular, ſegundo a definiçaõ (*liv.* 1. *num.* 49.) *Prop.* 12.

PROPO-

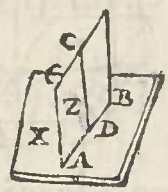
PROPOSIÇAM XII.

12 CONcedido, que AC he huma linha perpendicular ſobre o plano X, e que ſe move uniformemente de hum movimento recto ſobre a linha AB, ella gerará o plano Z, que ſerá perpendicular em todas as ſuas partes ſobre o plano X, como he evidente (*figura abaixo*)

PROPOSIÇAM XIII.

13 SE a linha CD he perpendicular ſobre AB, ſecçaõ de Z, e de X, he perpendicular ſobre X, e aſſim todo o plano Z he perpendicular ſobre o meſmo X.

Podemos conſiderar, que o plano Z he feito do movimento recto, e uniforme da linha DC, ſobre a linha AB; e aſſim o plano Z he perpendicular ſobre o plano X.



THEOREMA I.

14 ENtre duas linhas pararélas, ou naõ paralèlas, que eſtaõ em hum meſmo plano, ou entre huma linha, e hum ponto, naõ ſe póde perceber mais, que o meſmo plano, no qual eſtará toda a linha recta, lançada entre as duas linhas. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 7.

A razaõ he; porque, ſe quizermos perceber dous planos, hum delles ſerá mayor, e outro menor, o que naõ póde ſer. (*num.* 2.)

Toda a ſuperfice, que naõ he a menor, ou mais curta entre os ſeus limites, naõ póde ſer hum plano: logo he força, que ſejaõ iguaes; e aſſim naõ ſaõ diferentes.

THEO-

THEOREMA II.

15 DOus planos, que ſe ajuſtaõ em tres pontos, que naõ ſaõ de huma meſma linha, ſe ajuſtaõ inteiramente.

Em primeiro lugar, entre dous deſſes pontos dados, ſe naõ póde perceber mais, que huma ſó linha recta.

Em ſegundo lugar, entre eſta linha recta, e o terceiro ponto dado, naõ ſe pódem perceber dous diferentes planos (*Prop. precedente*) e aſſim a parte deſſes dous planos, entre eſſes tres pontos, he huma meſma couſa, e por conſeguinte, produzindo-ſe a eſta parte, ſerà ſempre hum meſmo plano.

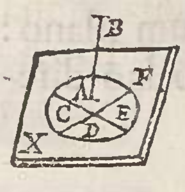
COROLARIO

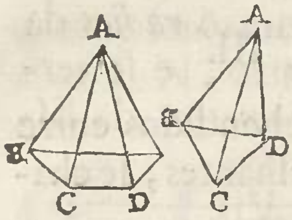
16 A Poſiçaõ de hum plano naõ depende mais, que de tres pontos, que naõ ſejaõ de huma meſma linha; e aſſim, dados tres pontos, que naõ eſtejaõ ſobre huma meſma linha, o plano he feito.

THEOREMA III.

17 SE B, vertice da linha AB levantada ſobre o plano X, for igualmente diſtante de C, D, E, tres pontos igualmente diſtantes do pé A, eſta linha ſerà perpendicular ſobre X.

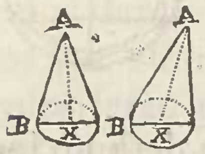
Em primeiro lugar, devemos perceber no plano X hum circulo igualmente diſtante de B, que paſſa por C, D, E, que ſe ſuppoem igual à diſtancia de B. Em ſegundo lugar, podemos perceber hum ſegundo circulo, de que A he centro, que paſſa pelos tres pontos C, D, E, e aſſim igualmente diſtantes de A (hypoteſi) centro



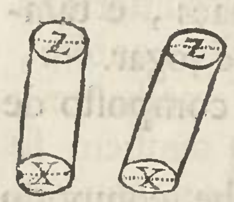


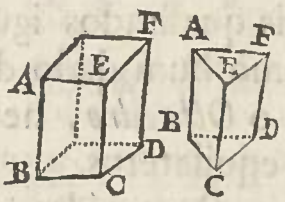
Em primeiro lugar, ſe eſta figura for hum poligono, a linha, pelo ſeu pé deſcreverà hum ſolido, que ſe chama *Piramide*, como A B C D.

Em ſegundo lugar, ſe a figura, que a linha pelo ſeu pè percurrer, for hum circulo, o ſolido, que eſcrever ſe chamarà *Cóne*, como X. Neſtas figuras, a linha, lançada do ponto immovel ao centro da figura, ſe chama eyxo do ſolido; e o ſolido ſe chama recto, ſe eſta linha com a baze faz hum angulo recto; e ſe chama ſolido obliquo, quando o eyxo faz com a baze angulos obliquos.



Em terceiro lugar, ſe o vertice da linha naõ for immovel, e ſe mover á roda da figura ſempre perpendicular á baze, formarà hũa figura igual, ſemelhante, e ſemelhantemente poſta; e a eſte ſolido chamaõ os Geometras *Priſma*, como A B C D E F.





Em quarto lugar, ſe a baze for hum circulo, o ſolido ſe chama *Cylindro*, como X Z, que ſerà recto, ſe o eyxo for perpendicular ao centro do circulo; e obliquo, ou inclinado, ſe o eyxo com a baze naõ fizer angulo recto.

DEFINIC, AM VI.

43 SE hum circulo fizer huma revoluçaõ inteira à roda do ſeu diametro immovel, o ſolido gerado ſe chama *Esfera*, e o ſeu diametro ſe chama eyxo da Esfera, e o centro do circulo, que fez o giro, he tambem o *centro* da Esfera, e as linhas lançadas

DEFINIÇAM III.

40 OS ſolidos, que ſaõ comprehendidos entre planos todos iguaes, e ſemelhantes, ſe chamaõ, por nome geral, *Poliedros.*

Chamaõ-ſe Poliedros regulares, quando ſaõ regulares as figuras, que os comprehendem, e que todos os ſeus angulos ſolidos ſaõ iguaes.

DEFINIÇAM IV.

41 O Numero das ſuperfices planas de hum ſolido regular tem nomes particulares.

Em primeiro lugar, o *Tettaédro* he compoſto de quatro triangulos equilateraes, e iguaes.

Em ſegundo lugar, o *Exaédro*, ſe diz aquelle, que he comprehendido por ſeis quadrados iguaes, e tambem ſe chama Cubo, como hum dado de jogar.

Em terceiro lugar, o *Octaédro*, he compoſto de oito triangulos iguaes, e equilateros.

Em quarto lugar, o *Dodecaédro*, he compoſto de doze Pentagonos iguaes, e equilateros.

Em quinto lugar, o *Icoſſaédro*, he compoſto de vinte triangulos, equilateros, e iguaes.

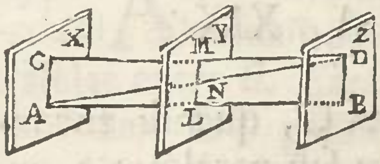
Eſtes cinco corpos, ou ſolidos, ſaõ os que ha regulares, e ſe naõ tem excogitado, atè o preſente, outro, a ſaber, que ſeja tal, que ſe poſſa inſcrever em huma esfera, de ſórte, que todos os ſeus angulos toquem a circunferencia còncava da esfera.

DEFINIÇAM V.

42 SE o extremo de huma linha ſe pozer immovel, e com o outro extremo ſe for percurrendo huma figura, haverà quatro caſos.

Em

qual se lançaraõ, pelos pontos da secçaõ L, e M as linhas L N, e M N; e o triangulo A B D se percebe em hum plano (*num.* 9.) como



tambem A D C em outro: senaõ he o mesmo cada hum dos planos desses triangulos, sendo cortados por planos paralèlos, as linhas da secçaõ seràõ paralèlas (*num.* 33.) e esses triangulos seràõ tambem cortados paralèlos a esses triangulos; e assim A L. L B :: A N. N D; e assim os triangulos seràõ tambem cortados paralèlamente às suas bazes; e por tanto serà A L. L B :: A N. N D :: C M. M D (*liv.* 4. *num.* 16.) e por consequencia A L. L B :: C M. M D (*liv.* 3. *num.* 53.) e he o que se queria provar.

CAPITULO II.

Da composiçaõ dos solidos.

DEFINIC, AM I.

38 O Angulo solido se compoem de tres, ou de mais angulos planos, e se unem nos seus vertices, tendo as suas bazes em planos diferentes, ou huma mesma baze.

Dous angulos planos naõ pòdem formar hum angulo solido; e assim saõ necessarios, ao menos, tres, ou mais, que se ajuntem, de sórte, que os seus vertices se terminem em hum ponto, como hum diamante bem talhado.

DEFINIC, AM II.

39 OS solidos comprehendidos entre superfices rectas, ou planas paralèlas, se chamaõ *Paralelipipedos.*

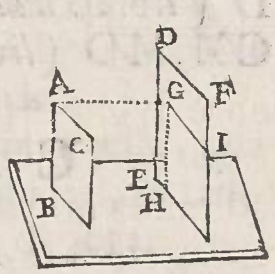
DEFI-

iguaes, e ſemelhantes: logo o angulo CBD he igual ao angulo MNO; e he o que ſe queria demonſtrar.

THEOREMA XIX.

36 DUas linhas AB, e AC, que ſe encontraõ no ponto, A, e ſaõ paralélas a outras duas linhas ED, e DF, que ſe encontraõ no ponto D, ſe ellas naõ eſtaõ ſobre hum meſmo plano, os planos BC, e EF ſeràõ paralèlos. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 15.

Do ponto A ſe lance huma perpendicular ſobre o plano EF, que o encontre no ponto G, do qual ſe lance GH paraléla a DE, e GI paralèla a DF: logo (*num.* 34.) AB, e GH ſaõ paralèlas, como tambem AC, e GI; e aſſim AG, ſendo perpendicular ſobre GI, e ſobre GH (conſtrucçaõ) o ſerà tambem ſobre AC, e ſobre AB (*liv.* 1. *num.* 68.) e por tanto o ſeràõ ſobre o plano BAC (*num.* 19.) e aſſim ſeràõ eſſes dous planos paralèlos; porque, ſe o naõ foſſem, produzidos ſe encontrariaõ, &c.



THEOREMA XX.

37 DUas linhas rectas, cortadas por planos paralèlos, ficaõ cortadas proporcionalmente. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 17.

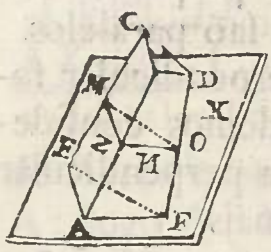
Sejaõ duas linhas rectas AB, e CD cortadas por tres planos paralèlos X, Y, Z, nos pontos A, L, B, D, M, C: digo, que ellas ſaõ cortadas proporcionalmente, a ſaber, AL. LB : : CM. MD.

Das extremidades X, e Z ſe ajuntem os pontos da ſecçaõ pelas rectas AC, e BD, e ſe lance a diagonal AD, que encontre o plano Y no ponto N, do

THEOREMA XVII.

34 AS linhas rectas paralélas a huma terceira, ainda que esteja em diferentes planos, saõ paralèlas entre si. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 9.

Seja CE paraléla a AB, à qual DF em outro plano he tambem paralèla: digo, que CE, e DF saõ tambem paralèlas entre si: do ponto B se levante sobre BA a perpendicular BC, e BD, que còrte CE, e DF, nos pontos C, e D; pelos tres pontos podemos perceber hum plano (*num.* 9.) e os tres pontos saõ B, C, D. AB he perpendicular, tanto sobre BD, como sobre BC; e assim serà perpendicular sobre esse plano (*num.* 19.) e CE, e DF suppostas paralèlas a AB seraõ tambem perpendiculares sobre o dito plano, e paralèlas entre si (*num.* 19.) o que se queria demonstrar.



THEOREMA XVIII.

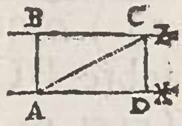
35 TOdas as linhas paralèlas no plano X, encontrando outras linhas tambem paralélas no ponto Z, faràõ entre si os angulos iguaes. *Eucl. liv.* 11.*Prop.* 10.

BD, e NO (*figur.idem*) saõ entre si paralèlas sobre o plano X; e BC, e MN o saõ tambem sobre o plano Z: Devemos mostrar, que o angulo CBD he igual ao angulo MNO; para o mostrar, se lance DF, e CE paralélas à linha AB; pois que as paralèlas entre paralèlas saõ iguaes, pois fazem os mesmos angulos (*liv.* 2. *num.* 26.) por consequencia seràõ iguaes (*liv.* 2. *num.* 107.) e pois que CE he paralèla a DF (*Theorema precedente*) por tanto serà BD = NO, e BC = MN, e CD = MO: logo os triangulos, CBD, MNO saõ iguaes do plano, esses dous planos saõ tambem igualmente distantes: logo seràõ paralélos.

THEOREMA XV.

32 OS planos X, e Z, sendo paralélos, e a linha AB perpendicular sobre X, será tambem perpendicular sobre Z; e se AB he perpendicular sobre X, e sobre Z, esses dous planos saõ paralélos.

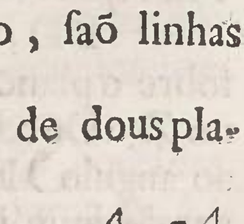
Se nos duvidarem, que AB, perpendicular sobre X, o naõ he tambem sobre Z, podemos considerar, que do ponto A se levanta huma perpendicular para Z, tal, como AC; e assim serà mais curta, que AB (*liv.* 1. *num.* 52.) Do ponto C se considére huma perpendicular sobre X, que serà tambem mais curta, que AC, e ainda mais que AB; e assim o ponto D se chegarà mais para Z, do que para A; e assim, se X, e Z naõ estaõ em igual distancia, naõ seràõ paralélos contra a supposiçaõ: logo huma linha, que he perpendicular sobre hum desses planos, o he tambem sobre o outro, &c.



THEOREMA XVI.

33 AS secçoens de dous planos paralélos cortados por hum terceiro plano, saõ linhas perpendiculares. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 16.

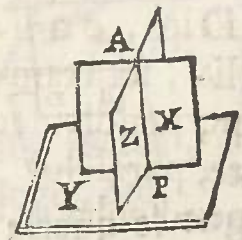
Sejaõ as duas secçoens AB, e CD de dous planos paralélos; essas duas secçoens saõ linhas rectas (*num.* 10.) as quaes estaõ no terceiro plano, onde, se forem produzidas, se encontraráõ, naõ sendo paralèlas, e os dous planos, em que ellas se produzissem, se encontrariaõ, naõ sendo paralélos, contra a supposiçaõ: logo AB, e CD saõ linhas paralélas.



THEO-

ſobre eſſe terceiro plano. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 19.

Em primeiro lugar, ſeja a ſecçaõ A P dos dous planos X, e Z perpendicular ſobre o plano Y: digo, que a ſecçaõ A P he huma linha recta (*num.* 10.) e pois que os dous planos X, e Z ſaõ perpendiculares ſobre Y, a linha A P conſiderada em Z naõ ſe póde conſiderar, que ſe incline para huma, ou outra parte de Z; e da meſma ſórte ſe deve conſiderar em X; porque podemos conſiderar tres pontos no plano Y, igualmente diſtantes de P, os quaes ſeráõ tambem igualmente diſtantes de A: logo A P he perpendicular ſobre o plano Y (*num* 17.) o que ſe queria moſtrar.



THEOREMA XIII.

30 SE a ſecçaõ de dous planos for perpendicular a hum terceiro plano, ſeráõ perpendiculares ſobre eſſe plano. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 18.

Sejaõ os dous planos X, e Z (*figura idem*) e a ſecçaõ A P; todos eſſes tres planos ſe pódem conſiderar feitos do movimento da linha A P (*num.* 12.) o que ſe faz evidente.

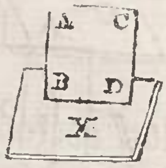
THEOREMA XIV.

31 SE tres pontos em hum plano, e naõ ſobre huma meſma linha forem igualmente diſtantes de hum ſegundo plano, eſſes dous planos ſeràõ paralèlos.

A demonſtraçaõ he clara; porque a poſiçaõ de hum plano naõ depende mais, que de tres pontos (*num.* 16.) e por conſequencia, ſe eſſes tres pontos de hum meſmo plano eſtaõ igualmente diſtantes de hum ſegundo

THEOREMA X.

27 SE duas linhas forem perpendiculares ſobre hum plano, podem-ſe conſiderar neſſe meſmo plano.



Podemos perceber, que AB, e CD perpendiculares ſobre X, e huma terceira linha BD, ſobre a qual podemos perceber, que AB, ou CD ſe movem uniformemente, ellas faráõ hum plano (*num.* 1.) e he o que ſe queria moſtrar.

THEOREMA XI.

28 SE duas linhas, como AB, e CD forem perpendiculares ſobre o plano X, ſeráõ paralélas, e ſe de duas paralélas huma for perpendicular ſobre o plano X, a outra o ſerá tambem. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 6. *e* 8.

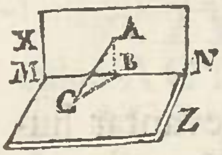
Em primeiro lugar, lance-ſe a linha BD (*figura idem*) pelo pé de AB, e de CD, as quaes linhas (*num.* 20.) ſaõ perpendiculares ſobre BD; logo eſſas tres linhas AB, CD, BD pódem eſtar no meſmo plano (*num.* 28.) aſſim AB, e CD, ſendo perpendiculares ſobre BD, ſeráõ paralélas. (*liv.* 1. *num.* 67.)

Em ſegundo lugar, ſe AB, e CD ſaõ paralélas, e que AB ſeja perpendicular: digo, que CD o ſerá tambem; porque, lançando a linha BD, a linha AB ſerà perpendicular ſobre BD (*num.* 20.) logo CD ſerà paraléla á linha AB, e tambem perpendicular ſobre BD (*liv.* 1. *num.* 68.) o que ſe queria moſtrar.

THEOREMA XII.

29 A Secçaõ de dous planos perpendiculares a outro plano he huma linha perpendicular

plano, como AB, e AC; ajunto os pès deſſas duas linhas pela linha BC; e aſſim eſſes tres pontos A, B, C, formaõ o triangulo ABC, que ſe pòde imaginar no meſmo plano (*num.* 9.) os angulos ABC, e ACB, que ſe ſuppoem perpendiculares, AB, AC ſaõ rectos; e aſſim o triangulo teria mais de dous angulos rectos, o que naõ he poſſivel. (*liv.* 2. *numer.* 77.) logo, &c.



COROLARIO.

25 SE o plano X for perpendicular ſobre o plano Z, e que de A, ponto do plano X, ſe lance huma perpendicular ſobre Z, eſta linha cahirà ſobre MN, como ſecçaõ de X, e de Z. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 38.

Se houver quem negue, que huma perpendicular lançada (*figura idem*) de A ſobre C, fóra da linha MN: lance-ſe AB perpendicular ſobre MN; aſſim como B he na ſecçaõ de X, e de Z, haverá ſobre Z duas perpendiculares AB, e AC lançadas de hum meſmo ponto A; o que a címa ſe moſtrou impoſſivel.

THEOREMA IX.

26 A Linha perpendicular he a mais curta, que ſe póde lançar de hum ponto, fóra de hum plano a eſſe plano.

Seja o ponto dado A (*figura idem*) a linha AB he perpendicular, e o naõ he AC. Devemos provar, que AB he mais curta, que AC, ajuntem-ſe os pés deſſas duas linhas por huma recta BC: o triangulo ABC ſe póde conſiderar no meſmo plano. (*num.* 9.) mas AB, perpendicular ſobre BC he mais curta, que a obliqua AC (*liv.* 1. *num.* 52.) e he o que ſe queria moſtrar.

THEO-

num. 48.) logo A C ſerá ſó a perpendicular às tres linhas A B, A F, A G; o que ſe queria moſtrar.

PROBLEMA II.

22 SObre o ponto A no plano X, levantar huma perpendicular.

Deve-ſe do ponto A, como centro, deſcrever hum circulo (*figura idem.*) toda a linha, que deſcer de hum ponto igualmente diſtante do circulo ſerà a perpendicular pedida.

THEOREMA VII.

23 DE hum ponto dado ſobre hum plano, ſe naõ póde levantar mais, que huma ſó perpendicular. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 12.

Se ſe negar, podemos perceber, que ſobre o meſmo ponto A (*figura idem*) ſe levantaõ as duas linhas A E, e A C, que ſe ſuppoem perpendiculares, e que de A, como centro ſe deſcreve o circulo X; os pontos E, e C ſeràõ vertices das duas linhas iguaes A E, e A C, as quaes, ſendo diferentes, naõ pódem ſer igualmente diſtantes da circunferencia do circulo X, e aſſim naõ ſeràõ ambas perpendiculares ſobre o plano X (*num.* 20.) logo ſó huma perpendicular ſe póde lançar; e he o que ſe queria demonſtrar.

THEOREMA VIII.

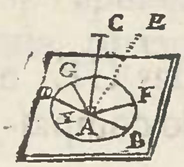
24 DE hum ponto dado fóra de hum plano, ſe naõ póde lançar a eſſe plano mais, que huma ſó perpendicular.

Seja A o ponto dado fóra do plano, do qual ſe ſuppoem, ſe querem lançar duas perpendiculares a eſſe pla-

THEOREMA V.

20 A Linha recta A B, e qualquer outra, no circulo X lançada por A, pé da perpendicular A C ſobre eſſe plano, he perpendicular ſobre A C, ou A C he perpendicular ſobre todas as linhas rectas do plano X, que paſſa por A.

De A, pé da perpendicular A C ſe deſcreva o circulo X, e produza-ſe a linha B A, de ſórte, que còrte o plano X em D, e B. Se C, vercice da perpendicular naõ he igualmente diſtante de D, e de B, A C naõ ſerà perpendicular ſobre A B, (*liv.* 1. *num.* 40.) mas tambem A C naõ ſerá perpendicular ſobre o plano X (*num.* 11.) o que he contra a ſuppoſiçaõ: logo A B encontra perpendicularmente a linha A C, e qualquer outra linha do plano X, que paſſar pela ponto A.



THEOREMA VI.

21 SE huma linha recta, como A C, encontrar perpendicularmente em hũ meſmo ponto tres linhas rectas, como A B, A F, A G, (*figura precedente.*) eſſas tres linhas eſtaraõ em hum meſmo plano. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 5.

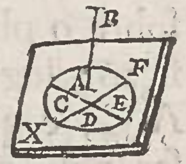
Sejaõ A B, e A F no plano X (*figur. idem*) e que A G naõ eſtá nelle, mas ſobre outro plano; imaginando o terceiro plano Y, que paſſe por A C, e por A G, eſte prolongado cortará X, e eſta linha A C ſerá perpendicular ſobre o plano X (*num.* 19.) logo ſerá tambem perpendicular ſobre a linha da ſecçaõ X, e de Y (*num.* 20.) e, pela ſuppoſiçaõ, cahe ſobre A G, e tambem ſobre A C, e no meſmo ponto A; e aſſim haveria duas perpendiculares, o que repugna. (*liv.* 1. *num.*

centro do circulo, que paſſa pelos tres pontos C, D, E, tambem igualmente diſtantes de A; eſſes dous circulos (pela hypotheſi) ſaõ hum ſó circulo (*liv.* 1. *n.*87.) logo (*num.* 11.) he perpendicular ſobre X, como ſe queria moſtrar.

PROBLEMA I.

18 DE hum ponto dado no ar, como B, abaixar huma perpendicular ſobre o plano X. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 11.

Lancem-ſe á vontade as duas linhas rectas CE, e DF (*figura idem*) e aplicando huma ponta do compaſſo ſobre B, com a outra tòmo os tres pontos C, D, E, igualmente diſtantes, pelos quaes faço paſſar a circunferencia de hum circulo (*liv.* 1. *num.* 86.) ao centro deſſe circulo de B lanço a perpendicular, e ſerà reſoluto o problema, e feito o que ſe pedia.



THEOREMA IV.

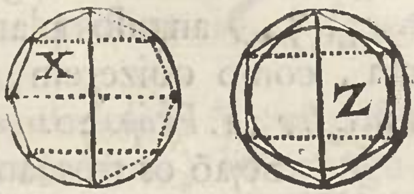
19 SE huma linha for perpendicular ſobre o ponto da ſecçaõ de duas linhas, que eſtaõ em hum meſmo plano, ſerá perpendicular a todo o plano. *Euclides liv.* 11. *Prop.* 4.

A razaõ he; porque, tomando neſſas duas linhas de huma, e outra parte da ſecçaõ dous pontos igualmente diſtantes, o vertice da perpendicular ſobre eſſas linhas, ſerà igualmente diſtante dos quatro pontos deſſe plano (*liv.* 1. *num.* 42.) e por tanto eſſa linha ſerà perpendicular ſobre todo o plano (*num.* 11.) o que ſe queria moſtrar.

das do centro para a circunferencia ſe chamaõ *radios* da Esfera, e as linhas, que paſſaõ pelo centro, e ſe terminaõ na circunferencia, ſe chamaõ *Diametros* da Esfera.

DEFINIC,AM VII.

44 HUm poligono regular, que ſobre huma linha recta, que paſſa pelo ſeu centro, fizer hum giro, ou circunvoluçaõ inteira, ſe chama *Eſpheroide*, que he huma eſpecie de Esfera, como X, e Z.



DEFINIC,AM VIII.

45 HUm ſolido, como A, ſe diz circunſcrito a outro ſolido, como B, que elle contém, ſe elle he o menor de todos os ſolidos ſemelhantes, que pódem comprehender o ſolido B; ou tambem ſe B he o mayor de todos os ſolidos ſemelhantes, que A póde comprehender.

DEFINIC,AM IX.

46 HUm ſolido, como B, diz-ſe inſcrito em outro ſolido A, que o comprehende, ſe elle he o mayor de todos os ſolidos ſemelhantes, que poſſaõ ſer comprehendidos em A, ou ſe A he o menor de todos os ſolidos ſemelhantes, que o poſſaõ comprehender.

DEFINIC,AM X.

47 COrpo regular he aquelle, que he comprehendido entre figuras ſemelhantes regulares,

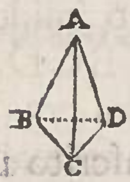
gulares, e iguaes, e do qual todos os angulos ſolidos ſaõ iguaes: Deſtes naõ ha mais, que cinco, como fica dito.

THEOREMA I.

48 SE hum angulo for comprehendido de tres angulos planos, dous deſſes angulos, em ſoma, como quizerem, ſeráõ mayores, que o terceiro. *Eucl. liv* 11. *Prop.* 20.

Sejaõ os tres angulos planos BAD, BAC, e CAD, formando hum angulo ſolido.

Devemos provar, que dous deſſes angulos planos, em ſoma, ſaõ mayores, que o terceiro; por exemplo, BAD < BAC + CAD. Entre as linhas AB, e AD nenhum plano he menor, que BAD. (*num.* 3.) e aſſim o plano recto BAD he menor, que o plano ouco, ou vazio ABCD. Da meſma ſórte moſtraremos, que o angulo plano BAC he menor, que BAD + CAD.



COROLARIO

49 OS lados de tres angulos planos, que formaõ hum angulo ſolido, ſendo iguaes, as bazes deſſes tres angulos planos formaõ hum triangulo. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 22.

Sejaõ as tres linhas iguaes, AB, AC, AD (*figura idem*) os lados dos tres angulos planos, que formaõ o angulo ſolido A: devemos moſtrar, que as tres linhas BC, CD, DB, bazes dos tres angulos planos, formaõ hum triangulo plano; para o que baſta, que duas deſſas linhas, em ſoma, ſejaõ mayores, que a terceira (*liv.* 2. *num.* 65.) mas aqui temos o meſmo, pois que duas deſſas linhas, que ſaõ as bazes, ſaõ mayores, que o angulo, que eſtá ſobre a terceira, e por conſe-

guinte

guinte eſta terceira linha he menor (*liv.* 2. *num.* 101.)

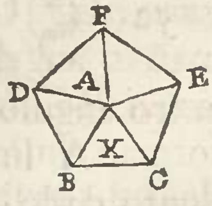
THEOREMA II.

50 TOdos os angulos planos, que comprehendem hum angulo ſolido, ſaõ menores, que quatro angulos rectos. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 21. (*figura idem*)

Em primeiro lugar, o angulo ſolido A composto de tres planos (pelo theorema precedente) ſaõ os angulos B C A + D C A mayores, que o angulo B C D; e da meſma ſórte, A D C + A D B > C D B; e aſſim mais A B D + A B C > D B C; e aſſim os ſeis angulos das bazes dos tres triangulos, que formaõ o angulo ſolido A, ſaõ mayores, que os tres angulos do triangulo B C D, a ſaber, mayores, que dous rectos (*liv.* 2. *num.* 73.) mas todos os angulos deſſes tres triangulos, que formaõ o angulo ſolido A, ſaõ em ſoma iguaes a ſeis rectos (*num. idem*) ſe deſta ſoma tirarmos mais que dous angulos rectos, valor dos ſeis angulos ſobre a baze, o reſto ſerá menor, que quatro angulos rectos, valor do angulo ſolido A; e he o que ſe queria provar.

Em ſegundo lugar, pelo meſmo modo moſtraremos, que os angulos ſolidos formados por quatro planos ſaõ tambem menores, que quatro rectos.

Em terceiro lugar, ſe X he hum triangulo ſolido comprehendido por cinco triangulos, cujo vertice ſe conſidéra no ar, provaremos, que o angulo D B C he menor, que os dous angulos D B A, e C B A (*theorema precedente*) e o angulo B C E he menor, que os angulos A C B + A C E;



e aſſim dos mais; mas tambem todos os angulos do poligono B C E F D, baze do angulo ſolido, ſaõ iguaes a ſeis angulos rectos (*liv.*2. *numer.* 120.) e aſſim todos

os

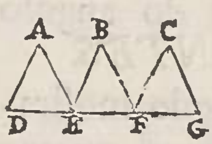
os angulos da baze dos cinco triangulos, que formaõ o angulo solido, X saõ mayores, que seis rectos, pois que saõ mayores, que os angulos do poligono, como fica mostrado.

Todos os angulos desses cinco triangulos, que formaõ o angulo solido, vallem dez rectos: logo, pois que os das bazes vallem mais de seis rectos, os do vertice valleràõ menos de quatro rectos; e he o que se queria mostrar.

PROBLEMA. I.

51 DAdos tres triangulos planos, dos quaes dous em soma sejaõ mayores, que o terceiro, mas que todos juntos, sejaõ menores de quatro angulos rectos, fazer hum angulo solido. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 23.

Sejaõ esses tres triangulos A, B, C; ajuntem-se em hum mesmo ponto, de sórte, que os lados, que os comprehendem convenhaõ, a saber, que AE se una com BE, BF com CF, CG com AD, que formaràõ hum angulo solido (*num.* 38.) e os pontos A, B, C, naõ seràõ mais, que o mesmo ponto.



PROBLEMA II.

52 SObre huma linha recta dada, e hum ponto dado nella, fazer hum angulo solido igual a outro angulo solido dado. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 26.

A linha dada seja AD (*figura idem*) e A o ponto dado: devemos no ponto dado A fazer hum angulo solido igual ao dado; sejaõ os tres planos desse angulo dado DAE, EBF, FCG; e fazendo outros tres planos iguaes, e ajuntando-os no ponto A, do modo, que

que fica dito no precedente problema, e he evidente, que formaõ o angulo ſolido pedido.

THEOREMA III.

53 SE houver dous angulos planos iguaes, aos quaes ſe levantem no ar duas linhas rectas, ſazendo angulos iguaes com as linhas dos angulos; primeiramente poſtos cada hum ao ſeu, e de hum ponto tomado no alto de cada huma deſſas linhas, ſe lançarem linhas perpendiculares aos planos, onde eſtaõ os angulos primeiramente poſtos, e dos pontos onde cahem eſſas perpendiculares, ſe lançarem linhas rectas aos vertices dos angulos primeiramente poſtos, os angulos, que formarem eſſas linhas com as levantadas no ar, ſeràõ iguaes entre ſi. *Eucl. lìv.* 11. *Prop.* 35.

Eſta propoſiçaõ de Euclides he mais de pratica, que de eſpeculaçaõ, e a ſua demonſtraçaõ para nada nos ſerve.

PROPOSIC,OENS EVIDENTES.

PROPOSIC,AM I.

54 HUma figura he mayor, que aquella, á qual he circunſcrita, e menor, que aquella, na qual he inſcrita.

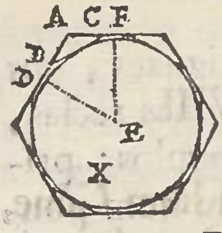
PROPOSIC,AM II.

55 DE dous Priſmas da meſma altura, aquelle, cuja baze he menor, e por conſequencia, póde ſer comprehendido, he menor.

Porque he evidente, que aquillo, que he contheudo he menor, do que o que o contèm.

PROPOSIÇAM III.

56 DE dous Prismas circunscritos a hum Cylindro, aquelle se chega mais a Cylindro, que tem mayor numero de lados.



He evidente (*liv.* 2. *num.* 146.) e por si mesmo evidente.

PROPOSIÇAM IV.

57 LOgo hum Prisma de hum numero indefinito de lados se chega tanto a Cylindro, que naõ tem nenhuma diferença; e assim podemos suppor, que o Cylindro he hum Prisma de hum numero indefinito de lados.

PROPOSIÇAM V.

58 DE dous Prismas inscritos em hum Cylindro, o que mais se lhe aproxíma, tem mayor numero de lados.

Esta proposiçaõ he por si mesma evidente, pelo que fica dito nas proposiçoens antecedentes.

PROPOSIÇAM VI.

59 DE duas Piramides da mesma altura, a que tiver mayor baze, será mayor.

He evidente, que considerando a de mayor baze, como vazia, lhe caberia dentro a de menor baze.

PROPOSIC,AM VII.

60 DE duas Piramides circunſcritas a hum meſmo Cône, a que tiver mayor numero de lados, ſe aproximará mais do Cône.

PROPOSIC,AM VIII.

61 DE duas Piramides inſcritas em hum Cóne, a que tiver mayor numero de lados, ſe aproximará do Cône.

PROPOSIC,AM IX.

62 LOgo devemos ſuppor, que hum Cône he huma Piramide de hum numero indefinito de lados.

PROPOSIC,AM X.

63 QUanto mayor for o numero de lados de hum poligono, tanto mais ſe aproximará da Esfera, ou Esferoyde, que o fòrma, ſendo circunſcrito à Esfera.

O Poligono he, como gerador do Esferoyde: logo, quanto mayor for o numero de lados do poligono, mais ſe aproximará da Esfera.

PROPOSIC,AM XI.

64 HUma Esfera ſe póde conſiderar, como hum Esferoyde formado por hum poligono de hum indefinito numero de lados.

CAPI-

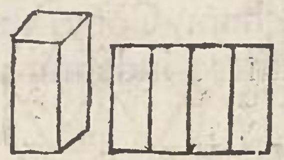
CAPITULO III.

Das ſuperfices dos ſolidos.

THEOREMA I.

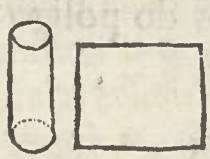
65 A Superfice de hum Priſma recto he igual a hum paralélogramo, que tem a meſma altura, e a baze igual ao circuito do Priſma.

As ſuperfices de hum Priſma recto ſaõ paralélosgramos, todos da meſma altura, cujas bazes ſaõ comprehendidas pelo meſmo circuito do Priſma: logo as ſuperfices do Priſma ſaõ igúaes a hum paralélogramo da meſma altura, e a baze juntamente igual ao circuito do Priſma, como he evidente.



COROLARIO I.

66 SEgue-ſe, que, pois que hum Cylindro recto he hum Priſma (*num.*57.) de hum indefinito numero de lados, a ſua ſuperfice he igual a hum paralélogramo da meſma altura, cuja baze he igual á circunferencia do circulo, que he a baze do Cylindro.



COROLARIO II.

67 SEgue-ſe, que tudo o que temos demonſtrado da razaõ, que ha entre os paralélosgramos, convém ás ſuperfices dos Cylindros.

Em primeiro lugar, as ſuperfices de dous Cylindros ſaõ huma para a outra, em razaõ compoſta das

das ſuas alturas, e do circuito das ſuas bazes.

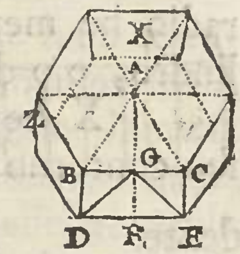
Em ſegundo lugar, ſe a altura de dous Cylindros he huma para a outra, como a baze para a baze, a razaõ das ſuas ſuperfices he compoſta de duas razoens iguaes, e eſta razaõ he duplicada (*liv.* 4. *num.* 54.)

Em terceiro lugar, ſe dous Cylindros tem as ſuas alturas, ou as ſuas bazes iguaes, as ſuas ſuperfices ſeràõ entre ſi, como as deſiguaes. (*liv.* 4. *num.* 75.)

THEOREMA II.

68 A Superfice de hum Priſma he dupla da ſuperfice, que lhe ſerve de baze, ſe elle tem por altura o apothema deſſe poligono.

Seja Z hum Priſma, e o poligono X a ſua baze: o apothema de X he AB, a ſaber, huma perpendicular do centro A ſobre BC, hum de ſeus lados: Devemos moſtrar, que, ſe FG, altura de Z, he igual a AG, apothema de X, a ſuperfice ſerá dupla de X.



Lançando de todos os angulos do poligono linhas ao centro, ſe faràõ outros tantos triangulos, como Z tiver de faces, as quaes faces ſaõ paralélosgramos; mas eſſes paralélosgramos, como BCED, e eſſes triangulos, como ABC, tem a meſma altura, e a meſma baze: logo eſſes paralèlosgramos ſaõ duplos deſſes triangulos (*liv.* 2. *num.* 130.) e por conſequencia, a ſuperfice de Z, compoſta deſſe paralèlogramo, he dupla da ſuperfice de X, igual a todos eſſes triangulos.

COROLARIO I.

69. SEgue-ſe, que, ſe a altura de hum Cylindro, que ſe póde conſiderar, como Priſma, he

igual ao radio do circulo, que he a sua baze, a sua superfice será dupla da superfice do circulo.

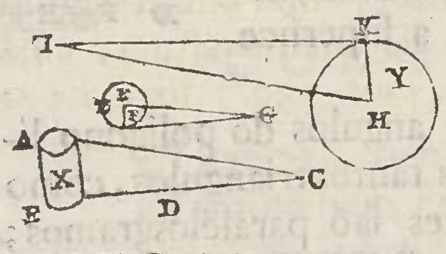
COROLARIO II.

70 SE hum Cylindro tiver por sua altura o diametro do circulo, que tem por baze, ou duas vezes o radio, a sua superfice serà quadrupla da circunferencia do circulo.

THEOREMA III.

71 A Superfice do contorno de hum Cylindro he igual à superfice de hum circulo, cujo radio he meyo proporcional entre a altura desse Cylindro, e o diametro do circulo, que tem por baze.

X he hum Cylindro, AE a sua altura, ED o seu contorno da baze, que he o circulo Z, e o circuito FG, ou ED; e EC o duplo do circuito; a superfice de X he igual ao paralélogramo AED, ou ao triangulo AEC, como a superfice do circulo Z ao triangulo EFG (*liv.* 2. *num.* 151.)



Supponhamos, que HK, radio do circulo Y, he meyo proporcional entre a altura de X, e 2EF, diametro de Z: Seja KL o circuito de Y; e assim a superfice serà igual ao triangulo HKL: falta logo mostrar, que HKL he igual ao triangulo AEC; porque em todos os circulos ha a mesma razaõ, entre os radios, e a circunferencia. Pela hypothesi, temos ÷ AE.HK.2EF; mas HK.KL::2EF.2FG, ou EC seu igual; e alternando, HK.2EF::KL.EC; e assim AE.HK::KL.EC (*liv.* 3. *num.* 53.) por tanto to, $AE \times EC = HK \times KL$ (*liv.* 3. *num.* 56.) mas os triangulos AEC, e HKL ſaõ metades deſſes rectangulos: logo ſaõ iguaes; e he o que ſe queria moſtrar.

Eſte theorema he de Archimedes.

THEOREMA IV.

72 A Superfice de huma Piramide he igual a hum triangulo, cuja altura he igual á altura de cada huma das ſuas faces, e cuja baze he tambem igual ao circuito da baze da Piramide, ou a hum paralélogramo da meſma altura, cuja baze he metade menor.

Cada huma das faces da Piramide he hum triangulo; eſſas faces, ſendo iguaes, eſſes triangulos ſeràõ iguaes entre ſi, e a hum triangulo rectangulo da meſma altura, e do qual a baze he igual a todas as bazes deſſes triangulos (*liv.* 2. *num.* 140.) mas eſſe triangulo he igual a hum paralélogramo da meſma altura, cuja baze he metade menor (*liv.* 2. *num.* 130.) logo he o que ſe queria provar.

COROLARIO I.

73 POís que os Cònes ſe pódem conſiderar, como Piramides, a ſuperfice do Còne ſerá igual a hum triangulo rectangulo da meſma altura, que o lado do Còne, e cuja baze ſeja igual ao circuito da baze do Còne, ou a hum paralélogramo rectangulo da meſma altura, e cuja baze he igual à metade da baze do Còne.

CORO-

COROLARIO II.

74 TUdo o que fica moſtrado das razoens, e das proporçoens entre muitos triangulos rectangulos, ſe póde aplicar à ſuperfice dos Cònes.

Em primeiro lugar, as ſuperfices dos Cònes saõ entre ſi em razaõ compoſta da ſua altura, e da ſua baze.

Em ſegundo lugar, ſe altura he para altuta, como baze para baze, eſſas ſuperfices teràõ razaõ duplicada.

Em terceiro lugar, ſe dous Cònes tiverem a altura, ou a baze igual, as ſuperfices teràõ entre ſi a razaõ das que forem deſiguaes.

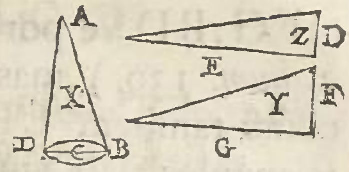
Em quarto lugar, pois que as circunferencias dos circulos ſaõ entre ſi, como os ſeus diametros, dous Cónes, que tiverem a meſma altura, ſeràõ entre ſi, como os diametros das ſuas bazes.

Em quinto lugar, como, ſendo dado hum rectangulo, ſe póde achar hum, ou mais ſemelhantes, que tenhaõ com elle huma tal razaõ; aſſim tambem, dado hum Cóne, ſe póde achar hum, ou muitos outros, tambem ſemelhantes, que tenhaõ com elle huma certa razaõ pedida. O theorema a cima he de Archimedes.

THEOREMA V.

75 A Superfice do Còne X, he para a do circulo B C D, que he a ſua baze, como AB, altura da ſua ſuperfice para o radio do circulo.

A ſuperfice deſſe circulo he igual ao triangulo rectangulo Z, cujo lado D he igual ao radio BC, e o lado E igual ao circuito do circulo (*liv.2. num.151.*) A ſuperfice do Còne X, he igual ao triangulo rectangulo



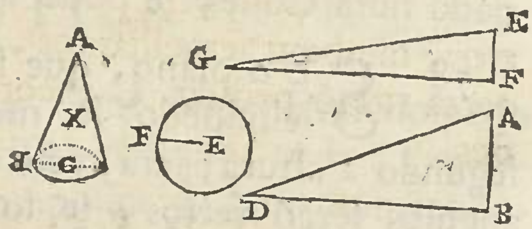
gulo Y, cujo lado F he igual a A B, e o lado G igual ao circuito da ſua baze (*num.* 73.) G, e E, ſendo iguaes, cada hum ao circuito do circulo, que he a baze do Cóne, ſeraõ iguaes entre ſi; e por tanto as ſuperfices deſſes dous triangulos rectangulos Y, e Z, que tem bazes iguaes, a ſaber, G, e E ſeráõ, como F para D; mas A B = F, e B C = D: logo X, ſuperfice do Cóne, he para a ſuperfice do circulo da ſua baze, como A B, altura da ſua ſuperfice, para B C, radio do circulo da ſua baze; e he o que ſe queria demonſtrar.

Eſta propoſiçaõ he de Archimedes.

THEOREMA VI.

76 **A** Superfice de hum circulo, cujo radio he meyo proporcional entre a altura do Cóne, e o radio da ſua baze, he igual à ſuperfice do Cóne.

Seja X hum Cóne, e A B a altura da ſua ſuperfice, e B D o circuito da ſua baze; e aſſim a ſua ſuperfice he igual ao triangulo rectangulo A B D, a linha B C he o radio da baze do Cóne; ſuppoho, que E F he meyo proporcional entre A B, e B C, e que E F he o radio de hum circulo, do qual F G he o circuito; e aſſim a ſuperfice deſſe circulo ſerá igual ao triangulo rectangulo E F G; e por conſequencia ſó falta moſtrar, que A B D = E F G.



Pela hypotheſi, A B . E F :: E F . B C; e pois que as circunferencias dos circulos ſaõ entre ſi, como os ſeus diametros, ſerá E F . B C :: F G . B D, e aſſim A B . E F :: E F . B C :: F G . B D (*liv.* 3. *num.* 56.) logo A B . E F

::FG.BD; e por tanto AB×BD=EF×FG (*liv.* 2. *num.* 130.) mas ABD he metade de AB×BD; como tambem EFG he metade de EF×FG: eſſes triangulos ſaõ iguaes; e he o que ſe queria moſtrar. He de Archimedes.

CAPITULO IV.

Da ſolidez dos Corpos.

PROPOSIC,OENS EVIDENTES.

PROPOSIC,AM I.

77 PODemos perceber, que todo o paralèllipipedo he gerado pelo movimento do ſeu plano, ou da ſua baze, movendo-ſe paraléllamente a ſi meſma.

PROPOSIC,AM II.

78 SE o plano, que ſe move para gerar o paralèlipipedo ſe mover perpendicularmente, ſegundo a altura, ſerá recto o paralélipipedo, e os ſeus angulos ſeràõ rectos; ſe for ſegundo huma linha obliqua, ſerà obliquo, e os ſeus angulos naõ ſeràõ rectos.

PROPOSIC,AM III.

79 TAmbem podemos perceber, que hum paralèlipipedo he compoſto de hum numero indefinito de planos, todos paralélos, e todos iguaes ao plano, que lhe ſerve de baze; e o meſmo ſe póde aplicar aos Cylindros, e aos Priſmas.

PRO-

PROPOSIC,AM IV.

80 HUma Piramide póde ſer feita pelo movimento da ſua baze ſempre paralèla a ſi meſma, diminuindo à proporçaõ, que ſóbe.

Se eſſe movimento ſe faz, ſegundo a perpendicular da ſua altura, a Piramide ſerà recta; e ſe for obliquamente, ſerá obliqua.

PROPOSIC,AM V.

81 TAmbem podemos perceber, que huma Piramide he compoſta de huma infinidade de planos paralélos, que vaõ diminuindo à proporçaõ, que ſóbem.

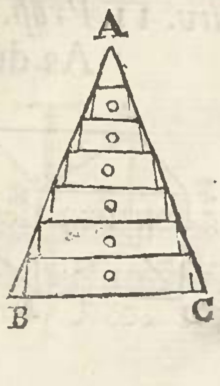
PROPOSIC,AM VI.

82 DOus ſolidos da meſma altura contém hum igual numero de planos.

PROPOSIC,AM VII.

83 SE ſuppozermos, que hum paralélipipedo obliquo, ou Priſma obliquo, toda a Piramide, e todo o Cóne ſaõ compoſtos de hum numero indefinito de planos, e as ſuas ſuperfices ſeràõ unidas.

Conſidére-ſe a Piramide B A C; ſe os planos O,O,O,O,O,O, que a compoem, ſaõ iguaes, he evidente, que a ſuperfice naõ ſerà unida, mas por degráos tanto mayores, quanto os planos O, ſeràõ mais groſſos; e o ſeràõ tanto menos, quanto for mayor o numero. Se ſupozermos pois eſſe numero indefinito, naõ teriaõ groſſura alguma,



guma, e BAC naõ teria degràos; o que ſe deve perceber da meſma ſórte de todo o paralélipipedo, de todo o Priſma, de toda a Piramide, e de todo o Cône.

PROPOSIÇAM VIII.

84 Podemos perceber hum paralélipipedo ſobre huma linha dada, que ſeja ſemelhante, e ſemelhantemente poſto a outro paralèlipipedo dado. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 27.

Euclides propoem eſte problema, que he taõ facil de perceber, que naõ neceſſita de demonſtraçaõ.

PROPOSIÇAM IX.

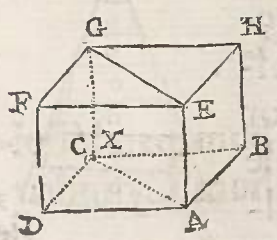
85 Dous ſolidos ſaõ iguaes, quando ſaõ compoſtos de hum igual numero de planos iguaes, e ſemelhantes.

Se, por exemplo, dous ſolidos X, e Z foſſem compoſtos, cada hum de hum milhaõ de planos, igualmente poſtos, e iguaes, he evidente, que ſeriaõ iguaes eſſes dous ſolidos.

PROPOSIÇAM X.

86 Se o paralèlipipedo X ſe cortar por hum plano ſegundo a diagonal AC, ou EG, ficarà cortado em dous Priſmas triangulares iguaes. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 28.

As duas partes de X tem bazes iguaes, e a meſma altura: logo ſaõ iguaes (definiçaõ dos Priſmas, numero 39.) e ſaõ Priſmas triangulares.



PROPO-

PROPOSIÇAM XI.

87 SE os lados dos planos oppoſtos de hum paralélipipedo forem cortados em dous igualmente, e que ſe lancem planos pelas ſecçoens, a linha da commua ſecçaõ, e o diametro do paralélipipedo ſe cortaráõ tambem em dous igualmente. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 39.

Iſto he evidente; porque o diametro he a baze de hum triangulo cortado paralélamente a hum de ſeus lados pelo meyo de outro; e aſſim ſe divide igualmente o lado, e a baze.

PROPOSIÇAM XII.

88 SE hum ſolido for comprehendido entre planos paralélos, os planos, que forem oppoſtos ſeraõ paralélosgramos ſemelhantes, e iguaes. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 24.

Em primeiro lugar, as linhas AD, e BC (*fig. idem*) ſeraõ paralélas (*num.* 33.) como tambem AB, e DC, e o meſmo das mais linhas EF, e HG, e de FG, e EH; e aſſim os planos ABCD, e EFGH ſaõ paralélosgramos.

Em ſegundo lugar, eſſes paralélosgramos ſaõ ſemelhantes; porque o angulo EFG he igual a ADC (*num.* 35.) e aſſim dos outros lados.

Em terceiro lugar, AB, e HE ſaõ paralélas entre AE, e BH, que ſaõ iguaes, ou ſejaõ obliquas, ou perpendiculares, (*liv.* 2. *num.* 107.)

THEOREMA I.

89 TOda a ſecçaõ, que ſe faz de hum paralélipipedo, de hum Priſma, de hum Cylindro,

de huma Piramide, e de hum Cóne, paralélamente á ſua baze, he ſemelhante á meſma baze. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 25.

Em primeiro lugar, eſte theorema he evidente, no que reſpeita ao paralélipipedo, ao Priſma, e ao Cylindro, cujas ſecçoens ſe fazem pelo movimento, ſempre paralélo ás ſuas bazes.

Em ſegundo lugar, tambem na Piramide, e no Cóne, que ſaõ ſolidos feitos pelo movimento das ſuas bazes diminuindo proporcionalmente; e aſſim todos os planos paralélos ſaõ ſemelhantes, e ſemelhantes ás bazes; o que ſe queria moſtrar.

THEOREMA II.

90 TOdos os ſolidos do meſmo nome, que tem bazes iguaes, e igual altura, ſaõ iguaes, ou ſejaõ rectos, ou obliquos. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 29. 30, *e* 31.

Todos eſſes ſolidos do meſmo nome, por exemplo, paralélipipedos, tendo iguaes bazes, e igual altura tem hum igual numero de planos: logo ſaõ iguaes (*numer.* 82.)

O meſmo ſe deve entender dos Priſmas, dos Cylindros, das Piramides, e dos Cónes; porque cada plano de hum he ſemelhante ao plano do outro, e tem a meſma altura, e igual numero de planos, &c.

COROLARIO.

91 PAra medir os ſolidos, baſta conſiderarlhe a ſua altura, e a ſua baze.

Hum paralèlipipedo, por exemplo, obliquo tem mayor ſuperfice, que hum recto, porém, nem por iſſo he mayor, pois aſſenta ſobre huma meſma baze, e tem a meſma altura.

THEO-

THEOREMA III.

92 OS solidos, praralèlipipedos, e Prismas, que tem a mesma altura, tem entre si a mesma razaõ, que as suas bazes; e se tem iguaes bazes, saõ entre si, como as suas alturas. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 32.

Sejaõ dous solidos Z, e X. Em primeiro lugar, elles tem igual numero de planos paralélos (*num.* 82.) e semelhantes as suas bazes. Se as bazes saõ iguaes, elles saõ iguaes; mas, se a baze de Z he dupla da baze de X, todos os planos de Z seraõ duplos dos planos de X, e será Z o dobro de X.

Se estes dous solidos tem as bazes iguaes, seraõ como as suas alturas; porque todos os seus planos saõ iguaes; e se Z tiver dobrada altura de X, terá dobrado numero de planos, &c.

THEOREMA IV.

93 DOus Cylindros da mesma altura seraõ entre si, como as suas bazes, e se tiverem iguaes bazes, seraõ como as suas alturas. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 11. *e* 14.

Este theorema fica demonstrado a respeito do Prisma, e Paralèlipipedo, e o mesmo he do Cylindro.

THEOREMA V.

94 SE hum Cylindro for cortado, por hum plano paralélo aos planos oppostos das suas bazes, os segmentos do Cylindro teraõ entre si a mesma razaõ, que os segmentos do seu eixo. *Eucl. livro* 12. *Prop.* 13.

Primeiramente, os planos dessas secçoens seraõ iguaes (*num.* 79.) logo todos os segmentos seraõ outros

tantos

tantos Cylindros, que tem as bazes iguaes; e por tanto seraõ entre si, como os segmentos do eixo, que seraõ as suas alturas, pelo precedente theorema.

THEOREMA VI.

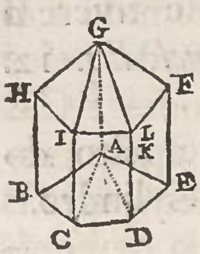
95 HUm paralélipipedo he duplo de hum Prisma triangular da mesma altura, se a baze do paralélipipedo he dupla da do triangular. *Eucl. liv.* 11. *Prop.* 40.

Este theorema tambem he evidente, pois que os dous Prismas tem a mesma razaõ, que as suas bazes. (*numero* 92.)

THEOREMA VII.

96 TOdo o Prisma poligono se póde dividir em Prismas triangulures.

Seja X hum Prisma poligono, cujas bazes saõ A BCDE, e GHILF: essas bazes poligonas se reduzem em triangulos; e pela definiçaõ dos Prismas triangulares, os solidos ABCGHI, ACDGIL, ADEGLE, saõ Prismas triangulares: logo o Prisma X póde ser dividido, como se propoz.



THEOREMA VIII.

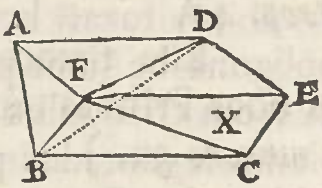
97 HUm Prisma he igual a muitos Prismas da mesma altura, se a sua baze for igual a todas as bazes desses Prismas; e o mesmo será das Piramides.

Porque, considerando nesses solidos os planos paralélos ás bazes (*n.*78.) haverá em cada hum, hum numero igual de planos (*num.* 82.) e cada plano do grande de ſerá igual a todos os planos dos outros Priſmas.

THEOREMA IX.

98 HUm Priſma triangular ſe divide em tres Priſmas triangulares, e iguaes. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 7.

Seja X hum Priſma triangular: lançe-ſe, por cada huma das ſuas tres faces, diagonaes, que formaráõ ſeis triangulos. Os triangulos B A D, e B C D ſaõ iguaes (*liv.* 2. *num.* 125.) as piramides B A D F, e B D C F, que tem o meſmo vertice, e a meſma altura, ſaõ tambem iguaes (*num.* 106.)



Separando, pelo penſamento, deſſe Priſma X eſſas duas piramides, reſta a terceira F C E D, a qual tem primeiramente o meſmo vertice D, e a meſma altura, que a piramide F B C D; ellas tem bazes iguaes, a ſaber, os triangulos iguaes F B C, e F C E (*liv.* 2. *num.* 125.) logo ſaõ iguaes (*num.* 106.) mas a piramide F B C D he a meſma, que B D C F, ſendo formada pelos meſmos triangulos: logo ſaõ iguaes as piramides F C E D, e B A D F, ſendo iguaes a huma terceira; e por tanto fica o Priſma X dividido em tres piramides iguaes B A D F, B D C F, e C E D F; o que ſe queria demonſtrar.

COROLARIO I.

99 SEgue-ſe, que toda a piramide he o terço do Priſma da meſma altura ſobre huma meſma baze, ou baze igual.

COROLARIO II.

100 SEgue-ſe, que para medir huma Piramide, baſta multiplicar a ſua baze, pelo terço da ſua altura.

LEMMA.

101 HUma Piramide poligona ſe póde dividir em Piramides triangulares.

A razaõ he; porque a baze de huma Piramide poligona he hum poligono, que por conſequencia ſe reduz em triangulos, ſobre os quaes podemos perceber planos levantados pelo comprimento dos lados da Piramide até o ſeu vertice; e por eſte modo haverá muitas Piramides triangulares, que ſeraõ as partes da piramide poligona.

THEOREMA X.

102 AS Piramides, que tem triangulos por bazes, e que ſaõ da meſma altura, ſaõ entre ſi, como as ſuas bazes. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 5. *e* 6.

Os Priſmas ſaõ triplos das Piramides da meſma baze, e da meſma altura (*num.* 99.) mas os Priſmas da meſma altura ſaõ entre ſi, como as ſuas bazes, ou os das meſmas bazes, como os de iguaes alturas (*num.* 92.) logo aſſim as piramides, que naõ ſaõ mais, que o terço, tem entre ſi a meſma razaõ; pelo lemma precedente, ſe póde entender o meſmo das Piramides poligonas, e das triangulares, pois que ellas ſe reſolvem.

THEOREMA XI.

103 TOda a Piramide de baze triangular ſe póde dividir em duas piramides iguaes ſemelhantes entre ſi, e á total, e em dous Priſmas iguaes,

e ma-e mayores, que a metade da Piramide total. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 3. O que por si he claro.

THEOREMA XII.

104 TOda a Piramide poligona he o terço de qualquer Prisma da mesma altura, e da mesma baze, ou de baze igual.

Reduzindo em triangulos huma, e outra baze desses dous solidos, a piramide poligona será dividida em piramides triangulares; mas cada huma dessas piramides triangulares he o terço de cada hum desses prismas triangulares (*num.* 99.) logo toda a piramide poligona he o terço de todo o Prisma poligono.

THEOREMA XIII.

105 HUm Cóne he hum terço de hum Cylindro da mesma altura, tendo bazes iguaes. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 10.

Hum Cóne he huma piramide de hum numero indefinito de lados; mas huma piramide he o terço de hum Prisma da mesma altura, e que tem igual baze (*num.* 99.) logo he tambem o terço de huma piramide, pois que tambem hum Cylindro he hum Prisma de hum numero indefinito de lados.

COROLARIO I.

106 HUm Cóne he igual a todos os Cónes da mesma altura, dos quaes as bazes em soma saõ iguaes á sua.

Os Cónes saõ piramides de hum numero indefinito de lados, os quaes saõ o terço do Cylindro, ou do Prisma; e assim esta proposiçaõ he a mesma, sem diferença

rença, que ſe propoz (*numero* 104.)

COROLARIO II.

107 DOus Cónes da meſma altura ſaõ entre ſi, como as ſuas bazes; e ſe tiverem a meſma baze, teraõ a razaõ das ſuas alturas. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 11. *e* 14. O que he evidente.

THEOREMA XIV.

108 OS Priſmas, e os paralélipipedos ſemelhantes, ſaõ em razaõ compoſta das razoens das ſuas tres dimenſoens, e eſta razaõ he triplicada. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 33.

A ſua ſolidez depende da multiplicaçaõ das ſuas dimenſoens (*numero* 107.) a razaõ, que elles tem entre ſi, he compoſta das tres dimenſoens (*liv.* 3. *num.* 71.) e ſendo ſemelhantes, ſerá eſta razaõ triplicada (*liv.* 3. *num.* 67.) e he o que ſe queria moſtrar.

THEOREMA XV.

109 OS Cylindros ſemelhantes, tem entre ſi a razaõ triplicada compoſta das ſuas dimenſoens. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 12.

Os Cylindros, ſendo Priſmas de hum indefinito numero de lados, que aſſim ſe conſidéraõ os circulos, ſaõ entre ſi, como os Priſmas, pelos precedentes theoremas.

THEOREMA XVI.

110 AS Piramides ſemelhantes tem a razaõ triplicada compoſta das ſuas tres dimenſoens. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 8.

Eſte

Eſte theorema he evidente, pois que as Piramides ſaõ o terço dos Priſmas, que tem iguaes bazes, e igual altura : logo tem a meſma razaõ.

THEOREMA XVII.

111 OS Cónes ſemelhantes ſaõ entre ſi, em razaõ triplicada das ſuas tres dimençoens. *Euclid. liv.* 12. *Prop.* 12.

Como os Cónes ſaõ piramides: ſegue-ſe o meſmo, que fica moſtrado nos theoremas precedentes.

THEOREMA XVIII.

112 OS Cylindros ſemelhantes ſaõ entre ſi, como os cubos dos diametros das ſuas bazes.

Como os Cylindros ſaõ entre ſi em razaõ triplicada de cada huma das ſuas tres dimençoens, teraõ a meſma razaõ os diametros das ſuas bazes; mas os cubos dos ſeus diametros eſtaõ em razaõ triplicada dos meſmos diametros (*liv.* 3. *num.* 75.) logo, pois que as razoens compoſtas de iguaes razoens ſaõ iguaes, os Cylindros ſemelhantes, ſeraõ entre ſi, como os cubos dos diametros das ſuas bazes; e o meſmo he dos Cónes ſemelhantes, e ſe demoſtra da meſma ſorte.

THEOREMA XIX.

113 OS paralélipipedos iguaes tem as ſuas bazes, e alturas em razaõ reciproca; e ſe ellas ſaõ reciprocas, eſſes ſolidos ſaõ iguaes. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 34.

Sejaõ X, e Z dous paralélipipedos iguaes, A ſeja a altura de X, e B ſeja a altura de Z, M o valor da baze de X, e N o valor da baze de Z; ſegundo eſta hypotheſi $A \times M = B \times N$: logo $A.B :: N.M$ (*liv.* 3. *num.* 58.) por tanto eſſas quatro grandezas A, M, B, N ſaõ reciprocas (*liv.* 3. *numero* 61.) mas eſſas quatro grandezas reciprocas podem ſer diſpoſtas, de ſorte, que, $A.B :: N.M$: logo $A \times M = B \times N$ (*liv.* 3. *num.* 56.)

THEOREMA XX.

114 DOus Cylindros, ſendo iguaes, as ſuas alturas, e as ſuas bazes ſaõ reciprocas; e ſe ellas ſaõ reciprocas, os dous Cylindros ſeraõ iguaes. *Euclid. liv.* 12. *Prop.* 9. *e* 15.

A demonſtraçaõ deſte theorema he a meſma, que a do theorema precedente chamando a hum delles X, e ao outro Z; porque he o meſmo, que das piramides, e dos Cónes.

THEOREMA XXI.

115 SE, A, B, C, tres linhas rectas, forem proporcionaes, o ſolido paralélipipedo ABC, feito deſſas tres linhas, he igual ao paralélipipedo BBB, feito da meya proporcional B, ſendo eſſes ſolidos equiangulos. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 36.

$\div A.B.C$: logo $AC = BB$ (*liv.* 3. *num.* 37.) logo multiplicando AC, e BB por B, o producto ACB ſerá ainda igual ao producto BBB, ou B^3 (*liv.* 3. *num.* 54.) mas ACB he o paralélipipedo feito das tres linhas A, B, C; e aſſim B^3 feito da meya proporcional B.

THEOREMA XXII.

116 SE, A, B, C, D ſaõ quatro linhas proporcionaes, os ſolidos ſemelhantes feitos

tos ſobre eſtas linhas, eſtaõ em proporçaõ; e ſe eſſes ſolidos eſtaõ em proporçaõ, tambem ſeraõ proporcionaes as quatro linhas. *Euclid. liv.* 11. *Prop.* 37.

Eſte theorema fica demonſtrado (*liv.* 3. *num.* 85.) e naõ neceſſita de mais prova.

THEOREMA XXIII.

117 HUma Esfera he igual a hum Cóne, ou Piramide poligono, que tiver por eixo o radio da esfera, e por baze hum circulo, cujo radio ſeja o diametro da meſma esfera.

Em primeiro lugar, percebendo huma infinidade de Cónes, ou Piramides poligonas, cujos vertices ſe terminem no centro de huma esfera, e as bazes na ſuperfice da meſmas esferas, he evidente, que podemos dizer, que a ſolidez deſta esfera he igual a todos os Cónes, ou Piramides poligonas, pois que as partes juntas ſaõ iguaes ao ſeu todo.

Em ſegundo lugar, todos eſſes Cónes ſaõ iguaes a hum Cóne, que tem a meſma altura, a ſaber, o radio da esfera, e por baze toda a ſuperfice da esfera, a qual he igual ás bazes de todos eſſes Cónes (*num.* 98.)

Em terceiro lugar, a ſuperfice deſſa esfera he igual á ſuperfice de hum circulo, cujo radio for o diametro da esfera : logo, &c.

Suppoſta a razaõ do diametro de hum criculo para a ſua circunferencia, como 7 para 22, ou mais ao juſto, como 100. para 314. pela primeira, podemos dizer, que a ſolidez da esfera he para o cubo do ſeu diametro, como 11. para 21.

Seja M a circunferencia do circulo, e N o ſeu diametro; ſerá MNN.NNN :: M.N(*liv.* 3. *num.* 54.) mas M.N :: 22.7, ou 66 para 21; e aſſim a ſexta parte de MNM, que he a ſolidez da esfera, como ſe conclue

clue ſacilmente do que fica demonſtrado, he para N N N, cubo do ſeu diametro, como a ſexta parte de 66, a ſaber, 11 para 21; e he o que ſe queria moſtrar.

THEOREMA XXIV.

118 AS esferas ſaõ entre ſi, como os cubos dos ſeus diametros, ou em razaõ triplicada, da que tem os ſeus diametros. *Eucl. liv.* 12. *Prop.* 18.

As esferas eſtaõ em razaõ compoſta da razaõ das ſuas tres dimençoens, e todas as esferas ſaõ ſemelhantes; e aſſim as ſuas tres dimençoens teraõ huma meſma razaõ: logo a razaõ, que ellas compoem, he triplicada de cada huma das razoens das ſuas dimençoens, por exemplo, dos ſeus diametros; mas os cubos deſſes diametros eſtaõ em razaõ triplicada da razaõ dos outros diametros: logo as esferas ſaõ entre ſi, como os cubos dos ſeus diametros.

APPENDIX

APPENDIX.

DAS SECÇOENS CONICAS.

NA segunda parte desta obra só tratamos da linha recta, e do circulo; porém devemos saber, que além disso ha outras linhas, de que usaõ os Geometras, pelas quaes se resolvem varios problemas, que só pelos Elementos de Euclides, senaõ podem resolver: entre estas linhas saõ mais principaes a *Parabole*, a *Hyperbole*, e a *Elipse*; e procedem estas linhas da secçaõ do Cóne; e como estas linhas fazem hoje o principal objecto dos Geometras modernos, daremos dellas aqui huma recopilada noticia.

CAPITULO I.

Da idéa das linhas curvas.

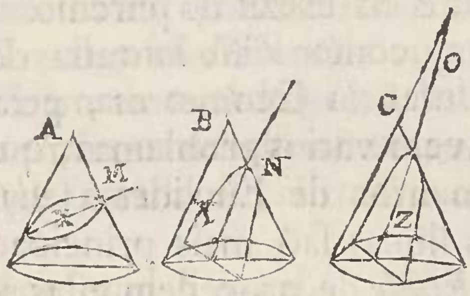
AS linhas curvas saõ aquellas, que naõ sendo circulos nos representaõ as diferentes secçoens de hũ Cóne; neste Capitulo, e nos seguintes daremos os seus nomes, e o methodo mais facil, para conhecer as suas principaes propriedades, que saõ singulares, e maravilhosas; e falaremos sómente das mais principaes, e conhecidas, de que tratáraõ os antigos Geometras, e primeiramente da ſua geraçaõ.

Se ſuppozermos hum Cóne ſolido, o qual ſe córte por hum plano, que paſſe pelo ſeu eixo, he evidente, que a ſecçaõ, ſerá hum triangulo, cujos lados ſaõ os lados do meſmo Cóne, e a baze he o diametro do circulo, que ſerve de baze ao dito Cóne.

Devemos ſuppôr daqui por diante, que o plano, que de qualquer ſorte cortar o Cóne, he perpendicular ao ſobredito triangulo.

Se o plano ſecante for paralélo á baze do Cóne, he evidente, que a ſecçaõ ſerá hum circulo.

Se o plano ſecante naõ for paralélo á baze, e encontrar o eixo do Cóne, e os ſeus dous lados, o contorno deſta ſecçaõ he huma linha curva, que ordinariamente chamaõ *Elipſe*, ou *Ovado Mathematico*, que ſe repreſenta na figura X, formada no Cóne A por hum plano ſecante M.



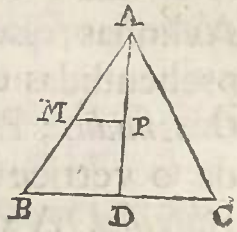
Se o plano ſecante naõ cortar mais que hum dos lados do triangulo, e que a ſecçaõ ſeja paraléla a outro lado, gerará huma curva, chamada *Parabole*, como Y, formada no Cóne B pelo plano, que o córta, ſegundo a linha N paraléla ao lado.

Se o plano ſecante naõ cortar mais, que hum ſó lado, de ſórte, que eſſe plano produzido poſſa encontrar o outro lado do Cóne, ou triangulo produzido por cima do vertice, eſta ſecçaõ, ou o ſeu contorno ſe chama *Hyperbole*, como moſtra a figura Z formada no Cóne C, por hum plano ſecante, ſegundo a linha O.

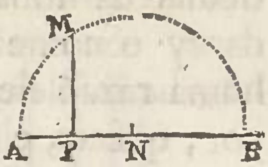
Como nos devemos ſervir de certos termos, falando deſtas ſecçoens conicas, devemos primeiramente explicallos.

 Seja

Seja o triangulo BAC a secçaõ de hum Cóne pelo seu eixo, e seja $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$, $BD = b$; em toda a parte acharemos $x . y :: a . b$: logo $ay = bx$, que he huma igualaçaõ, que expressa a natureza do triangulo formado pelos lados do Cóne, e pelo diametro da sua baze.



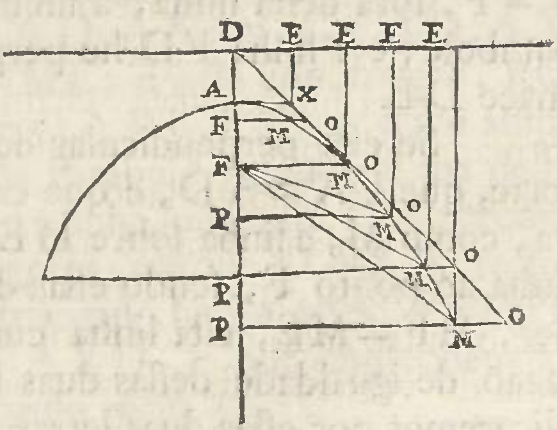
Se AMB, hum semicirculo, de que N he o centro, e $AN + NB$, ou AB he o seu diametro.



E seja $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$; e assim será $PB = a - x$; e por tanto $\div x . y . a - x$, e $ax - xx = yy$; e he a igualaçaõ, que exprime a natureza do circulo.

Huma perpendicular, como PM lançada de qualquer ponto M da circunferencia sobre o diametro AB se chama *ordenada*, e a parte do diametro entre o seu extremo, e o encontro da ordenada, se chama *Abscissa.*

Seja DEE hũa linha recta dada, e F hum ponto fóra della; a esta linha DEE chamaõ *Directrice.* Seja mais AMM huma curva tal, que toda a linha perpendicular sobre DE, cahindo sobre M, hum dos pontos da curva, tenha sempre huma mesma razaõ com hũa segunda linha lançada do ponto M ao ponto dado F. Esta linha curva he regular, e se póde descrever; porque se podem achar todos os pontos, pelos quaes ellas devem passar : os nomes que se daõ ás suas partes, saõ os seguintes.



O

O ponto A he *o vertice* desta curva; o ponto F se chama *Focus.* A linha AF produzida he o seu *Eixo.* As linhas, que cortaõ perpendicularmente o eixo, e comprehendidas entre o mesmo eixo, e a curva se chamaõ *Ordenadas*; PM he huma *Ordenada*; a parte do eixo desde o vertice A até o encontro da ordenada se chama *Abscissa.* A diferença essencial das tres secçoens conicas, Parabole, Elipse, e Hyperbole nasce da razaõ particular da linha AD para a linha AF; e a essa razaõ darey o nome de p. para q. Na Parabole sempre há huma razaõ de igualdade. Na Elipse p, he sempre mayor, que q, e na Hyperbole p, he menor que q.

CAPITULO II.

Da Parabole, que representa a secçaõ de hum Cóne recto, por hum plano paralélo a hum de seus lados.

DEFINIÇAM I.

A Linha recta DE he dada, e dado tambem o ponto F, fóra desta linha, a mesma DE he directrice da parabole; e a linha FD he perpendicular sobre a directrice DE.

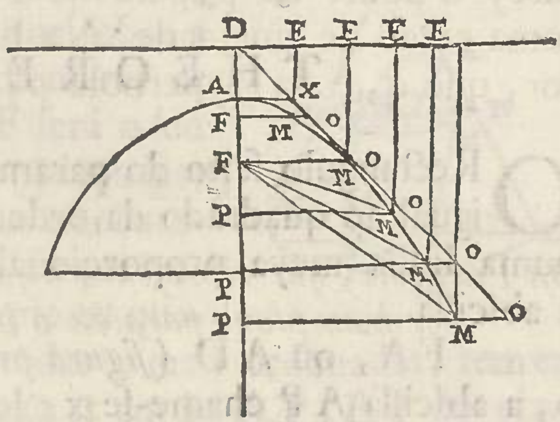
Se esta perpendicular se cortar no ponto A, de sorte, que FA = AD, e que cada ponto da linha curva, como M, a linha sobre DE perpendicular, e outra linha ao ponto F, sendo essas duas linhas iguaes, a saber, MF = ME, esta linha curva he a parabole, e a razaõ de igualdade dessas duas linhas he ME. MF explicaremos por estas duas letras, p, e q.

PRO-

PROBLEMA I.

Achar cada hum dos pontos da Parabole.

SEja D E a directrice dada, F o Focus; e assim deve-se cortar D F em duas partes iguaes, e será A o vertice da curva. Para achar os outros pontos, he necessario, em primeiro lugar, lançar pelo ponto A huma paraléla a D E, na qual se tomará A X = F A, e pelo ponto D, e X se tirará huma linha indefinita. Em segundo lugar, lançando quantas paralélas quizerem a D E, que cortem o eixo D F produzido, facilmente se acharáõ os pontos dessas paralélas, pelos quaes passa a curva Parabole, por exemplo,



o ponto M na linha P O. Do intervallo P O, e do Focus F, como centro, se faça hum circulo, que cortará P O em M, e desta sórte, A D . A X : : p . q, e A D . A X : : D P . P O; mas D P = M E; e pela construcçaõ, P O = F M : logo (*liv.* 3. *num.* 53.) M E . F M : : p . q; e assim M he hum dos pontos da Parabole segundo a sua definiçaõ: deve-se notar, que a linha indefinita D X faz com D F hum angulo de 45. gráos; porque D A X he recto, e A D = A X : logo o triangulo he isosceles; e assim o angulo A D X he igual A X D, e por consequencia, cada hum metade do angulo recto.

DEFINIÇAM II.

O *Parametro* de huma Parabole he ſempre huma linha dupla de F D, ou quadrupla de F A, ou de D A.

Seja eſſe Parametro, a; a ordenada P M ſeja y, e a abſciſſa P A ſeja x; e ſe lhe dem quaeſquer outros nomes, baſta, que ſempre falando-ſe do Parametro, entendamos, que he huma linha dupla, ou quadrupla, como diz a definiçaõ.

THEOREMA I.

O Rectangulo feito do parametro, e da abſciſſa, he igual ao quadrado da ordenada, ou a ordenada he huma linha meya proporcional entre o parametro, e a abſciſſa.

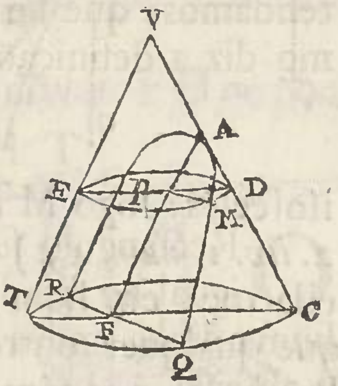
F A, ou A D (*figura precedente*) ſeja chamada b, a abſciſſa A P chame-ſe x: logo P D, ou $ME = b + x$, e $FP = x - b$, ou tambem $b - x$, ſegundo que o ponto P ſeja por cima, ou por baixo do focus F. O Parametro a he quadruplo de A D, ou de A F; e por tanto quadruplo de b; e aſſim, $a = 4b$.

Devemos moſtrar, que $\div a . y . x$, (ou que vem a ſer o meſmo) $ax = yy$ (*Parte* 2. *liv.* 3. *num.* 57.) ſegundo a primeira definiçaõ, $MF = EM$; mas $EM = PA + AD = b + x$: logo $\overline{MF^2} = bb + 2bx + xx$; e pois que $FP = b - x$: logo $\overline{FP^2} = bb - 2bx + xx$; mas $\overline{FM^2} - \overline{EP^2} = \overline{MP^2} = yy$ (*Parte* 2. *liv.* 4. *num.* 57.) logo $bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx = yy$; mas $+ bb - bb = 0$, e $+ xx - xx = 0$: reſta logo $2bx + 2bx$, ou $4bx = yy$; mas $4b$ he o valor do Parametro a: logo $ax = yy$, ou $a . y :: y . x$; e he o que ſe queria demonſtrar.

THEOREMA II.

A Secçaõ conica, que acabamos de eſcrever, e definir, he a linha curva chamada Parabole.

Seja CVT, hum Cóne recto cortado por hum plano, ſegundo a linha AF, paralélo ao lado TV: devemos provar, que a ſecçaõ QAR, he huma Parabole, e tem as propriedades da linha curva, que deixamos definida



Seja qual for a linha curva QAR, ſe percebermos, que ſobre a linha AF ſaõ perpendiculares as linhas PM, e QF, AF ſerá o ſeu eixo; PM, e FQ ſaõ as ordenadas; e aſſim para moſtrar, que eſta Parabole QAR he a curva, de que tratamos, baſta moſtrar, que os quadrados $\overline{MP}^2$ e $\overline{QF}^2$, e todas as mais ordenadas, tem entre ſi a meſma razaõ, que as partes AP, AF do eixo, que ellas cortaõ.

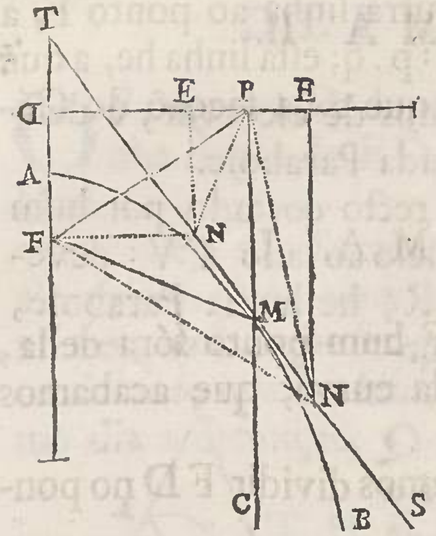
Imaginemos, que o Cóne recto CTV he cortado no ponto M, por hum plano paralélo á ſua baze; eſta ſecçaõ PME ſerá pois hum circulo; ſeja CQT outro circulo paralélo a DME; a linha MP, he a ordenada da Parabole QAR, e do circulo DME, ſendo perpendicular, tanto ſobre ED, como ſobre AF, por ſer a commua ſecçaõ do plano, e do circulo, e do da Parabole, que pela conſtrucçaõ corta o do triangulo a angulos rectos (*Parte* 2. *liv.* 5. *num.* 19. *e* 29.)

THEOREMA III.

D Ada huma Parabole, lançar huma tangente a qualquer dos ſeus pontos.

Seja AM huma meya Parabole, pede-ſe, que do

ponto



ponto M ſe lance a tangente MT. Do focus F ſe lance ao ponto M a linha FM, e do ponto M a linha MP paraléla ao eixo, e terminada na directrice DP; ſe ſe lançar FP, e ſe dividir em duas partes iguaes, a linha MT lançada por eſſe ponto de diviſaõ, ſerá eſſa a tangente pedida; o que devemos moſtrar.

O triangulo PNF he iſoſceles: logo MT he perpendicular ſobre FP (*Parte* 2. *liv.* 1. *num.* 43.) huma linha ſe diz tangente, quando ella toca em hum ſó ponto, como aqui ſuccede; porque qualquer outro ponto da linha TS ſenaõ acha na Parabole, mas fóra della, como he evidente, ſegundo a definiçaõ da Parabole.

CAPITULO III.

Da Elipſe.

A Elipſe he a que repreſenta a ſecçaõ de hum Cóne por hum plano, que corta os ſeus dous lados, ſem ſer paralélo ao plano da ſua baze.

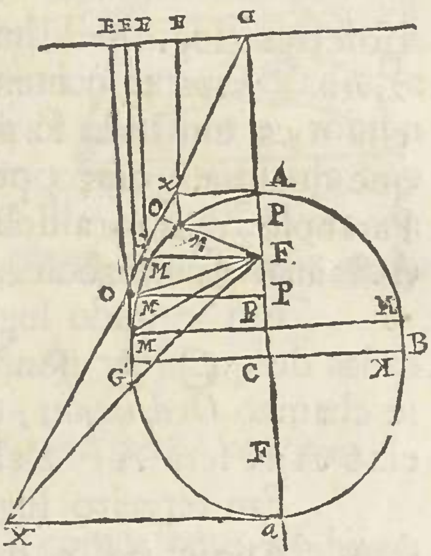
DEFINIÇAM.

SEja a linha DE a directrice dada da linha curva, que ſe quer definir, e F hum ponto dado fóra de DE; e FD he perpendicular ſobre DE; ſe eſta perpendicular for cortada no ponto A, ſegundo a razaõ de p.q: ſupponhamos, que p he mayor que q, e que de cada hum dos pontos da curva, como DM, lançando huma perpendicular ſobre DE, e outra linha ao ponto F, a linha EM ſeja ſempre para FM :: p . q; eſta linha he, a que chamaõ Elipſe, e he a meſma, que a da ſecçaõ do Cóne, a quem ſe dá eſſe nome.

PROBLEMA. I.

DAda a directrice DE, e F hum ponto fóra della, achar todos os pontos deſta curva, que acabamos de definir, chamada Elipſe.

Em primeiro lugar, devemos dividir FD no ponto A, de ſorte, que AD . FA :: p . q. Em ſegundo lugar, pelo ponto A ſe deve lançar huma paraléla á directrice DE, e tomar AX = AF; e aſſim ſerá AD . AX :: p . q. Em terceiro lugar, pelos pontos D, e X, ſe deve lançar huma linha indefinita, e logo cortando o eixo em tal numero de paralélas, que quizerem, ſerá facil de achar neſſa paraléla os pontos, por onde paſſa a curva D, e F,



como centro, com o intervallo PO, que córte PO em M, por cauſa dos triangulos ſemelhantes DAX, e DFO; a linha PD, ou ſua igual EM he para PO, ou FM :: AD . AX; e por tanto, EM . FM :: AD . AX :: p . q: logo o ponto M he hum dos da curva, que acabamos de definir.

PROBLEMA II.

Achar o eixo da Parabole.

PRoduza-ſe DX indefinitamente (*figura idem*) e de AD ao ponto F, ſe lance huma linha, que faça o angulo de 45 gráos, e esta linha se continue até encontrar, a indefinita D X. Do ponto X, onde se encontra, se lance a linha xa perpendicular sobre F A; e assim no triangulo rectangulo F A X, o angulo fxa he tambem de 45 gráos: logo o triangulo fax he isosceles; e assim A D . A X :: D a . a x (*Part.*2.*liv.*4.*num.*16.) e pois que fa x he isosceles, a x = F a: logo A D . A X :: D a . F a; mas A D . A x :: p . q: logo tambem D a . F a :: p . q; e assim a, he hum dos pontos da curva.

Declaraçaõ dos termos.

EM primeiro lugar, A a he o eixo grande da Elipse: o ponto C, que divide A a pelo meyo, he o centro: a linha B G, que corta a angulos rectos A a, he o eixo menor; e tomando fa = F A, os pontos F, e f saõ os, a que chamaõ fócus; porque se fosse hum espelho posto aos rayos do Sol, alli se uniriaõ os rayos convergentes, e em materia combustivel, acenderiaõ fogo.

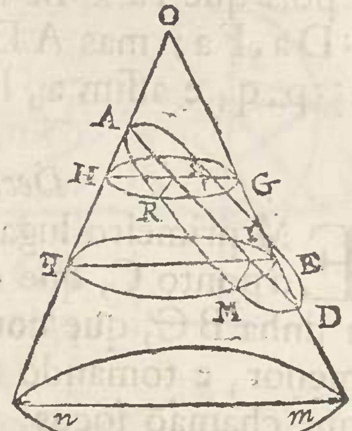
Em segundo lugar, as linhas perpendiculares lançadas de qualquer ponto da curva a hum dos seus eixos, se chamaõ *Ordenadas*; e assim P M, sendo ordenada ao eixo A a, será A P a abscissa.

Em terceiro lugar, a terceira proporcional aos dous eixos, se chama Parametro do primeiro proporcional; e basta saber, que assim se chama.

Saõ muitas as propriedades desta linha, como, por exemplo, que o intervallo dos dous focus F, e f, he para o eixo grande A a, como p . q; e que A C, metade do eixo A a he huma meya proporcional, entre F C, metade do intervallo dos focus, e a linha C D; e outras muitas propriedades, que naõ explicamos, e ficaõ para quando algum curioso se quizer aplicar ao conhecimento destas linhas, e de outras mais, de que aqui naõ tratamos, e só por hora mostraremos, que a secçaõ conica, chamada Elipse, he a curva, que até aqui temos descrita,

crita, como ſe póde ver na figura ſeguinte, que moſtra o Cóne, m o n, cortado por hum plano, que faça angulo obliquo com o ſeu eixo, e que córte os ſeus dous lados, a ſecçaõ D M A D, he huma Elipſe, de que temos moſtrado algumas propriedades.

Imaginem-ſe os dous circulos paralélos E M F, e G R H, cujos diametros cortaõ o diametro da da curva D M A D no ponto i, e q. Se dos pontos M, e R, onde os circulos cortaõ a curva, ſe lançarem linhas rectas aos pontos i, e q, he evidente, que eſtas linhas ſeraõ ordenadas, communas aos circulos, e á curva D M A D, por quanto R q he perpendicular, tanto ſobre H G, como ſobre A D (*Part.2.liv.5.n. 29. e num.* 20.) por ſer a commua ſecçaõ do plano, do circulo, e da Elipſe, &c.

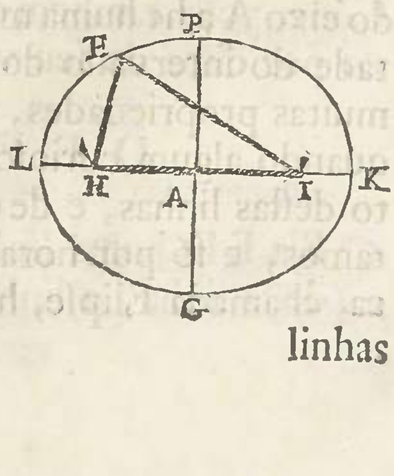


PROBLEMA III.

Deſcrever huma Elipſe por hum movimento continuo.

TOmem-ſe dous pontos H I, como focus de huma Elipſe, e a linha L K, como o ſeu grande eixo.

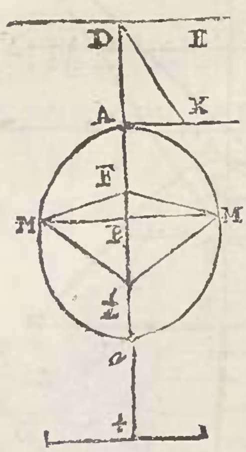
Para deſcrever a linha curva, ou Elipſe, ſe tomará hum cordel igual ao mayor eixo, ou diametro, e prezo pelas pontas aos dous pontos H, I com dous pregos, conduzindo com a maõ alguma ponta de páo, ou de ferro, e andando á roda dos pontos H, e I, o riſco, que a ponta for deſcrevendo, ſerá huma Elipſe, como moſtraremos. Pela conſtrucçaõ deſta curva, as duas



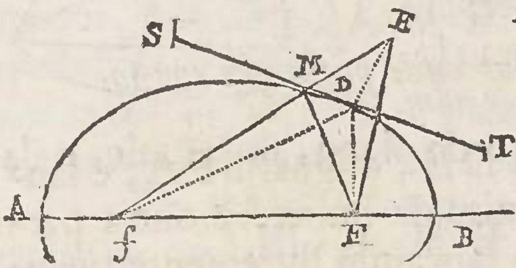
linhas

linhas H E, e E I juntas, ſaõ iguaes ao grande eixo K L; e aſſim ſó falta moſtrar, que a Elipſe deſcrita tem eſta propriedade.

Seja huma Elipſe Geometrica, e A a, o ſeu mayor diametro, F f os ſeus focus: devemos moſtrar, que F M + M f = A a; produza-ſe o diametro de huma, e outra parte, de ſorte, que A D . A F, ou A X : : p . q, e da meſma ſorte, a t . a f : : p . q, e da meſma ſorte, concluindo, a t = A D. Seja lançada pelo ponto t, huma paralé-la á linha D F. As razoens de F M para P D, ſaõ as meſmas, que as de f M . P t, e pela definiçaõ.



EM . PD)
fM . P t) : : q . p : : AX . AD.



Fica moſtrado, que F f . A a : : A X . A D : logo F f + 2 A X . A a + 2 A D : : A X . A D, &c.

CAPITULO IV.

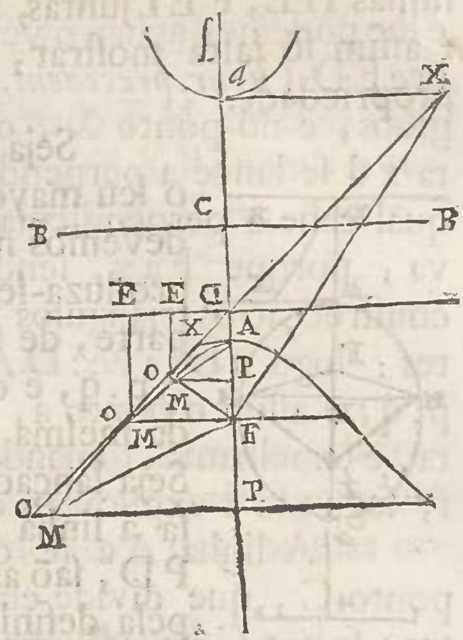
Da Hyperbole.

A Hyperbole he huma linha curva, que repreſenta a ſecçaõ de hum Cóne paralélo ao ſeu eixo, ou de ſorte, que cortando hum ſó lado do dito Cóne, poſſa tambem cortar o outro lado, ſendo produzido por cima do ſeu vertice.

DEFINIC, AM.

SEja E D huma linha recta directriz, e F hum ponto deſta linha, a linha E D he perpendicular ſobre D F.

F. Se se dividir FD no ponto A segundo a razaõ de p.q (suppomos) que p he aqui menor que q; se se traçar huma curva, da qual se lancem perpendiculares a DE, e FM, como a linha EM, taes, que essas linhas, que EM seja para MF :: q.p, esta linha se chama Hyperbole; porque tem as mesmas propriedades, que a secçaõ conica, a que daõ esse nome.



PROBLEMA I.

Achar todos os pontos, por onde passa esta curva.

LAnce-se AX paraléla a DE, e igual a FA, e lance-se huma linha indefinita de huma, e outra parte, pelos pontos D, e X, e lançando livremente quantas paralélas quizerem a DE, como, por exemplo, PO, se acharáõ os pontos desta curva; e para mostrar, que passa pelo extremo de PO, por onde passa a curva F, como cẽtro cõ o intervallo PO, se descreva hum circulo, e o põto M, onde esse circulo PO he cortado, he o ponto, que se buscava; porque os triangulos DAX, e DPO, sendo semelhantes, será PO.PD :: AX.AD :: Q.p; mas, pela construcçaõ PO = FM: e PD = EM: logo FM. EM :: q.p: logo o ponto M he hum dos da Hyperbole.

PROBLEMA II.

Achar o vertice da Hyperbole, que lhe seja opposto.

COnsiderando as propriedades da Hyperbole a podemos comparar com outra opposta, e semelhante;

e lhe podemos achar o vertice, pela pratica ſeguinte: ſobre F D (*figur. precedent.*) ſe faça o angulo D F X de 45. gràos, e do ponto X, onde f x corta a linha indefinita x d ſe lance a perpendicular F f, o ponto a, ſobre o qual cahe a perpendicular ſerá hum dos pontos da curva; porque F a x, ſendo iſoſceles a x = a ſ, e pela conſtrucçaõ os triangulos x D a, e A D X ſaõ ſemelhantes: logo a D . a F : : D A . A F : : p . q: logo a D . a F : : p . q; e aſſim o ponto a, ſerà hum dos da curva oppoſta, e ſemelhante, tomando f a = F A, para ter os Fócus f, ſegundo a explicaçaõ dos termos, que ſe ſegue.

A linha A a ſe chama o eixo prolongado: o ponto C, que divide em dous o eixo, ſe chama centro; ſe por C paſſar huma perpendicular B B, cuja grandeza he terminada por hum circulo deſcrito do ponto A, e com o intervallo C F, eſta linha ſe chama eixo conjugado.

Os pontos F ſ ſaõ os fócus, e as perpendiculares lançadas dos pontos da curva ſobre o eixo, ſaõ as ordenadas. As abſciſſas, ſaõ as partes deſſes eixos tomadas deſde a ſua origem atè o encontro das ordenadas. Algumas vezes a origem he no centro, e outras no vertice das Hyperboles.

A terceira proporcional aos dous eixos, ſe chama parametro do primeiro termo da proporçaõ.

THEOREMA I.

O Eixo A a he para F f, intervallo dos fócus, como p . q.

THEOREMA II.

C D he huma terceira proporcional a C A, e a C E. (*figura precedente.*)

THEO-

THEOREMA III.

O Quadrado de qualquer ordenada P M ao eixo A a, he para o rectangulo de A P por X P, como o rectangulo A F por F a, para o quadro de C A, ou c a.

THEOREMA IV.

O Parametro he para o diametro, como o quadrado de qualquer ordenada, para o rectangulo das partes desse eixo, feitas pelo encontro das mesmas ordenadas.

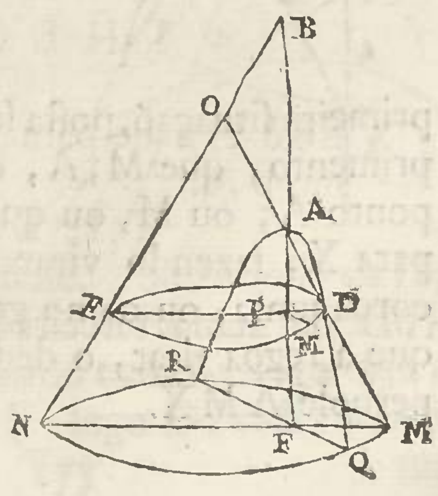
THEOREMA V.

OS quadrados das ordenadas, saõ entre si, como os rectangulos das partes dos eixos, feitas pelo encontro das mesmas ordenadas.

As demonstraçoens destes theoremas ficaràõ mais claras, e intelligiveis, quando se fizer particular estudo sobre as propriedades destas linhas, de que aqui só intentamos dar huma idèa geral.

THEOREMA VI.

MOstra-se, que a secçaõ cónica, chamada Hyperbole, descrita na figura seguinte he a mesma, de que até aqui temos tratado.



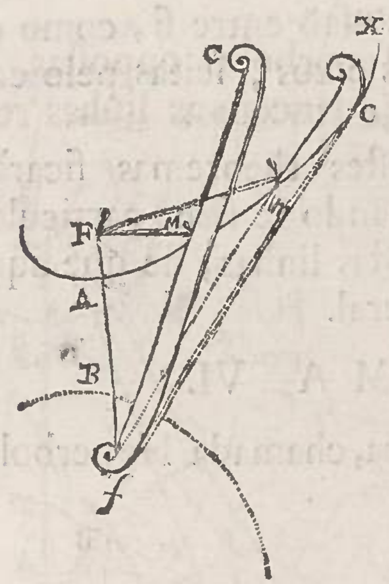
Seja m o n hum cóne cortado por hum plano, que encontre em B o outro lado n o; esta secçaõ q A R será a curva, chamada Hyperbole. Imaginemos hum circulo D M E paralélo ao da baze m q n: os seus diame-

diametros cortaõ o eixo da Hyperbole nos pontos P, e F; as linhas MP, e FQ ſaõ perpendiculares ſobre eſſes diametros, como tambem ſobre o eixo AF (*Parte* 2. *liv.* 5. *n.* 29. *e* 20.) porque ſaõ as commuas ſecçoẽs deſſes dous planos perpendiculares ao plano do triangulo: e por conſequencia ſaõ as ordenadas, tanto do circulo, como da curva DME, &c.

PROBLEMA III.

DEſcrever a Hyperbole por hum movimento continuo.

Seja AMX huma Hyperbole; A o ſeu vertice, e F o ſeu fócus. B he o vertice da Hyperbole oppoſta, e o ſeu fócus. Podemos imaginar deſcrita eſta Hyperbole da maneira ſeguinte.



A linha c f corta a Hyperbole AMX no ponto M; conſideremos a linha c f, como huma regoa, no extremo da qual eſtà pegado hum cordel, e o outro extremo pegado ao fócus F; outro extremo da regoa he fixo no fócus da Hyperbole oppoſta, como f, à roda da qual deve girar. Conſideremos eſta regoa em huma primeira ſituaçaõ, poſta ſobre AB, e o cordel de tal comprimento, que M, A, convenhaõ. Meta-ſe o dedo no ponto A, ou M, ou qualquer ponta, e deixe-ſe correr para X, fazendo virar a regoa; mas tendo ſempre a corda junta, ou como grudada com a regoa: a medida, que a regoa tirar, o dedo, ou a ponta eſcreverá a Hyperbole AMX.

Deſta

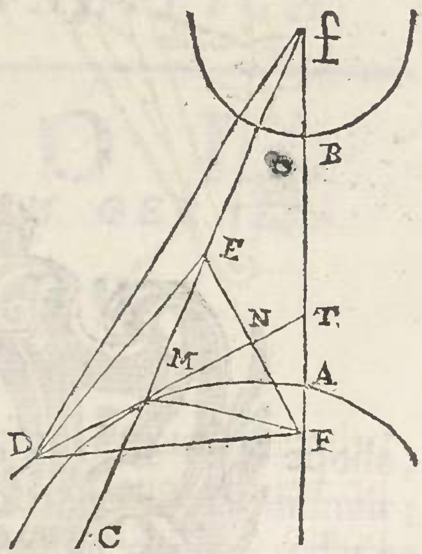
Desta construcçaõ se segue, que lançando de cada ponto da Hyperbole duas linhas rectas aos dous fócus, F, f, a diferença dessas duas cordas, será sempre a mesma.

Segue-se mais, que huma Hyperbole, se póde continuar indefinitamente; porque, se se continuar a regoa c f indefinitamente, e ao mesmo tempo a corda M C, fazendo virar a regoa, e continuando de ter o cordel firme, como fica dito, a hyperbole se continuará sem fim, e he evidente, que o ponto M se apartará cada vez mais do fócus F, á medida, que a regoa f ç se for movendo.

PROBLEMA IV.

De qualquer ponto, tomado em huma Hyperbole, fazer passar huma tangente.

Sejaõ A, e B duas Hyperboles oppostas. Do ponto dado M aos focus F f, se lancem as linhas rectas M F. M F divide o angulo F M f em dous igualmente pela linha M F: digo, que esta linha he tangente da Hyperbole. Seja M E = M F, e de hum ponto qualquer, como D, tomado na tangenre, se lancem as linhas D F, D f, e D E; os triangulos M F N, e M E N saõ iguaes, como tambem N D F, e N D E. Devemos provar, que o ponto D, tomado na tangente M T, naõ he ponto da Hyperbole.



Se D fosse da Hyperbole, seria D f — D F = M f — M F; mas isto naõ he assim, pois que M E foy tomado = M F: logo M f — M F = E f, e como D E = D F: logo D f = E f + D F;

mas no triangulo DEF, os lados DE, e Ef, em soma, saõ mayores, que o terceiro Df: logo DE he mayor, que DF: logo o ponto D naõ he nenhum dos da Hyperbole; e o mesmo se mostrará de qualquer outro ponto, tomado na linha NT.

COROLARIO.

A Curva AM representa a secçaõ de hum espelho Hyperbolico, de que CM he hum rayo da luz incidente, que cahe sobre a superfice concava do espelho no ponto M, e partindo de C ao fócus f da Hyperbole opposto, se refletirá em F. Os angulos da incidencia saõ iguaes aos angulos da reflexaõ; o que melhor se verá, quando, passados estes breves Elementos, se quizerem os curiosos aplicar ao conhecimento destas, e de outras mais linhas de maravilhosas propriedades; e para poder passar ao estudo de todas as mais Sciencias humanas, basta o que fica dito.

FIM.

LOGICA RACIONAL, GEOMETRICA, E ANALITICA.

ABSOLUTAMENTE NECESSARIA PARA entrar em qualquer Sciencia, e ainda para todos os homens, que em qualquer particular, quizerem fazer uſo do ſeu entendimento, e explicar as ſuas idéas por termos claros, proprios, e intelligiveis.

PARTE III.

DA LOGICA ANALITICA.

LIVRO I.

DA GRANDEZA EM GERAL.

CAPITULO I.

Que couſa ſeja grandeza.

1 GRANDEZA he tudo aquilo, que póde creſcer, ou diminuir; e aſſim tem por objecto todas as couſas creadas, naõ ſó as corporeas, mas tambem as eſpirituaes; porque podemos conſiderar os eſpiritos creados em mayor, e menor numero. A eſta Scien-

Sciencia, ainda que aqui tratada, como particular de hum modo intelligivel, daõ muitos o nome de Mathematica; porém ſaõ muitas as ſuas partes, e ſe divide em Mathematica pura, e Mathematica mixta.

2 A Mathematica pura ſe divide em duas partes, a ſaber, Arithmetica, que he a ſciencia dos numeros, e Geometria, que he a ſciencia da medida dos corpos.

3 A Mathematica mixta, he aquella, que ſe aplica ao conhecimento das couſas naturaes, que os Filoſofos chamaõ Fiſica.

4 Eſta tem varias partes, de que ſaõ principaes, a Coſmografia, a Geografia, a Hydorgafia, ou Nautica, a Mecanica, a Eſtatica, a Optica, a Captrotica, a Dyoptrica, Pyrothecnia, ou Arthilharia, e Arquitectura Militar, e Civíl.

5 Aqui ſó tratamos da Arithmetica pura, que ſe eſtende geralmente ao conhecimento intelligivel de todas as couſas creadas; mas naõ he a Arithmetica ordinaria, ou mercantil; mas huma Arithmetica ſuperior, e ſimbolica, na qual, em lugar de nos ſervirmos dos caracteres do algariſmo, nos havemos de ſervir das letras do A B C; de que rezulta nas operaçoens, e reſoluções dos problemas, e theoremas, huma grande facilidade, e huma maravilhoſa abreviatura.

6 A eſta Sciencia, daõ muitos o nome de *Analyzi*, ou *Algebra*; porèm a palavra *Analyzi*, ſignifica mais propriamente o methodo de invençaõ, com que eſta grande ſciencia deſcobre, e reſolve os theoremas, e problemas mais dificultoſos; e aſſim ſe chama mais propriamente *Algebra*.

7 Nenhu-

7 Nenhuma Sciencia he taõ propria para dar abertura de entendimento, e o fazer mais penetrante, e capaz de perceber as verdades intelligiveis; porque as considéra despidas de tudo, o que diz ordem aos nossos sentidos, e á imaginaçaõ; e he o unico meyo para podermos vir no conhecimento de Deos, e da nossa alma, que saõ as duas cousas mais importantes, e em que mais nos devemos interessar.

8 Para entrar nesta Sciencia he necessario, que os principiantes se costumem a perceber geralmente as cousas, de que se trata, notando-as com as letras ordinarias do alfabeto, chamando a huma A, a outra B, &c. notando as cousas conhecidas pelas primeiras letras do alfabeto A, B, C, D, &c. e as ignotas pelas ultimas letras X, Z, Y, &c. sem se embaraçar, do q̃ essas letras significaõ, se naõ que B, he B, e C he C; porque o que significaõ, ou o seu valor, o saberá a seu tempo.

9 Esta Sciencia, em tudo maravilhosa, foy conhecida, e usada dos Antigos, que parece convieraõ entre si de a occultar, para fazerem mais mysteriosas as suas producçoens: o famoso Viécta, insigne Mathematico, foy o seu primeiro restaurador, e Renarto Cartezio a subio ao seu mayor auge; mas naõ pòde ser bem entendido, senaõ dos scientes; porque começou por onde os outros acabàraõ.

10 Como esta Sciencia he taõ vasta, que comprehende todo o creado intelligivel, tudo quanto he intelligivel, he o seu objecto; porque naõ só considèra as substancias em geral; mas tambem os modos das substancias, por exemplo, o tempo, o movimento, o pezo, a velocidade, os gràos da perfeiçaõ, e geralmente tudo o que he capaz de augmento, ou diminuiçaõ; e

quem conhece eſſas qualidades, as póde comparar humas com outras, ſegundo a relaçaõ, reſpeito, ou razaõ, que humas tem com outras; de que reſulta huma ſciencia exacta, em que as couſas ſe conhecem até onde o entendimento humano póde chegar.

11 As Sciencias humanas, Fiſica, Metafiſica, Moral, Medicina, Politica, Chymica, e outras, naõ ſaõ Sciencias perfeitamente exactas; porque, ainda que comprehendaõ muitas verdades claras, e evidentes, naõ daõ a demoſtraçaõ exacta, para completo conhecimento.

12 Muitas couſas ſe ſabem com certeza, e evidencia; e mais naõ ſaõ verdades de Sciencia exacta; por exemplo, ſabemos com toda a certeza, e evidencia, que o Sol eſtá mais diſtante da terra, do que a Lua; mas naõ ſabemos o quanto eſtá preciſamente mais diſtante; o que era neceſſario para ſer verdade de Sciencia exacta.

A Sciencia da Grandeza em gerál, naõ ſe contenta com ſaber o quanto huma couſa he mayor, que outra; mas moſtra com toda a evidencia, o quanto he mayor, ou menor.

13 Toda a grandeza tem as ſuas partes juntas, e unidas, ou ſeparadas. A que tem as ſuas partes unidas ſe chama *Continua*, e a que tem as ſuas partes ſeparadas ſe chama *Diſcreta*: os numeros ſe aplicaõ à toda a ſórte de grandezas; e tudo o que ſe conſidèra grande, tem partes, ou unidas, ou ſeparadas. A quantidade continua tem as ſuas partes juntas, como os corpos; ou eſtes ſe conſidérem em comprimento, ou em largura, ou em altura, ou profundidade; eſtas partes do continuo, ainda que actualmente unidas ſe pódem conſiderar

derar pelo entendimento; como ſeparadas, por abſtracçaõ, ou preciſaõ.

14 A quantidade diſcreta, ſaõ os numeros; e a Sciencia, que delles trata, ſe chama Arithmetica; e os numeros de que ſe compoem ſaõ propriamente huns nomes, que expreſſaõ, e declaraõ as partes de huma grandeza.

15 Ainda que eſta Sciencia conſidéra as grandezas, naõ as conſidéra em ſi meſmas, ou ſegundo a ſua natureza; mas ſómente, ſegundo o reſpeito, razaõ, ou relaçaõ, que huma grandeza póde ter com outra do meſmo genero, para por eſſe meyo poder adquirir o conhecimento das verdades occultas, fundandoſe nos primeiros principios communs a todas as Sciencias, que deixamos explicados na primeira, e ſegunda Parte deſta obra.

CAPITULO II.

Das propriedades, e ſinaes, com que ſe explicaõ as grandezas Algebraicas.

16 AS grandezas Algebraicas ſe pòdem ajuntar humas às outras, e huma pequena cruz entre ellas, he ſinal de que eſtaõ juntas, e unidas; como B mais C, ſe nota deſta ſòrte: B + C.

17 Para ſeparar huma grandeza de outra, uſamos de huma barrinha entre ellas, deſta ſórte: B — C; ſe as grandezas ſaõ iguaes, como B — B, naõ he nada; porém ſe huma he mayor, e outra menor, tirando a menor da mayor, he o meſmo, que diminuila; e ſe huma

huma grandeza se quer mostrar igual a outra, duas risquinhas saõ o sinal da sua igualdade, como A igual B, se nota: A = B.

18 Se quizermos expressar algebraicamente o producto de duas grandezas multiplicadas, huma por outra, naõ usaremos de sinal algum, mas basta, que entre ellas naõ medie cousa alguma; e desta sórte A, multiplicado por B, se nota desta maneira: A B, que he o producto das duas grandezas; e se usamos de outra sórte na segunda parte, marcando os productos com o caracter X, foy; porque tratavamos das linhas em particular; e huma linha em particular se naõ póde notar sem duas letras; porém daqui por diante usaremos, como fica dito, sem sinal algum.

19 Até aqui só notamos as grandezas simples, e naõ as grandezas complexas, ou compostas; de que trataremos nos capitulos seguintes; e agora só devemos notar, que as grandezas se pódem considerar liniares, a saber, de huma só dimençaõ, como B, ou C; e se estes se ajuntarem, o que resulta, se chama *Somma*, como B + C; e se se diminuirem hum de outro; como, se quizermos diminuir C de B, diremos B − C, e multiplicando B por C, o producto B C, se chama plano, ou grandeza de duas dimençoens; porèm se as grandezas multiplicadas forem iguaes, como B, e B, o producto B B se chama quadrado. E ainda que o dividir he o mesmo, que diminuir, porém mais abreviado, as duas grandezas tem diferentes nomes; porque o dividido se chama *Dividendo*, e o que divide, se chama *Divisor*; e o que resulta da divisaõ, se chama *Quociente*.

20 Nas grandezas liniares, que se querem dividir

dir ſe nota o dividendo por cima de huma riſquinha, e o diviſor por baixo, deſta ſórte $\frac{A}{B}$ que he o quociente da diviſaõ.

CAPITULO III.

Do ſomar das grandezas Algebraicas complexas.

21 CAda huma das grandezas ſimples, de que huma grandeza complexa ſe compoem, ſe chama *Termo*, de que o +, e o − ſaõ ſinaes.

O Sinal + ſe chama ſinal poſitivo, ou affirmativo; e o ſinal − negativo, ou defectivo; porèm quando os termos naõ tem ſinal algum, ou principiaõ ſem ſinal, ſe devem conſiderar, como ſe tiveſſem o ſinal +.

22 Quando huma grandeza complexa, ou incomplexa for muitas vezes repetida com o ſinal +, ou com o ſinal −, para abreviar as operaçoens, nos ſerviremos dos caracteres do algarithmo para notar as vezes, que a grandeza foy repetida, como por exemplo, em lugar de pôr $B + C + C + C$, poremos $B + 3C$, ou em lugar de $B - C - C - C$, poremos $B - 3C$; porém ſe a meſma grandeza tiver ſinaes diferentes, tiraremos eſſa grandeza com o ſinal −, deſta ſórte $B + C + C - C - C$, e tirando o mais, e o menos fica B, pois foy tantas vezes poſto, como tirado, &c.

CAPITULO IV.

Do ſomar Algebraico das grandezas complexas.

23 AS grandezas complexas para ſe ſomarem humas com outras, o faremos com os ſeus ſinaes, como, querendo ſomar $B + C$ com $M + C$, as ajuntaremos com os ſeus ſinaes; deſta ſórte: $B + C + M + C$, ou $B + M + 2C$; nas primeiras letras, como fica dito, ſempre ſe entende o ſinal affirmativo.

Somar $\left.\begin{matrix} B + C \\ M + N \end{matrix}\right)$ $B + C + M + N$ ſoma

Somar $\left.\begin{matrix} B + C \\ M - C \end{matrix}\right)$ $B + C + M - N$ ſoma

OUTRO EXEMPLO.

Somar $\left.\begin{matrix} 2B + 3C \\ 3M + 4N \end{matrix}\right)$ ſoma $2B + 3C + 3M + 4N$

24 Porque eſtando as letras notadas de caracteres do algarithimo, ſe devem deixar da meſma ſórte, que eſtaõ.

OUTRO EXEMPLO.

Somar $\begin{matrix} (\ A + 3B\ ) \\ (\ A + 2B\ ) \end{matrix}$ Soma $2A + 5B$.

Somar $\left.\begin{matrix} 2A - B \\ 3A - B \end{matrix}\right)$ ſoma $5A - 4B$.

Somar $\left.\begin{matrix} AA - 5A + B \\ AA + A - B \end{matrix}\right)$ ſoma $2AA - 4A$.

26

25 Por estes exemplos se mostra, que o modo de somar as grandezas, he como fica dito, pôlas successivamente humas diante das outras na mesma linha, com os sinaes, que lhe competem; e se os sinaes saõ contrarios, se diminuem os negativos dos affirmativos, e resta a soma, que tambem vem a ser a diferença, se as grandezas naõ saõ complexas.

CAPITULO V.

Da operaçaõ do diminuir as grandezas complexas.

26 PAra diminuir huma grandeza complexa de outra complexa, ou incomplexa, se devem ajuntar, mudando-lhe os sinaes da grandeza, que se diminue, a saber, mudando o sinal + em −, e o − em +, observando, que onde naõ ha sinal, se deve entender, que o tem affirmativo.

EXEMPLO.

De - - - - B + C)
Diminuir M + N) resta B + C − M − N.

De - - - - - B + C)
Diminuir N + D) resta B + C − M + N − D.

27 A razaõ, porque se muda o mais em menos nesta operaçaõ, parece difficil á primeira vista; mas nisso mesmo he, que consiste a diminuiçaõ, que he fazer a grandeza, de que se diminue menor, do que era de antes; porque para usar do algarithmo pelo modo Algebraico, se de 5 + 3, quizermos tirar 2 + 4, o resto será 5 + 3 − 2 − 4, onde se vê claramente, que na mu-

mudança dos ſinaes conſiſte eſta operaçaõ; porque 5 ✻ 3 fazem 8, e eſta grandeza, de que ſe tira a outra, ha de ficar menor.

28 E iſto ſe comprehende melhor, quando a grandeza, que ſe quer diminuir tem o ſinal ✻, e depois o ſinal —; como, ſe de B quizermos tirar P — N; porque P — N he menos, que P; e aſſim ſe tirarmos P, tiraremos mais do que convém; e por tanto, tirando P, lhe devemos ajuntar N, que he, o que faltava para P ſer grandeza inteira; e aſſim diminuindo P — N de B, o reſto he B — P ✻ N.

39 Ainda que a grandeza, que ſe quer diminuir, tenha o ſinal menos, ſempre ſe devem trocar os ſinaes na grandeza, que ſe diminue; como, ſe de B quizermos tirar — N, o reſto he B ✻ N; o que aqui he cauſa de equivocaçaõ, he por ſe naõ perceber claramente, que diminuir huma grandeza com o ſinal menos, tirando-lhe o ſinal — he o meſmo, que accreſcentala, ou, por aſſim dizer, reſtituirlhe, o que lhe tinhaõ tirado; com que diminuir he propriamente accreſcentar. Hum homem, por exemplo, que tem cem mil cruzados, e deve cincoenta, tirando-lhe a divida he certo, que ſe lhe accreſcenta o cabedal, e ſe deve ſempre notar, que na grandeza, que ſe diminue, ſe devem ſempre trocar os ſinaes; e aſſim diminuindo de B, — N, ſe deve trocar o — em ✻.

30 Póde-ſe dar huma demonſtraçaõ ſenſivel pelos nomes do algarithmo; por exemplo, ſe de 7 ſe quizer tirar menos 2 em lugar de 7, ponho 9 — 2, que lhe he igual; e aſſim deve o reſto ſer o meſmo.

Se de 9 — 2 eu tirar — 2, de dous modos o poſſo fazer, ou apagando-o — 2, ou pondo ✻ 2 depois de de 9 2 — 2; ou ficando 9, ou pondo 9 — 2 * 2; e assim sempre fica 9; porque mais, e menos se reduz a cifra; e assim tirando de 7, — 2 se naõ póde fazer, senaõ mudando o sinal menos em mais, e será o resto 7 * 2 = 9.

CAPITULO VI.

Da multiplicaçaõ das grandezas complexas.

31 PAra multiplicar as grandezas complexas por outras grandezas, ou sejaõ complexas, ou incomplexas, devemos fazer tantas multiplicaçoens parciaes, quantas forem as partes da grandeza complexa, comparada com o termo, ou termos da outra grandeza; e assim se devem multiplicar os nomes dos termos por diferentes multiplicaçoens parciaes; por exemplo, se huma grandeza complexa tem dous termos, e a incomplexa tem hum sò termo, como huma vez 2 he 2, naõ haverá mais, que duas multiplicaçoens parciaes; como B * D, multiplicado por C, faz CB * CD; e se cada huma das grandezas tiver dous termos, haverà 4 multiplicaçoens parciaes; porque duas vezes 2, fazem 4, por exemplo.

$\left.\begin{matrix} B * C \\ P * Q \end{matrix}\right)$ o producto he PB * PC * QB * QC.

Se cada grandeza complexa for composta de tres partes, a multiplicar por outra de tres partes, haverá nove multiplicaçoens parciaes; porque tres vezes tres saõ nove.

32 Isto se deve observar em toda a multiplicaçaõ de grandezas complexas; mas porque estas podem ser

affectas do final +, humas; e outras do final —, devemos observar as regras seguintes.

REGRA I.

33 MAis, multiplicado por mais, deve no producto levar o final +; o que naõ necessita de exemplo, pelo que fica dito.

REGRA II.

34 MAis, multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, deve levar o final — no producto por exemplo, A — B por C, dá no producto A C — B C.

REGRA III.

35 MEnos, multiplicado por menos, dá no producto +, como A — B por C D, faz no producto A C — C B — A D + D B.

36 O que fica dito, a respeito de que no somar deixamos os finaes menos, como elles estaõ notados, e que na diminuiçaõ mudamos o final — em +, nos dará intelligencia para a explicaçaõ desta terceira regra. Suppondo, por exemplo, que duas grandezas notadas por algarithmo, como, por exemplo, 5, e 3 se querem multiplicar, he certo, que cada huma dellas póde ter o final +, ou o final —; e he necessario saber, qual dellas he o multiplicador, e o multiplicado, de que resultaõ quatro diferentes casos.

37 O primeiro caso he, quando o multiplicador tem o final +, e o multiplicado tem tambem o final +, como + 5, multiplicado por + 3.

38 O ſegundo caſo he, quando o multiplicador tem ✱, e o multiplicado tem —, como ✱ 5 por — 3.

39 O terceiro caſo he, quando o multiplicador tem —, e o multiplicado tem ✱, como — 5 por ✱ 3.

40 O quarto caſo he, quando o multiplicador, e o multiplicado tem ambos o ſinal —, como — 5, multiplicado por — 3.

41 Para ſabermos com diſtincçaõ, quando, conforme as tres regras, nos devemos ſervir do ſinal ✱, ou do ſinal — no producto, devemos notar, que o primeiro caſo pertence à primeira regra, e o quarto caſo pertence à terceira regra, em que o producto deve ter o ſinal ✱, e ſará ✱ 15; e que no ſegundo caſo, e no terceiro, que pertencem ambos á ſegunda regra, o producto deve levar o ſinal —, a ſaber, — 15.

42 Para mayor intelligencia devemos notar, que quando o multiplicador tem o ſinal ✱, como nos dous primeiros caſos, a multiplicaçaõ ſe faz por via de ſoma, a ſaber, que quando o multiplicado, ou ſeja affirmativo, ou negativo, eſte ſe ajunta tantas vezes, quantas ſaõ as unidades do multiplicador; mas, quando o multiplicador tem o ſinal —, como nos dous ultimos caſos, he multiplicar por menos, ou por via de diminuiçaõ, a ſaber, diminuindo o multiplicado, tal, qual for, tantas vezes negativamente, quantas unidades tem o multiplicador; e em ſegundo lugar, ſe deve notar, que a grandeza multiplicada, he a que de algum modo determina o ſinal do producto, a ſaber, que o ſinal, que deve ter o multiplicado na multiplicaçaõ, quer ſeja o meſmo, que tinha de antes, ou mudado no ſeu contrario, ſerà o ſinal do producto.

43

43 Finalmente se deve attender, que quando a multiplicaçaõ se faz por via de soma, se deve observar no multiplicado, o que se observa na operaçaõ do somar, que he conservar o seu sinal; e assim nos dous primeiros casos a cima, o producto deve ter o mesmo sinal, que o multiplicado tinha antes da multiplicaçaõ, como, se por + 5, se multiplicar + 3, o producto será + 15; e no segundo caso, em que o multiplicado tem —, o producto terá tambem —, como, se por + 5, se multiplicar — 3, o producto será — 15, o que he por via de soma; porque, se a 5 se ajuntar — 3, a soma serà 5 — 3 = 2.

44 Porém, quando a multiplicaçaõ se faz por via de diminuiçaõ, como nos dous ultimos casos, em que o multiplicador tem menos, devemos observar no multiplicado o mesmo, que observamos na operaçaõ do diminuir, ou seja positiva, ou negativa a grandeza, que se quer diminuir, em que os sinaes se devem mudar nos seus oppostos: de que se segue, que no terceiro caso, em que o multiplicado tem mais, o producto deve ter menos, como, se por — 5 multiplico + 3, o producto será — 15; e da mesma sórte, no quarto caso, em que o multiplicado tem —, deve o producto ter +, como — 3 por — 5, he tirar cinco vezes — 3; mas tirar huma vez — 3, he pôr + 3, como fica dito na operaçaõ do diminuir: logo tirar 5 vezes 3, he pôr + 15.

45 Esta multiplicaçaõ de — por — he de diferente especie, e naõ concorda com a idéa da razaõ, que tem entre si a unidade para o multiplicado, como o multiplicador para o producto; porque quando multiplicamos 3 por 5, a unidade he igual parte de 3, como 5 he igual parte do producto 15; o que senaõ póde verifi-

verificar na multiplicaçaõ de -3 por $+5$; porque 1 para -3, naõ tem a mesma razaõ, que -5 para $+15$: $1. -3 :: -5. +15$; o que naõ póde ser; porque assim como 1 he mayor, que -3; tambem -5 devia ser mayor, que $+15$; e a esta objecçaõ, só podemos responder, que esta multiplicaçaõ he de diferente especie, feita por via de diminuiçaõ, e naõ de soma, como o saõ as multiplicaçoens das mais grandezas inteiras, ou quebradas.

46 Deste modo de multiplicar por via de diminuiçaõ, parece se tirou a invençaõ de poder com os dedos das mãos fazer a multiplicaçaõ de todos os numeros simples de 5 até 10, suppondo, que cada punho fechado vale 10, e tirar de 10 para baixo o numero, que quizerem, como, para significar 8, levantaremos 2 dedos, e será $10-2$; e querendo multiplicar 8 por 7, levantaremos 3 dedos, e seràõ $10-3$; e fazendo a operaçaõ, contaremos os dedos levantados, como numeros simples, e os fechados cada hum por 10, que fazem 50, e os levantados multiplicaremos huns por outros, 2 vezes 3, 6, o que faz 56. desta sorte:

$$\left.\begin{array}{l} 10-2 \\ 10-3 \end{array}\right\} \; 100-20-30+6, \text{ que faz } \underline{56}.$$

47 Quando os termos, que se devem multiplicar saõ affectos de alguns caractéres do algarithmo, se devem estes multiplicar, e juntamente as letras, guardando sempre as régras dos sinaes, como, por exemplo, $3B$ por D, faz $3BD$; $3B$ por $5D$, faz $15BD$; $3A+2D$, por $3B-2D$, que faz $9AB+6BD-6AD-4DD$.

48 Nas operaçoens do multiplicar algebraico, senaõ começaõ as multiplicaçoens parciaes da direita pa-

ra a eſquerda, ou da parte das grandezas, que menos, ou mais valem, como ſe uſa na Arithmetica ordinaria; mas começa a operaçaõ da eſquerda para a direita, como, por exemplo, ſe quero multiplicar eſtas duas grandezas A ✱ B por C ✱ D, poſtas, huma por baixo da outra: deſta ſórte:

Multiplicado A ✱ B,
Multiplicador C ✱ D,

Producto - - C A ✱ C B ✱ D A ✱ D B.

Para que os principiantes ſe poſſaõ inteirar da verdade deſtas operaçoens, ſerá util, que façaõ algumas com os caractéres do algarithmo; mas pelo modo, e com os ſinaes algebraicos. Se quizermos ſuppor, que A ✱ B multiplicado por ſi meſmo, dá hum verdadeiro producto: Se A valer 6, e B valer 3, poremos eſtes numeros com os ſinaes, e faremos a operaçaõ, como a cima.

Multiplicador - - - 6 ✱ 3
Multiplicado - - - 6 ✱ 3

Producto - - - - - 36 ✱ 18 ✱ 18 ✱ 9.

6 ✱ 3 fazem huma grandeza inteira, e vale 9, e ſe multiplicaſſemos 9 por 9, he o ſeu producto 81; e o meſmo ſe acharà neſta multiplicaçaõ.

OUTRO EXEMPLO.

SE multiplicarmos 8 — 2, por 9 — 3, acharemos quanto he ao juſto o ſeu producto, uſando dos caractéres ſimbolicos da Algebra, com os caractéres do algarithmo; deſta ſórte

multi-

multiplicado - 8 — 2
multiplicador 9 — 3

producto - - - 72 — 18 — 24 + 6

Como 8 — 2, vale 6 sómente; pois naõ he 8, grandeza inteira, e para o ser lhe faltaõ 2, e resta só de valor verdadeiro 6, como tambem 9 — 3 naõ he grandeza inteira, e para o ser lhe faltaõ 3, e fica 6, valor verdadeiro; he certo, que multiplicando 6 por 6, o seu producto he 36, e o mesmo justamente se achará na operaçaõ a cima, em que se deve advertir aos principiantes a razaõ; porque — por — dà +, e he, porque as grandezas, que se multiplicáraõ, naõ eraõ grandezas inteiras; e como — por —, por via de diminuiçaõ, he o mesmo, que accrescentar; porque, como fica dito, quem diminue huma divida, fica com mayor cabedal, naõ nos devemos admirar de que — por — dê +.

Os mestres devem ter cuidado em dar muitos exemplos destas operações, para que se facilitem a obrar; porque lhes parece huma giria, ou nova lingoa, em quanto naõ estaõ costumados; e para exercicio poderàõ servir os exemplos seguintes

SOMAR.

A - - - - - B + C)
ajuntar - C) B + 2C

A - - - - - B + D)
ajuntar - B + C) 2B + D + C

A - - - - - B — C)
ajuntar - D + C) B + D

A - - - - - B — C + D)
ajuntar - D + C + G) B + 2D + G

A - - - - - B + C — M)
ajuntar - D — M — C) D — B — 2M

A-

A-----B + 7ª) B − 2 A
ajuntar − 9ª)
A-----B + 7ª) B + 16 A
ajuntar - + 9ª)
A-----B + 9ª) 2 B + 2 A
ajuntar - B + 7ª)

DIMINUIR.

De-----B + D) D + M
tirar----B − M)
De-----B + D) B + D + C
tirar---- − C)
De-----B + D) B − C
tirar----C + D)
De-----S − B) + B + A, ou A + B
tirar----S − A)
De-----B + C − D) C − M − 2 D
tirar----B + M − D)
De-----BB + CC + CB) 2 CB
tirar----BB + CC − CB)
De-----B + D) 2 D
tirar---B − D)
De-----B + 7 A) B − 2 A
tirar---- + 9 A)
De-----B + 9 A) + 16 A
tirar----B + 7 A)
De-----D + B) o
tirar----B + D)

MULTIPLICAR.

Por-----B + C) BB + CC + 2 BC.
multiplic. B + C)

Por

Por ---- B + C) BB − CC.
mult. --- B − C)

Por ---- B − C) BB + CC − 2BC.
mult. --- B − C)

Por ---- B + C + D) BM + CM + DM.
mult. --- M)

Por ---- B + C + D) BB + BC + BD.
mult. --- B)

Por ---- B + C − D) BB − CC − BD − + CD.
mult. -- B − C)

Por ---- B + C − D) BB − CC − DD + 2DC.
mult. --- B − C + D)

DIVIDIR.

Dividendo -- BBCC) BB
Divisor ------ CC)

Dividendo -- BCDF) BD
Divisor ------ CF)

Dividendo -- BA + CA + DA) A
Divisor ---- B + C − D)

Dividendo -- BB − AA) B + A
Divisor ----- B − A)

Dividendo --- BA + CA + DA) B + C + D
Divisor ----- A)

Dividendo -- BB + AA + 2BA) B + A.
Divisor ----- B + A)

LOGICA ANALITICA, LIVRO II.

DAS DIFERENTES POTENCIAS, A QUE PO'DE sobir qualquer grandeza.

CAPITULO I

Que cousa seja Potencia.

1 QUALQUER grandeza, como, por exemplo A, ou B, se chama primeira potencia; porque póde sobir, multiplicada por si mesma a quadrado, que he a segunda potencia, como AA, ou BB; e se esta grandeza se tornar a multiplicar por si mesma, será o seu producto AAA, ou BBB, a que chamaõ cubo, e he terceira potencia.

2 Até o cubo temos na natureza, primeira, segunda, e terceira potencia; e todas as mais potencias do

cubo para cima, ſaõ potencias intelligiveis, que naõ tem nas couſas creadas, couſas, a que poſſaõ competir, como quadrado de quadrado, quinta potencia, ſexta, &c. Os Mathematicos para abreviar, ajuntaõ a eſtas potencias pela parte ſuperior o numero do algarithmo, que moſtra as vezes, que foy a grandeza multiplicada; deſta ſórte, para moſtrar a primeira potencia, quando he neceſſario diſtinguilla das outras, eſcreveremos, A^1 para o quadrado, A^2, para o cubo, A^3 para o quadrado de quadrado, A^4, A^5, A^6, A^7, &c. o que aqui dizemos das grandezas ſe aplica ſem diferença ás grandezas complexas, para dellas formar as potencias, como a de $A + B$, ou a de $A - B$; para o que naõ ha mais, que multiplicar eſſa potencia complexa ſempre por ſi meſma, até chegar á potencia, a que a quizerem ſobir.

CAPITULO II.

Da definiçaõ dos termos, de que nós havemos ſervir.

DEFINIÇAM I.

3 A Grandeza feita da multiplicaçaõ de huma, ou de mais grandezas, ſe chama grandeza de muitas dimençoens, como, por exemplo, a grandeza BC, producto de B, multiplicado por C, he huma grandeza de muitas dimençoens; porque repreſenta hum plano, que tem comprimento, e largura.

DEFINIÇAM II.

4 COmo toda a grandeza he potencia, e ſóbe multiplicada, lhe conſideraremos as raizes; porque ſe forem iguaes, ſerà potencia perfeita, como

mo a^2, a^3; e se as potencias forem desiguaes, como ab, producto de a por b, se dirá plano, e se for de 3 desiguaes, se chamará paralélipipedo; daqui para cima as potencias de raizes desiguaes saõ só potencias de numeros intelligiveis.

DEFINIÇAM III.

5 QUalquer grandeza se póde notar com huma só letra, que significa huma grandeza inteira, e sem divisaõ, como, por exemplo, X, ou a podemos considerar com diferentes partes significadas por diferentes letras, como, se X tiver duas partes, poderemos chamar a huma Z, e a outra Y; e como as partes de huma grandeza saõ iguaes ao todo, será $X = Z + Y$.

6 POdemos aqui fazer reflexaõ sobre a grande utilidade, e abreviaçaõ, que ha em usarmos das letras do ABC, em lugar dos caractéres do algarithmo; porque naõ podemos dar nome mais curto a huma grandeza, que o de huma só letra; e com ella se expressará qualquer número, por mayor, que seja; e em segundo lugar, naõ se confundem as letras, humas com outras de qualquer sórte, que estejaõ, e sempre significaõ o mesmo, como ABC he o mesmo que CAB, ou BAC. Em terceiro lugar, sempre as raizes do producto estaõ á vista sem mudança, como AB, que supponho o producto de 5 por 6, em lugar, que no producto 30, as raizes 6, e 5, já naõ apparecem; e nos numeros sempre estamos sugeitos a observar os lugares, a que tocaõ os numeros; e se se naõ guardasse essa ordem, se confundiriaõ; porque os mesmos numeros, significaõ cousas differentes, como 28, e 82, que tem os mesmos caractéres.

CAPITULO III.

Da comparaçaõ da ſegunda potencia, ou de qualquer outra grandeza de duas dimençoens com as ſuas partes.

PROPOSIÇAM I.

7 SE á ſoma de duas grandezas deſiguaes ſe ajuntar a diferença das meſmas grandezas, o todo ſerá duplo da parte mayor.

Seja A + B ſoma das duas grandezas, A, e B, partes da grandeza X, e ajuntando-lhe a diferença A — B, o todo ſerá duplo de A, ſuppoſta mayor grandeza.

Pois que a ſoma A + B + A — B reduzida, ficaõ 2 A; porque + B — B, ſe deſvanecem: logo 2 A he o dobro da parte mayor A.

COROLARIO I.

8 SEgue-ſe, que metade da ſoma de duas grandezas, mais metade da ſua diferença, ſerá igual à parte mayor das duas grandezas; e metade da ſoma, menoś metade da diferença, ſerà igual à menor.

COROLARIO II.

9 SEgue-ſe tambem, que para ajuntar a diferença de duas grandezas à ſua ſoma, baſta tomar o duplo da mayor.

PROPOSIÇAM II.

Theorema.

10 SE a ſoma de duas grandezas deſiguaes ſe tirar da diferença das meſmas grandezas, o reſto ſerà tanto menor, que nada, quanto foy duplo da mayor.

Sejaõ as duas grandezas A, e B; A, a mayor, e a diferença, $A - B$.

DEMONSTRAÇAM.

POis que a diferença he $A - B$, ſe della tirarmos a ſoma $A + B$, o reſto ſerà $A - B - A - B$; mas $+ A - A = 0$: logo o reſto ſerà $- 2B$, duplo da menor; e he o que ſe queria demonſtrar.

CAPITULO IV.

Da comparaçaõ de outras potencias, com as ſuas partes.

PROPOSIÇAM I.

Theorema.

11 SE huma grandeza X ſe dividir em quaeſquer duas partes B, e C, o cubo de toda a grandeza X he igual aos cubos de cada huma de ſuas partes B, e C, e a ſeis ſolidos, dos quaes, cada tres tem por baze o quadrado de huma das partes, e por altura a outra parte.

DE-

DEMONSTRAÇAM.

Pois que $X = B + C$, serà $XX = BB + BC + BC + CC$; e se multiplicarmos cada huma destas grandezas iguaes, por cada huma das desiguaes X, e $B + C$, os productos X^3, e B^3, $+ BBC + BBC + BBC + BCC + BCC + BCC + C^3$, seràõ tambem iguaes; mas o producto B^3, $+ BBC + BBC + BBC + BCC + BCC + BCC + C^3$, he composto dos dous cubos B^3, e C^3, e de 6 solidos, que cada tres tem por baze o quadrado de huma das partes, e por altura a outra parte: logo, &c.

COROLARIO.

12 Segue-se, que entre dous cubos ha dous solidos; o primeiro feito do triplo do quadrado da primeira parte, multiplicado pela segunda, e o segundo feito do triplo da primeira parte, multiplicado pelo quadrado da segunda, ou feito do triplo do quadrado da segunda, multiplicado pela primeira parte.

ESCOLIO.

13 Assim como suppozemos dividida a grandeza X, em quaesquer duas partes, conhecemos de que se compunha o seu cubo, assim tambem poderemos conhecer, de que se compoem o cubo da mesma grandeza, ou de qualquer outra, quando for dividida em tres, ou quatro partes, &c. e por esta razaõ naõ propomos estes theoremas, pois se pódem deduzir do que fica demonstrado.

PRO-

PROPOSIÇAM II.

Theorema.

14 TRes ſolidos iguaes, juntos em huma ſoma, dos quaes, cada hum tem por baze hum quadrado, ſaõ iguaes a hum ſó ſolido, feito do triplo do meſmo quadrado, multiplicado pela terceira raiz.

Sejaõ os tres ſolidos iguaes BBC, BBC, BBC, e a grandeza X= BB+BB+BB, ou X=3BB.

DEMONSTRAÇAM.

POis que X = 3 BB, ſe multiplicarmos ambas as grandezas por C, ſerà (*num.* 11.) XC = 3BBC; e he o que ſe queria demonſtrar.

PROPOSIÇAM III.

Theorema.

15 SE hum plano BX ſe dividir em quaeſquer dous planos BC, e BG, o ſolido feito de BX por Z, he igual aos ſolidos de BC por Z, e de BG por Z.

DEMONSTRAÇAM.

POr quanto, BX = BC+BG, ſe multiplicarmos ambas as grandezas por Z, os productos BXZ, e BCZ+BGZ ſeràõ iguaes (*num.* 11.) e he o que ſe queria demonſtrar.

ESCOLIO.

16 OS que tiverem dado attençaõ ao que fica dito neste capitulo, e no antecedente, naõ só reconheceràõ o caminho aberto para formarem hum grande numero de theoremas; mas tambem para deduzirem outros, dos quaes ficaõ explicados; por quanto as raizes tem mais partes, das suas multiplicaçoens resultaõ novos theoremas, por exemplo, querendo-se conhecer as propriedades de huma potencia plana, tendo a sua raiz X, quatro partes iguaes B + B + B + B, naõ ha mais, q̃ multiplicar a grandeza X por si mesma, e as suas partes; e se acharà, que XX he igual a 16 quadrados de huma das partes iguaes, em que se suppoem dividida a grandeza X.

17 O que supposto, nos naõ he necessario tratar da comparaçaõ das outras potencias, nem darmos mais theoremas tocantes aos solidos; porque se quizermos saber, por exemplo, de que se compoem a quarta potencia de X, tendo X duas partes B + C, naõ temos mais, do que multiplicar B + C por si mesmo, e o producto BB + 2BC + CC, outra vez por B + C, o que faz $B^3 + 3BBC + 3BCC + C^3$; e logo este producto, outra vez por B + C, que produzirá a quarta potencia $B^4 + 4BC^3 + 6BBCC + 4BC^3 + C^4$; e assim diremos, que a quarta potencia de X, tendo X duas partes, he composta de dous quadrados de quadrado de cada huma de suas partes; e de tres grandezas de quatro dimençoens, das quaes a primeira, he feita do quadruplo do cubo da primeira parte, multiplicado pela segunda: a segunda do se xtuplo do quadrado da primeira parte, multiplicado pelo quadrado da segunda, e a terceira do quadruplo da primeira parte, multiplicado pelo cubo da segunda; o mesmo se poderà mos-

moſtrar, tendo a grandeza X mais partes; ou de quaeſquer outras potencias.

CAPITULO V.

Do que ſe entende por promoçaõ *das potencias.*

18 HA dous modos de conhecer as couſas, a reſpeito das ſuas partes: o primeiro, quando conhecemos as partes, ou raizes, e as ajuntamos, ou multiplicamos para conhecermos o effeito, que produzem: o ſegundo, quando conhecemos as grandezas inteiras, e lhe naõ conhecemos as partes, ou raizes; e querendo-ſe-lhe conhecer as partes, he neceſſario reſolver a grandeza nas partes, de que foy composta; o que ſe conſegue pela diminuiçaõ, ou diviſaõ; neſte lugar ſó conſideramos as potencias, que ſaõ produzidas pela multiplicaçaõ de huma certa grandeza multiplicada hum certo numero de vezes, pela meſma grandeza.

19 Temos viſto, que a ſegunda potencia he produzida pela multiplicaçaõ de huma certa grandeza por ſi meſma huma ſó vez; e que eſte producto multiplicado pela meſma grandeza, gèra a terceira potencia; e eſta multiplicada pela meſma grandeza, produz a quarta potencia; e aſſim das mais; agora trataremos de conhecer as raizes, de que foraõ produzidas eſſas potencias.

20 A reſoluçaõ das potencias conſiſte em ſaber tirar as ſuas raizes, *id eſt*, ſaber, quaes ſaõ aquellas grandezas, que a produziraõ, como BB he hum producto, e queremos achar qual he a ſua raiz; eſta operaçaõ

raçaõ na Algebra he facilissima, quando os productos saõ potencias perfeitas; e assim a raiz de BB, he B, e a de BBB, he B; e assim das mais potencias; porém por numeros, necessita de certas regras, como tambem as necessita na Algebra, quando os productos constaõ de diferentes letras nos productos parciaes.

21 Como nesta obra suppomos, que os que se aplicaõ a ella sabem já a Arithmetica ordinaria, ou mercantil, e nas taes escolas, senaõ ensina a extracçaõ das raizes, daremos aqui as regras, com que se devem tirar de qualquer numero dado, tanto à raiz quadrada, como à cubica, e das mais, a que pode sobir qualquer grandeza.

CAPITULO VI.

Do modo de tirar a raiz quadrada a qualquer numero dado.

22 QUando o numero dado tem a raiz, que se expressa por hum só caracter, he facil de saber; porque logo se vê, que 2 he raiz quadrada de 4, que 3 he raiz quadrada de 9; mas isto mesmo nos serve, para por meyo destas raizes simples podermos vir no conhecimento das raizes dos numeros mayores, e mais compostos; e assim devemos ter sempre presente na memoria a taboada seguinte de todos os caractéres simples, de 1 até 10.

Raizes	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
quadrado	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.

PRO-

PROPOSIC,AM I.

23 TOdo o numero quadrado, como este, 293764, feito de 542, multiplicados por 542, ou por si mesmo, contèm:

Em primeiro lugar, os quadrados das suas partes, 5, 4, 2.

Em segundo lugar, duas vezes o plano de 5 multiplicado por 4.

Em terceiro lugar, duas vezes o plano de 54 por 2.

Isto se percebe claramente, multiplicando 542 por si mesmo, e examinando os productos parciaes; e para mais claramente se perceber, faremos esta operaçaõ, primeiramente por letras do ABC, suppondo $5 = B$, $4 = C$, e $2 = D$; e quadrando esta grandeza composta $B + C + D$ por si mesma, acharemos, que o quadrado desta raiz he $BB + CC + DD + 2BC + 2CD + 2BD$; onde se vê, que este quadrado contém os tres quadrados das suas tres partes B, C, D, e além disso, tem duas vezes o plano de B por C, + 2 planos 2CD, e 2BD.

PROPOSIC,AM II.

24 TIrar a raiz quadrada de 293764; para o que devemos separar os caractéres de dous em dous, começando da parte das unidades, como aqui parece figurado.

29.	37.	64.
C.	B.	A.

Em primeiro lugar, o quadrado do primeiro caracter da raiz, se elle se póde expressar por hum só caracter, está na primeira divisaõ A, começando da direita para a esquerda.

Em ſegundo lugar, o quadrado do ſegundo caracter eſtá no primeiro lugar da ſegunda diviſaõ B, ſe elle ſe póde expreſſar por hum ſó caracter.

Se queremos conhecer a verdade deſta propoſiçaõ, a reſpeito do numero quadrado dado 293764, naõ temos mais, do que multiplicar 542 por ſi meſmo, e veremos, que 5,4,2, ſe achaõ onde os notamos, e quem fizer a operaçaõ terá o goſto de reconhecer por ſi meſmo eſta verdade. O quadrado de 2, que he 4, ſe achará na primeira diviſaõ, ſeguindo as regras; e o quadrado de 4, que he 16, ſe achará na ſegunda diviſaõ B, que pede 2 caractéres; e o quadrado de 5, que he 25, ſe acharà na terceira diviſaõ C.

PROPOSIC,AM III.

25 HUm numero quadrado tal, que o acima dito, partido em tres diviſoens.

Em primeiro lugar, o plano feito do dobro de 5 multiplicado por 4, eſtá no primeiro lugar da diviſaõ C, e do primeiro lugar da diviſaõ B.

Em ſegundo lugar, o plano feito do dobro de 54 multiplicado por dous, eſtá entre o primeiro lugar da diviſaõ B, e o primeiro lugar da diviſaõ A; porque o numero quadrado propoſto contém eſſes dous planos.

PROPOSIC,AM IV.

26 SE houveſſe quatro caractères na raiz, o primeiro quadrado, e o ſegundo, começando da direita para a eſquerda, conteria hum plano feito do dobro das raizes dos tres quadrados ſeguintes, multiplicados pela raiz do primeiro quadrado.

O que fica dito, baſta para perceber a verda-

de

de da propoſiçaõ, e de todas as outras, que ſe pódem fazer de mayor numero de caractéres.

PROPOSICAM V.

REGRA I.

27 DEve-ſe dividir o numero dado, como fica dito, em tantas diviſoens, quantas forem neceſſarias; e todas as diviſoens devem conſtar de dous caractéres, menos a ultima A, que póde conſtar de hum ſó caractér, quando os caractères do numero da raiz ſaõ impares; por eſta regra conheceremos, que na raiz buſcada haverá tantos caractéres, quantas forem as diviſoens.

REGRA II.

28 DEve-ſe tirar a raiz quadrada do numero, que ſe acha na ultima diviſaõ, ſe eſſe numero he quadrado, e ſe elle naõ he quadrado, ſe tirará do quadrado mais vizinho. Eſta raiz ſerà o ultimo caractér da raiz buſcada, ainda que he o primeiro no modo de contar da eſquerda para a direita; e a razaõ de ſe chamar o ultimo he, por ſer contheudo na ultima diviſaõ.

Como eſta diviſaõ ultima he 29, tiro-lhe a ſua raiz, que he 5, e ponho 5 no lugar da raiz, como ſe vê figurado.

29, 37, 64, | 5

REGRA III.

29 DEvemos tirar o quadrado de 5, que he 25 da ultima diviſaõ, e ficaõ 4.

RE-

REGRA IV.

DEvemos dobrar o caracter achado da raiz, e colocar esse duplo, de sórte, que o seu primeiro caracter seja debaixo do caracter da divisaõ precedente, e devemos dividir o numero, que fica por cima; o quociente desta divisaõ serà o caracter, que se segue da raiz buscada, como se vê figurado:

29,	37,	64	54
4	37		
1	04		

Note-se, que tirando o quadrado 25 de 29 sobejáraõ 4, que puzemos por baixo de 29, e ajuntàmos a 4 a divisaõ seguinte, e dobrando a raiz 5 pelo seu duplo, dividimos o numero, que lhe ficava por cima, que eraõ 43, deixando hum lugar vasio da parte das unidades, para lhe pôr o segundo caracter da raiz achada.

REGRA V.

30 DEvemos multiplicar a raiz achada 4 por si mesma no lugar vazío, em que foy posta, e os mais caractères, que se lhe seguem, e o plano desta multiplicaçaõ, se deve tirar do numero sobreposto, como se vê figurado:

29,	37,	64	54
4	37		
1	04		
0	21		

Ao resto 21 se deve ajuntar á primeira divisaõ 64.

RE-

REGRA VI.

31 DEve-ſe dobrar toda a raiz achada 54, e ao reſto da operaçaõ antecedente ſe deve ajuntar de modo, que fique livre o lugar das unidades, e ſervirá eſte duplo da raiz, de diviſor do numero ſobrepoſto, cujo quociente ſerá o caracter, que ſe ſegue para a raiz buſcada, como ſe vê figurado:

```
29,37,64  | 542
 4 37
  1 04
 0 2164
   1082
```

Poſta a raiz achada no ſeu lugar, e juutamente no lugar vazìo das unidades, a raiz ſe deve multiplicar por ſi meſma, e pelos caractéres antecedentes, e o plano, ou producto, ſe deve tirar do numero ſobrepoſto, e naõ havendo reſto, conheceremos, que eſtá bem feita a operaçaõ, como ſe vê figurado:

```
29,37,64  | 542
 4 37
 1 04
 0 2164
   1082
   0000
```

SEGUNDO EXEMPLO.

TIrar a raiz quadrada do numero 71824

Primeiramente dividiremos os caractères de dous em dous, como fica dito, principiando da parte das unidades, e da ultima divisaõ tiraremos a raiz quadrada, que notaremos em hum lugar separado, a saber, a raiz quadrada mais proxima de 7 he 2, e o seu quadrado tiraremos da mesma divisaõ 7, e ficaõ 3 de resto, aos quaes ajuntaremos a divisaõ seguinte 18, como se vê figurado.

$$\begin{array}{l|l} 7,18,24 & 2 \\ 3\;18 & \end{array}$$

Deve-se dobrar a raiz achada 2, e o seu duplo, notaremos por baixo do resto da operaçaõ antecedente, e da divisaõ accrescentada 318, ficando livre o lugar da unidade, e servirá este duplo 4 de divisor ao numero sobreposto, cujo quociente será o segundo caracter da raiz, como se vê figurado:

$$\begin{array}{l|l} 7,18,24 & 26 \\ 3\;18 & \\ \;\;46 & \end{array}$$

Este segundo caracter da raiz, que he 6, multiplicaremos por si mesmo no lugar vazio das unidades, e pelos mais numeros antecedentes, e este plano tiraremos do numero sobreposto, e ao resto ajuntaremos a divisaõ, que se segue, como se vê figurado:

$$\begin{array}{l|l} 7,18,24 & 26 \\ 3\;18 & \\ \;\;46 & \\ \hline 0\,4224 & \end{array}$$

Junta a divisaõ, dobraremos toda a raiz achada, e o seu duplo escreveremos debaixo do resto antecedente, e divisaõ ajuntada, ficando livre o lugar das unidades, e este duplo servirá de divisor ao numero sobreposto, e o seu quociente será o terceiro cara-

ctec

ćter da raiz, e eſte meſmo quociente 8, multiplicaremos por ſi meſmo no lugar vazío das unidades, e por todos os numeros antecedentes, e eſte plano tiraremos do numero ſobrepoſto, e naõ reſtando nada, diremos eſtar a operaçaõ bem feita, como ſe vê figurado.

```
   ,  ,
7,18,24  |268
3 18
  46
--------
0 4224
   528
--------
  0000
```

C A P I T U L O VII.

Do modo de tirar a raiz cubica.

QUando o numero he pequeno nos caraćtéres do algarithmo, ou na Algebra, as potencias ſaõ perfeitas, e he muy facil tirar a raiz; porèm nos numeros grandes he neceſſario fazer a operaçaõ por partes; para cujo effeito, ſe deve decorar a taboada ſeguinte.

Raizes	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Cubos.	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000.

Para ſabermos mais claramente as partes, do que ſe compoem qualquer numero cubico, uſaremos dos caraćtéres da Algebra; porque tem á viſta os cubos, e ſolidos, de que ſe compoem qualquer grandeza cubica; e aſſim multiplicando B + C cubicamente veremos, que eſta grandeza he B^3 + 2 B B C + C C B + B B C + 2 C C B + C^3: ou, B B B + 3 B B C + 3 C C B + C C C; e aſſim ve-
mos,

mos, que contèm esta grandeza os dous cubos das partes B, e C, e dous solidos, dos quaes o primeiro 3 B B C he feito do triplo do quadrado de B multiplicado por C, e o segundo 3 C C B, he feito do quadrado de C multiplicado por B.

Se a grandeza fosse composta de mais letras, como de B + C + D, em fazendo a operaçaõ Algebraica, veremos claramente as partes, de que se compoem; mas agora entramos a tirar a raiz cubica, expressada por numeros do algarithmo.

PROPOSIÇAM I.

HUm numero cubico, como este, 160103007, feito da raiz 543, contèm primeiramente os tres cubos de cada hum dos caractéres da sua raiz, e quatro solidos, dos quaes o primeiro he feito do triplo do quadrado de 5, multiplicado pelo quadrado de 4, e o segundo he feito do triplo de 5, multiplicado por 4, o terceiro he feito do triplo do quadrado de 54, multiplicado por 3, e o quarto he feito do triplo 54, multiplicado pelo quadrado de 3. Este exemplo de mayor numero de letras, he para se naõ embaraçarem os principiantes com o que fica dito, que contèm os dous cubos das ditas partes, e dous solidos feitos, como fica dito; e he só o que bastava para numeros menores, e de poucas divisoens.

PROPOSIÇAM II.

DIvidindo o numero cubico 160, 103, 007 com os caractères de tres em tres, notaremos a primeira divisaõ da parte das unidades; a primeira com a letra A, a se-a segunda com a letra B, e a terceira com a letra C.

160,103,007 |
C, B, A,

Em primeiro lugar, o cubo de 5 he no primeiro lugar da letra C, e nos lugares, que se lhe seguem na divisaõ C; porque esse cubo, naõ se póde expressar com menos de 3 caractéres.

Em segundo lugar, o cubo de 4 está no primeiro lugar da divisaõ B, e nos caractères seguintes.

Em terceiro lugar, o cubo de 3 está no primeiro lugar da divisaõ A, em parte, que senaõ póde expressar com menos de 2 caractères.

Esta proposiçaõ se prova pela operaçaõ, multiplicando a raiz 543 cubicamente, e notando os productos parciaes.

PROPOSIC, AM III.

OS dous primeiros solidos, hum feito do triplo do quadrado de 5 multiplicado por 4, o outro feito do triplo de 5, multiplicado pelo quadrado de 4, se achaõ entre a divisaõ C, e a divisaõ B, e os outros dous, a saber, do triplo de 54 multiplicado por 3, e o outro feito do triplo de 54, multiplicado pelo quadrado de 3, se achaõ entre as divisoens B, e A; esta proposiçaõ he evidente pelos productos parciaes da operaçaõ.

PROPOSIC, AM IV.

SE a raiz de qualquer grandeza cubica tiver quatro caractères, entre o terceiro, e o quarto cubo, haverà dous solidos, ou o seu valor. O primeiro feito do triplo das 3 raizes ſeguintes, multiplicado pelo quadrado da primeira raiz. O ſegundo feito do triplo do quadrado das tres raizes ſeguintes, multiplicado pela primeira raiz.

A verdade deſta propoſiçaõ ſe moſtra, como a das antecedentes; e fica dado o methodo para qualquer numero de caractéres, de que ſe componha a raiz, que farà outras tantas diviſoens.

PROPOSIÇAM V.

ANtes de tirar a raiz cubica dos caractères do algarithmo, moſtraremos a extracçaõ das grandezas literaes, para ſervir de modelo.

Se a grandeza for incomplexa, nenhuma dificuldade tem, como já fica dito; porque a raiz cubica de b b b, ou b^3, he b; porém ſe eſta grandeza naõ tiver as dimençoens iguaes, para ſe poder expreſſar a ſua raiz, como, por exemplo, de b b d, ou de d d b, uſaremos do final radical, eſcrevendo $\sqrt[3]{bbd}$, $\sqrt[3]{ddb}$.

Para tirar a raiz da grandeza $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, tiraremos primeiramente a raiz de a^3, que he a que poremos no lugar da raiz, e tirando a^3 de a^3 naõ fica nada; mas como entre o cubo a^3, e o cubo ſeguinte, ha hum ſolido, feito do triplo de a a, multiplicado pela raiz do cubo ſeguinte, divido 3 a a b por 3 a a, e o quociente b vay para o lugar da raiz com o final +, e multiplicando 3 a a por b, tiro o producto 3 a a b, e naõ fica nada; mas como ainda entre o cubo de a, e o cubo de b, ha hum ſegundo ſolido feito, de 3 a, multiplicado por b b, diminuindo eſſe ſolido, naõ fica nada.

Para ſenaõ embaraçar, he neceſſario dar attençaõ às regras propoſtas, e capacitarſe nellas; porque huma vez bem comprehendidas, fica facil ſaber o de que he composta qualquer grandeza quadrada, cubica, e de qualquer outra potencia, do cubo para cima.

PROPOSIC, AM VI.

QUerendo passar a tirar a raiz cubica dos caractéres do algarithmo do numero proposto 160103007, observaremos as regras seguintes.

REGRA I.

DEve-se dividir o numero dado em tantas divisoens, quantos forem os caractères tomados de tres em tres, começando da parte das unidades, e cada divisaõ constará de tres caractères, menos a ultima, que poderá ser de dous, ou de hum sómente.

REGRA II.

TIraremos a raiz cubica do numero da ultima divisaõ, e naõ sendo a ultima divisaõ numero cubico, se tirará do cubo mais proximamente menor, como aqui; tirando a raiz cubica de 160, que he a proxima menor 125, ponho a raiz 5 no seu lugar, e diminuindo 125 de 160, deixa de resto 35, como aqui parece figurado:

35 103 007 | 5

REGRA III.

AO resto 35 se deve ajuntar a divisaõ seguinte, e triplicando o quadrado do caracter achado, se deve escrever por baixo, deixando livre dous caractéres da divisaõ accrescentada, como parece figurado:

35 103 007 | 5
7 5

RE-

REGRA IV.

DEve-ſe dividir o numero ſobrepoſto 351 pelo triplo do quadrado 75, e dá 4 no quociente, para ſegundo caracter da raiz, e diminuindo o ſolido feito de 75, multiplicado por 4, o reſto he 51, ou 5103007, que para evitar confuſaõ, ſe poderaõ pôr á parte.

35 103 007 | 15
75

REGRA V.

DEve-ſe tomar o quadrado do ſegundo caracter achado, e depois de o multiplicar pelo triplo do primeiro, ſe deve tirar eſſe producto, tanto dos numeros, que reſtaõ da ultima diviſaõ, como da precedente, e àlem diſſo ſe deve tirar o cubo, que he o que alli ſe contèm.

Segundo eſta regra, o quadrado de 4, que he 16, ſe multiplicará por 15, triplo de 5, que faz 240, que tirados de 510, reſtaõ 270; e aſſim de hum meſmo lugar ſe tiraõ dous ſolidos: o primeiro feito do triplo do quadrado de 5, multiplicado por 4; e o ſegundo feito do quadrado de 4, multiplicado pelo triplo de 5; e he neceſſario tirar mais o cubo de 4, que he 64; mas porque he compoſto de dous caractéres, deve eſtar nos dous ultimos caractères da ſegunda diviſaõ, a ſaber, 03, e tirando os 64 de 2703, o reſto he 2639007, como eſtá figurado:

5 103 007 | 54

RE-

REGRA VI.

EM havendo mais que duas diviſoens, como no caſo preſente, ſe deve tomar o quadrado das duas primeiras raizes achadas, e depois de o triplicar, ſe deve pôr, de ſórte debaixo do reſto, e da ultima diviſaõ accreſcentada, que fiquem livres os dous caractéres da diviſaõ accreſcentada, e dividindo o numero ſobrepoſto por eſſe triplo 8748, o quociente dará a raiz buſcada 3, que ſe porá em ſeu lugar, como ſe vê figurado:

03 007 | 54

Iſto feito, he neceſſario diminuir o cubo de 4, que he 64, mas naõ no lugar em que eſtá; porque como ſe expreſſa por dous caractéres, he contheudo ao menos em parte nos dous caractéres da ſegunda diviſaõ, a ſaber, 03, e tirando 64 de 2703, reſta

2 639 007 | 543

REGRA VII.

DEve-ſe multiplicar pelo caracter ultimo achado o quadrado dos dous caractéres antecedentes, e o producto 26244, ſe deve diminuir de 26390, e o reſto ſerá 14607.

14 607

Pela meſma regra tomaremos o quadrado de 3, que he 9, e o multiplicaremos pelo triplo de 54, e tirando eſte producto 1458 de 14607, o reſto he 27; e como tambem devemos tirar o cubo de 3, que he 27, tirados 27 de 27, reſta cifra; e aſſim 543 he juſtamente a raiz de 160103007: a prova deſta operaçaõ ſe fará manifeſta, multiplicando cubicamente os 543 achados.

ADVERTENCIA.

O Exemplo a cima, baſta para ſe tirar a raiz cubica de qualquer numero de diviſoens; porque todas as operaçoens, que ſe ſeguem á primeira ſe fazem da meſma ſòrte, e ſómente, quando jà ſaõ achadas duas raizes, ſe tomaõ em ſoma, como ſe foſſe huma ſó, ou hum ſó caracter; e ſe forem tres, ou quatro as raizes parciaes achadas, para continuar a buſcar a quarta, ou quinta, ſe tomaráõ em ſoma; e porque ſuccede haver algum reſto; porque nem todos os numeros ſaõ perfeitamente quadrados, ou cubos, para ſaber o ſeu valor, ſe porá o reſto por cima, em fórma de quebrado, e por baixo, o dobro da raiz achada, e mais 1 na raiz quadrada, e na cubica, o reſto por cima, e por baixo o triplo da raiz achada, e o triplo do ſeu quadrado, e mais 1.

Modo de tirar as raizes quadradas, e cubicas das grandezas literaes.

PAra tirar a raiz quadrada de $aa - 2ab + bb$, tiraremos a raiz de aa, que he a, e ſe porá no lugar da raiz, e tirando o quadrado aa da grandeza dada, fica de reſto $-2ab + bb$; e dobrando a raiz, pelo ſeu dobro $+2a$, dividiremos o reſto $2ab + bb$, e darà no quociente $-b$, que poremos no lugar da raiz com o ſeu ſinal, e ajuntando ao diviſor $-b$, teremos $+2a - b$, que multiplicados por $-b$ daõ no producto $-2ab + bb$, que diminuidos de $-2ab + bb$, naõ fica nada; e aſſim a raiz buſcada he $a - b$. A prova he, multiplicar eſta raiz por ſi meſma, e o producto ſerà $aa -$

2ab✱bb, que he a grandeza, de que queriamos tirar a raiz.

Quando ſe naõ póde tirar realmente a raiz quadrada, ou cubica, ſe lhe deve ajuntar o ſinal radical, que he eſte $\sqrt{}$, e com hum 2 por cima $\sqrt[2]{}$, ſignifica raiz quadrada; e com hum 3 por cima, deſta ſórte $\sqrt[3]{}$, ſignifica raiz cubica.

Para tirar a raiz cubica da grandeza algebraica: a^3 ✱ 3aab ✱ 3bba ✱ b^3: devemos principiar por tirar a raiz do primeiro membro a^3, que he a, e ſe porá no lugar da raiz, e logo tirar o cubo de a da quantidade dada, e logo quadraremos a, e triplicaremos eſſe quadrado, para ter 3aa, para ſer diviſor de 3aab, deſta ſórte $\frac{3aab}{3aa}$, e feita a diviſaõ, dá no quociente ✱ b, e multiplicando eſte quociente pelo diviſor, tiraremos o ſeu producto 3aab da grandeza dada, e quadraremos tambem b, e multiplicaremos o ſeu quadrado pelo primeiro caracter a, e triplicando o producto bba, teremos 3bba, que diminuiremos da grandeza dada: finalmente cubicaremos b, que diminuido de b^3, naõ fica nada; e aſſim a✱b he a raiz buſcada.

Alguns coſtumaõ dar regras para tirar as raizes das mais potencias; o que he deſneceſſario; porque raras vezes ſuccede ter uſo, e ſe póde ſuprir por meyo dos logarithmos; e nós neſta Logica, damos o que baſte, para os que naõ quizerem fazer profiſſaõ da Algebra; porém gaſtaràõ toda a vida, e lhes ficarà mais por ſaber, do que tiverem ſabido, ainda que vivaõ duzentos annos.

O que até aqui temos eſcrito para a extracçaõ da raiz cubica, era preciſo para a eſpeculaçaõ, para ſabermos, o que ſe contèm nas grandezas quadradas, ou cubicas; porèm para a pratica daremos hum modo de tirar as raizes cubicas, igualmente certo, e muito mais

mais abreviado; porque por huma meſma operaçaõ, ſem multiplicar as letras, as ſomamos, e diminuimos, como ſe verá no exemplo ſeguinte.

Exemplo abreviado para tirar a raiz cubica dos numeros do algarithmo.

SEja o numero dado, de que ſe quer tirar a raiz, 160103007.

Devem-ſe dividir os caractéres de tres em tres, começando da direita do papel para a eſquerda, oũ da parte das unidades, como aqui eſtà figurado:

160 103 007

Tiraremos a raiz cubica da ultima diviſaõ, que aqui he de tres letras, e poderia ſó ſer de duas, ou de huma ſó letra (como fica dito.)

Veremos na taboada, que a raiz mais proxima de 160, ſaõ 5, que ſe poràõ no lugar da raiz.

160 103 007 | 5

E tirando de 160 o cubo da raiz 5, o reſto he 35, e a eſtes ſe ajuntarà a diviviſaõ ſeguinte, que he 103, como ſe vê figurado:

160 103 007 | 5
125
035 103

Para achar a ſegunda raiz, tomaremos o triplo do quadrado da primeira raiz achada, que he 75, para diviſor de 351, e dà no quociente 4, que multiplicados pelos 75, e diminuidos do numero ſobrepoſto

351,

351, fica 51 de reſto, ao qual ſe ajunta 03 da ſegunda diviſaõ, e fica 5103, do qual ſe deve tirar o ſolido, feito do quadrado da ſegunda raiz achada, multiplicado pelo triplo da primeira, que faz 240, e mais o cubo da ultima, que he 64, o qual ſe deve pôr de modo, que a dezena correſponda à unidade de 240, iſto he, os 6 debaixo da cifra, e ſomando eſtas duas addicçoens 240, e 64, do modo, que ſe mandou diſpôr, daràõ no producto 2464, o qual ſe deve diminuir de 5103, e fica de reſto 2639, como ſe vê figurado:

```
160 103 007 | 54
125
 35 103
  75
  5103
  240
    64
 ------
  2464
  2639
```

Para achar a terceira raiz, devemos accreſcentar ao reſto 2639, que ficou da ſegunda diviſaõ a ultima, iſto he, 007, e quadraremos 54, e depois triplicar o quadrado, que faz 8748, que fica ſendo diviſor do numero 26390, e dá no quociente 3, que ſe poràõ no lugar das raizes, multiplicados pelos 8748, e diminuidos de 26390 fica 146 de reſto, ao qual ſe ajunta 07 da ultima diviſaõ, e fica 2639007, do qual ſe deve tirar o ſolido, feito do triplo do quadrado deſta ultima raiz achada, iſto he, 27 multiplicados pelas duas raizes antecedentes, a ſaber, por 54, que faz 1458, e mais o cubo da ultima raiz 3, que he 27, poſto do modo, que fica dito na operaçaõ ſegunda, iſto he, que o numero 2, dezena de 27, correſponda a 8, unidade do numero ſobrepoſto 1458, e a ſoma deſtas duas addicçoens 1458, e 27, que he 14607, ſe deve diminuir de 14607, iſto he, do reſto 146, accreſcentado dos caractéres 07 da ultima diviſaõ, como já fica dito, ſe deve accreſcentar, e ſe achará naõ ficar nada, pelo numero dado ſer cubo perſeito, e ſe vê abaixo figurado:

```
160 103 007 | 1543
125
 35 103
  75
 ------
  5103
  240
    64
 ------
  2464
  2639007
   8748
   014607
    1458
      27
   ------
    14607
   ------
    00000
```

Eſta operaçaõ ſe vê, ſe eſtà certa, multiplicando a raiz por ſi meſma, e depois tornando a multiplicar eſte producto, que he o quadrado, pela meſma raiz dà o cubo, como jà fica explicado; e ſe o numero dado naõ foſſe cubo perſeito, ſe devia accreſcentar o reſto a eſte producto, cuja ſoma ſeria igual ao numero dado.

LOGI-

LOGICA ANALITICA, LIVRO III.

DAS RAZOENS EM GERAL.

CAPITULO I

Que cousa seja Razaõ.

1 ATE' aqui considerámos as grandezas em si mesmas, sem as comparar humas com as outras, e ver o que ellas saõ humas, a respeito de outras: agora devemos considerar as mesmas grandezas comparadas entre si, a saber, que partes saõ humas de outras, como, por exemplo, o quanto huma he menor, que outra.

De dous differentes modos se pódem comparar quaesquer duas grandezas, ou segundo o excesso, que huma tem sobre outra, ou segundo a parte, que huma he de outra, como, se he o seu terço, o seu quarto, &c.

As par-

As partes de qualquer grandeza, que repetidas hum certo numero de vezes, igualaõ ao todo, de que saõ partes, se chamaõ partes *aliquotas*; e as que repetidas, o excedem se chamaõ partes *aliquantas*, como fica dito. O numero 3, a respeito do numero 30, se chama parte *aliquota*; porque repetida dez vezes iguala ao seu todo, que he 30.

O mesmo numero 3, a respeito do numero 20, se chama parte *aliquanta*; porque repetida 7 vezes excede ao seu todo, e repetida 6 vezes, o naõ chega a inteirar.

Como toda a grandeza corporea he divisivel, de sórte, que se póde proceder indefinitamente, se tomarmos qualquer grandeza, como 1, e o dividirmos pelo meyo, teremos metade da sua grandeza, ou valor; e se outra vez dividirmos esta metade, teremos hum quarto, e continuando a divisaõ sempre pelo meyo, teremos, $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$; e assim indefinitamente, sem nunca se esgotarem as partes; e este genero de divisaõ, como naõ he nem em partes aliquotas, nem em partes aliquantas, chamaõ a estas partes *proporcionaes* sempre menores, e menores, &c.

Mas aqui o primeiro modo de comparar he, considerando o excesso, que huma grandeza tem sobre outra, com quem se compara, e se chama *diferença*, como comparando 7 com 5, o excesso, ou a diferença he 2.

O outro modo he, considerando a ordem, ou o respeito, que huma grandeza diz a outra, isto he o que chamaõ *razaõ*.

2 Esta palavra *razaõ*, naõ parece ter sido bem explicada dos Geometras, que dizem, que razaõ he o modo de conter, ou ser contheuda huma grandeza em outra, como, por exemplo, 6 contèm 3 vezes 2, e quan-

quando esta razaõ de 6 para 2, se compara com outra razaõ, como de 12 para 4, se diz, que estas duas razoens saõ iguaes; e como huma razaõ póde ser tambem mayor, ou menor, que outra, e que se póde dividir huma por outra, bem se vê claramente, que às razoens convem as propriedades da grandeza, pois que as razoens pódem, como as grandezas crescer, e diminuir; e assim parece se naõ explica bem a sua natureza, só com dizer, que he hum modo de conter, ou ser contheudo, e nesta consideraçaõ achou hum Author moderno, que a razaõ he huma grandeza, ou quantidade, naõ absoluta, mas respectiva, e que por ser quantidade deste genero podemos com as razoens obrar, ou fazer todas as operaçoens, que se fazem com as grandezas absolutas: dizemos, que he grandeza, ou quantidade respectiva pela ordem, que huma razaõ diz a outra; e quando duas razoens se comparaõ huma com outra, o que da comparaçaõ resulta, se chama *proporçaõ*.

3 Nada nos dá melhor idéa das razoens, do que os quebrados da Arithmetica; porque os numeros inteiros representaõ as grandezas absolutas, e os quebrados as grandezas respectivas, por exemplo, se tres quebrados tiverem hum mesmo numerador, naõ sabemos sem o denominador, o que quer dizer o numero, por exemplo, 2; porém se lhe ajuntarmos os denominadores, saberemos a razaõ, que tem 2, por exemplo, para 3, para 4, e para 5, &c. $\frac{2}{3}\frac{2}{4}\frac{2}{5}$, &c.

4 Como a razaõ, pelo que fica dito, he huma quantidade relativa, fica claro, que tudo o que convèm á quantidade, ou grandeza em geral, convém tambem ás razoens, como adiante veremos.

5 He necessario advertir, que as quantidades, que se comparaõ humas com outras, devem ser do mesmo genero, e determinadas, a saber, linha com linha, superfice com superfice; porque naõ póde cahir a comparaçaõ em cousa de diferente genero. Tambem se requer, que a comparaçaõ se naõ conforme à qualidade das grandezas; mas sómente á sua quantidade, porque naõ póde haver comparaçaõ homogenea entre quente, e frio, branco, e negro, &c.

6 A proporçaõ, como fica dito, consiste na comparaçaõ de duas, ou mais razoens; porque assim como comparamos duas quantidades absolutas, podemos comparar duas razoens, por exemplo, a razaõ de A para B, com a razaõ de C para D, e supondo, que A vale 12, e B vale 4, que C vale 6, e D vale 2, vemos, que a razaõ, que tem 12 para 4, que he a sua terça parte, tem 6 para 2, que he tambem a sua terça parte; e nesta quantidade respectiva consiste o que os Geometras chamaõ *razaõ*, e naõ se diga, que esta definiçaõ da razaõ naõ comprehende a razaõ arithmetica, que consiste no excesso, ou defeito de huma grandeza comparada com outra; porque a diferença de duas grandezas naõ he propriamente razaõ, nem os Geometras fazem grande caso della; e em todos os seus escritos sempre se entende a razaõ, e a proporçaõ Geometrica, e naõ a Arithmetica, ainda que esta tenha algumas propriedades, como ao diante diremos.

CA-

CAPITULO II.

De algumas definiçoens.

DEFINIÇAM I.

7 A Razaõ Geometrica he, (como já fica dito Parte 2. num. 29) a quantidade relativa entre duas grandezas comparadas huma com outra , ſegundo a quantidade de huma, a reſpeito de outra , conſiderando , que partes ſaõ humas , a reſpeito de outras; e neſta quantidade ſe vê o como huma contém, ou he contheuda na outra.

8 Toda a comparaçaõ tem dous termos: o primeiro ſe chama *antecedente* , e o ſegundo *conſequente*, e a razaõ de hum termo para outro ſe chama *racional*, quando ſe póde expreſſar por numeros , como a que ſe acha entre quantidades comenſuraveis; quando eſta razaõ ſe naõ póde explicar por numeros, ſe chama *irracional.*

9 A razaõ ſe divide tambem em razaõ de igualdade, que he quando ſaõ iguaes o antecedente, e o conſequente, como A igual A, 4 igual 4, &c.

10 Chama-ſe razaõ de mayor deſigualdade, quando o antecedente he mayor , que o conſequente, e pelo contrario de menor deſigualdade, quando he menor o antecedente.

11 He neceſſario bem advertir na diferença, que ha entre igualdade de razaõ , e razaõ de igualdade.

12 Duas grandezas ſe dizem terem razaõ de igualdade, quando ſaõ entre ſi iguaes, como a razaõ, que ha entre B, e B, e entre C, e C; e igualdade de razaõ he, quando as grandezas, ainda que deſiguaes, tem a meſma razaõ entre ſi, a ſaber, ſaõ iguaes partes dos ſeus todos, como, quando comparo 6 com 2, e 12 com 4, eſta comparaçaõ ſe chama *igualdade de razaõ*; porque 2 he igual parte de 6, como 4 igual parte de 12.

13 Alguns Geometras, eſcuſadamente ſe cançaõ em buſcar varios nomes ás razoens, ſegundo a diverſidade dos modos, com que os antecedentes contém, ou ſaõ contheudos dos conſequentes, como razaõ ſuperparticular, ſuperparciente, &c. mas como as razoens ſaõ infinitas, ſeria neceſſario excujitar infinitos nomes; o que parece abſurdo; e he mais facil, e mais claro dizer, que duas grandezas tem a razaõ de 9, por exemplo, para 15, ou de 30 para 47, do que buſcarlhe nomes extraordinarios, que ſó ſerviriaõ para fatigar a memoria.

DEFINIC,AM II.

14 RAzaõ compoſta, he huma razaõ Geometrica, em que os termos ſaõ productos, o primeiro dos antecedentes, o ſegundo dos conſequentes de outras razoens Geometricas; ou mais claramente, a razaõ compoſta, ou a compoſiçaõ das razoens, conſiſte na multiplicaçaõ; e aſſim a razaõ, que naſceo da multiplicaçaõ de duas, ou de mais razoens, ſe diz compoſta deſſas meſmas razoens; e ſegundo o que fica dito da multiplicaçaõ, accreſcentando os termos de razaõ componente, e razaõ compoſta, acharemos, que huma razaõ he compoſta de duas razoens,

quan-

quando a razaõ de igualdade he para huma das componentes, como a outra componente, he para a razaõ compoſta; de que ſe ſegue eſta

PROPOSIÇAM GERAL.

15 A Razaõ, que tem por antecedente o producto de todos os antecedentes de muitas razoens, e por conſequente, o producto de todos os conſequentes, he compoſta de todas eſſas razoens; e aſſim a razaõ de $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{E}$, $\frac{C}{F}$ he compoſta das tres razoens de A para D, de B para E, e de C para F.

16 Para prova baſta moſtrar, que a razaõ de igualdade de A para D, he a meſma, que de B para E; e pela multiplicaçaõ compoem as razoens de $\frac{A}{D}\frac{B}{E}$; e o que ſe moſtra deſtas duas primeiras razoens ſe moſtrará de todas as mais.

17 Deſta ſórte, a razaõ compoſta de 30 para 120, naſce das razoens componentes, de 3 para 4, de 2 para 5, e de 5 para 6; porque o ſeu antecedente 30, he compoſto dos 3 antecedentes 3, 2, 5, e o conſequente 120, he producto dos 3 conſequentes 4, 5, 6: de que ſe manifeſta, que as razoens ſe multiplicaõ, quando ſe multiplicaõ os ſeus expoentes; e aſſim vale o meſmo multiplicar os antecedentes pelos antecedentes, e os conſequentes pelos conſequentes, do que multiplicar os expoentes deſſas meſmas razoens; e porque o expoente de 3 para 4 he $\frac{3}{4}$, e o de 2 para 5 $\frac{2}{5}$, e o de 5 para 6 $\frac{5}{6}$; ſe multiplicarmos eſtes expoentes, a ſaber, os antecedentes 3, 2, e 5, o producto he 30, e os denominadores, ou conſequentes 4, 5, 6, produzem multiplicados 120.

18 Segue-ſe daqui, que o expoente de huma razaõ duplicada, a ſaber, compoſta de duas razoens iguaes, he hum numero quadrado, a ſaber, o quadrado do expoente commum das duas razoens: e o expoente de huma razaõ triplicada, compoſta de tres razoens iguaes, he hum numero cubico; e aſſim das mais razoens.

19 Em huma ſerie de quaeſquer quantidades, a razaõ da primeira para a ultima, he compoſta de todas as razoens intermedias, como da primeira para a ſegunda, da ſegunda para a terceira, da terceira para a quarta, &c. por quanto os expoentes deſſas razoens, ſendo multiplicados, produzem o expoente da primeira para a ultima.

20 Sejaõ as quantidades A, B, C, E, o expoente de A para B, he $\frac{A}{B}$, e o expoente de B para C, he $\frac{B}{C}$, o de C para E, he $\frac{C}{E}$, e multiplicãdo os antecedẽtes pelos antecedẽtes, e os conſequentes pelos conſequentes, os productos A B C, e B C E, teráõ razaõ compoſta de A para B, de B para C, e de C para E; e aſſim a razaõ compoſta reſulta de todas as razoens intermedias.

CAPITULO III.

Da Razaõ Arithmetica, e ſuas propriedades.

21 AInda que os Geometras uſaõ muy pouco das razoens Arithmeticas, moſtraremos aqui, em que ella conſiſte, que he na diferença, que huma grandeza tem da outra, como jà fica dito; mas porque eſta razaõ, ou diferença ſe

póde

póde comparar com outra, e fazer tal, ou qual proporçaõ, como, se compararmos a razaõ de 7 para 9, com a razaõ de 15 para 17, acharemos, que tem iguaes diferenças; e assim saràõ esta proporçaõ 7.9:: 15.17, e se sinalla assim, para distincçaõ da Geometrica, e segue-se esta propriedade, como a diante se dirá: que somados os termos do meyo, saõ iguaes à soma dos extremos; e he a principal propriedade da proporçaõ Arithmetica.

22 Se houver huma serie de grandezas, que procedaõ sempre com iguaes diferenças, se lhe dá o nome de progreçaõ Arithmetica, e como a diferença he sempre a mesma, se póde abreviar a sua expressaõ, como, se a progreçaõ for A, B, C, D, &c. e o segundo termo só tem mais, que o primeiro a diferença, e o terceiro a mesma diferença mais, que o segundo; se chamarmos á diferença, X, será o primeiro termo A, o segundo A + X, A + 2x, A + 3x, A + 4x, &c. de que se segue, que o ultimo termo comprehende o primeiro, e mais tantas vezes a diferença, quantos saõ os termos, que o precedem.

23 Algumas propriedades mais se pódem considerar; o que ommitimos, pelo pouco uso, que tem na Algebra, de que aqui tratamos; e da mesma sórte naõ fallamos da proporçaõ, chamada Armonica, e Contra-Armonica, que só tem uso na Musica.

CAPITU-

CAPITULO IV.

Das propriedades das Razoens, e Proporçoens Geometricas.

24 OS Geometras, fallando de razoens, e proporçoens, ſempre entendem fallar das Geometricas; porque, como fica dito, as razoens Arithmeticas, naõ ſaõ propriamente razoens; mas diferenças. Nas propoſiçoens ſeguintes moſtraremos as propriedades das razoens, e das proporçoens.

25 Na primeira parte deſta obra moſtrámos, que naõ podemos conhecer as couſas, ſem termos dellas idèas claras; porque das idèas, que dellas temos deduzimos as ſuas propriedades; e como a idèa, que temos da razaõ Geometrica, he ſer huma quantidade relativa, entre duas grandezas comparadas, ſegundo a quantidade, pela qual huma ſe diz igual, mayor, ou menor, que outra: de que ſe ſegue, que duas razoens ſaõ iguaes, quando huma grandeza he igual parte de outra grandeza, com que ſe compara: iſto ſe conhece, quando dividindo a grandeza, por exemplo, B por D, o quociente, ou expoente da diviſaõ, he igual ao quociente de outra grandeza F, dividida por G.

AXIOMA I.

26 AS razoens, que tem iguaes expoentes, ſaõ entre ſi iguaes.

AXIOMA II.

27 AS grandezas iguaes, ſó pódem ſer expoentes de razoens iguaes.

AXIO-

AXIOMA III.

28 SE a razaõ de B para D he a meſma, que a de F para G, a de D para B ſerá tambem a meſma, que a de G para F.

29 As letras do Alfabeto ſaõ os ſinaes de toda a ſórte de grandezas; e aſſim devemos uſar nas razoens, e proporçoens, ſeja qual for a razaõ, ou de numero a numero, ou ſurda; e aſſim chamaremos, por exemplo, B ao antecedente de huma razaõ, e D ao ſeu conſequente, e dividindo B por D, chamaremos ao quociente Q; e porque eſte multiplicado por B, produz huma grandeza igual a D, ſerá $QB = D$.

LEMMA.

O Mayor termo de huma razaõ he igual ao menor multiplicado pelo expoente da diviſaõ do mayor, pelo menor.

30 Seja B o mayor termo de huma razaõ, e D o menor: dividindo D por B, o quociente Q, multiplicado por D, he QD igual á grandeza B; e he o que ſe queria moſtrar.

COROLARIO.

31 DO que fica dito ſe ſegue, que poderemos expreſſar os termos de huma razaõ, chamando ſempre Q ao quociente, que reſulta do conſequente da razaõ, dividido pelo antecedente; e ſe eſſes termos ſaõ B, e D, podemos tomar QB em lugar de D; e aſſim poderey expreſſar todos os termos de huma progreçaõ; porque Q, he quociente de to-

dos; e assim poderey mudar esta progreçaõ.

$\div$ B, C, D, E, F, G, &c. nesta, que he a mesma.

$\div$ B, Q^b, Q^{2b}, Q^{3b}, Q^{4b}, Q^{5b}, &c. porque pelo lemma precedente $QB = C$, e multiplicando QB pelo quociente da razaõ de D, dividido por C, que he tambem Q, será $Q^{2b} = D$, e $Q^{3b} = E$, e $Q^{4b} = F$; e assim dos mais.

PROPOSIC,AM I.

Theorema

DUas grandezas saõ iguaes entre si, se ellas tem a mesma razaõ a huma terceira.

32 Seja B.G::B.F, a saber, que G, e F tem huma mesma razaõ para B: digo, que $G = F$; dividindo G por B, e F tambem por B: pois que a razaõ de B a G, e de B a F saõ iguaes, essas duas divisoens teráõ o mesmo expoente, ou o mesmo quociente (*axioma* 2.) chamo Q a esse quociente: logo, pelo lemma precedente $QB = G$, e tambem $QB = F$; e assim as grandezas, G, e F iguaes a huma mesma grandeza QB: logo saõ iguaes entre si; e he o que se queria demonstrar.

PROPOSIC,AM II.

Theorema

DUas razoens iguaes a huma terceira razaõ, saõ iguaes entre si.

33 A razaõ de B.D he igual á razaõ de X.Z, e a razaõ de F.G he tambem igual á de X.Z: logo, B.D::F.G, pelo (*num.* 26) o expoente da razaõ de

B.D

B.D he o meſmo, que a de X.Z; pois que eſſas duas razoens ſaõ ſuppoſtas iguaes, e ſe o quociente de B.D for Q, o de X a Z, ſerá tambem Q; e aſſim, pois que a razaõ de F para G, he igual à de X.Z, e que ambas tem o meſmo quociente Q: logo ſaõ iguaes as razoens de B.D, e de F.G; e he o que ſe queria demonſtrar.

PROPOSIÇAM III.

Theorema.

DUas grandezas conſervaõ entre ſi a meſma razaõ, ainda que ſe ajunte a huma, e a outra, outras quaeſquer grandezas, com condiçaõ, que o que ſe ajuntar à primeira tenha para o que ſe ajuntar á ſegunda a meſma razaõ, que tiver a primeira para a ſegunda.

34 Sejaõ dadas de huma parte as grandezas B, D, e da outra F, G; ſe ajuntar F a B, o que faz B+F, e G a D, o que faz G+D; e ſe B.D::F.G: digo, que B+F.B+G::B.D.

Seja Q o expoente da razaõ de B.D, que ſerá tambem o expoente da razaõ de F.G; pois que eſſas duas razoens ſaõ ſuppoſtas iguaes: logo, pelo (*numer.* 31.) podemos expreſſar eſſas 4 grandezas, B, D, F, G, reduzindo-as a eſtas B, QB, F, QF; e aſſim ajuntando F a B, e QF, a QB, moſtraremos, que B+F.QB+QF::B.D; porque dividindo o primeiro conſequente QB+QF, pelo primeiro antecedente B+F, o expoente deſta diviſaõ he Q, ſegundo o que temos enſinado no primeiro livro; mas pela hypotheſi, o expoente de D, dividido por B, he tambem Q: logo, pelo (*num.* 27.) a razaõ de B+F.QB+QF, ou de B+F.D+G, he igual à razaõ de B. D, De ; he o que ſe queria demonſtrar.

COROLARIO.

35 QUando duas razoens ſaõ iguaes, o antecedente de huma, e mais o ſeu conſequente, he para eſſe meſmo conſequente, como o antecedente da outra, mais o ſeu conſequente, he para o ſegundo conſequente. Iſto he, ſe B . D : : F . G, ſerá tambem B + D . D : : F + G . G.

PROPOSIÇAM IV.

Theorema.

DUas grandezas conſervaõ a meſma razaõ, ainda que ſe lhe diminuaõ outras quantidades, com condiçaõ, que o que ſe diminuir da primeira, tenha a meſma razaõ, para o que ſe diminuir da ſegunda, como a primeira para a ſegunda.

36 Seja B . D : : F . G, ſe tirarmos F de B, e G de D, devemos moſtrar, que B − F . D − G : : B . D: divida-ſe o conſequente D, pelo ſeu antecedente B, e ſeja Q o quociente da diviſaõ: divida-ſe G por F, e o quociente da diviſaõ ſerá o meſmo Q; pois que ſe ſuppoem as duas razoens iguaes: logo, pelo (*num.* 31.) podemos ſubſtituir QB, em lugar de D, e QF, em lugar de G; e aſſim moſtraremos, que B − F . QB − QF : : B . D: como ſe ſuppoz, que o quociente de D, dividido por B, era Q, e dividindo o conſequente QB − GF, pelo antecedente B − F, ſahe o meſmo quociente Q: logo, pelo (*num.* 27.) B − F . GB − QF : : B . D, ou B − F . D − G : : B . D.

CORO-

COROLARIO.

37 QUando duas razoens ſaõ iguaes, o primeiro antecedente, menos o primeiro conſequente, he para eſſe meſmo conſequente, como o ſegundo antecedente, menos o ſegundo conſequente, he para eſſe meſmo conſequente. Se B.D::F.G: logo, B−D.D::F−G.G.

PROPOSIÇAM. V.

Theorema.

SE quaeſquer duas grandezas ſe multiplicarem por huma terceira, conſervaõ a meſma razaõ, que tinhaõ, antes de ſerem multiplicadas.

38 Sejaõ as duas grandezas B, e D, multiplicadas por X: devemos moſtrar, que XB.XD::B.D: ſe dividirmos o conſequente D pelo antecedente B, ſendo o quociente da diviſaõ Q, ſerá QB=D; e aſſim tambem XQB=XD: devemos logo moſtrar, que XB.XQB::B.D; pela hypotheſi, o quociente de D dividido por B he Q, e dividindo o conſequente XQB pelo antecedente XB, o quociente da diviſaõ he tambem Q: logo, pelo (*num.* 27) as duas razoens propoſtas ſaõ iguaes; e aſſim XB.XQB:: B.D, ou XB.XD::B.D; e he o que ſe queria demonſtrar.

PROPOSIÇAM VI.

Theorema.

DIvidindo duas grandezas por huma terceira, os quocientes teráõ entre ſi a meſma razaõ, que tiverem eſſas grandezas.

39 Sejaõ as duas grandezas B, e D: ſe dividirmos B por X, ſeja P o quociente, e o de D dividido por X, ſeja Q: devemos moſtrar, P.Q::B.D: pelo (*numer.* 31.) PX=B, e QX=D: logo (*numer.* 38.) PX.QX::B.D; mas P, e Q foraõ multiplicados por X: logo (*num.* 38.) PX.QX::B.Q: logo as razoens de B.D, e de P.Q ſaõ iguaes a huma terceira razaõ, que he a de XP.XQ: logo (*numer.* 33.) P.Q::B.D; e he o que ſe queria demonſtrar.

CAPITULO V.

Das Proporçoens Geometricas, da regra de tres directa, e inverſa, de companhias, e falſa poſiçaõ.

40 O Que devemos propôr neſte capitulo, he hum modelo, de que nos havemos de ſervir, para podermos conhecer por meyo de algumas couſas ſabidas, as outras, que ignoramos, pela razaõ, que humas pódem ter com outras; e aſſim começamos pela primeira propoſiçaõ, moſtrando, que ſendo quatro grandezas proporcionaes, o producto dos dous extremos he igual ao producto dos meyos; porque he o fundamento de todas as demonſtraçoens das proporçoens Geometricas; e como ſeja muito importante de examinar attentamente as couſas, que naturalmente conhecemos, ſe deve notar, que eſta propoſiçaõ he a meſma couſa, que as duas, que ſe ſeguem: ſe de duas grandezas propoſtas ſe tomar a mais pequena, tantas vezes mais, quantas he menor, que a grandeza, ellas ſeráõ iguaes, ou multiplicando a mayor por hum multiplicador, tanto menor, quanto ella he mayor, os dous productos ſeráõ

ráõ iguaes, e a primeira proposiçaõ, que se segue naõ he diferente destas.

PROPOSIÇAM VII.

Theorema.

DE quatro grandezas em proporçaõ Geometrica, o producto dos extremos, he igual ao producto dos meyos.

41 Sejaõ as quatro grandezas B.D::F.G, de que B, e G saõ os extremos, e D, e F os meyos. Devemos mostrar, que BG=DF; se chamarmos Q ao quociente da razaõ de B.D, o quociente da razaõ de F.G será tambem Q: logo (*num.* 31.) podemos tomar QB, em lugar de D, e QF em lugar de Q; e assim mostraremos, que BQF=BQF; o que he evidente, pois se achaõ as mesmas grandezas de huma, e de outra parte.

OUTRA DEMONSTRAÇAM.

42 MUltiplicando os dous ultimos termos F, e G, pelo primeiro B, será, pelo (*numer.* 38.) BF.BG::F.G, e pela mesma proposiçaõ, ou (*num.* 38.) multiplicando BD por F, que he o segundo consequente, será BF.DF::B.D: e por consequencia BG, e DF, tendo a mesma razaõ com a terceira grandeza BF, esses dous productos seráõ iguaes, a saber, BF.BG::F.G, e BF.FD::B.D, donde se vê, que as duas grandezas BG, e FD, tem a mesma razaõ com a terceira BF; e he o que se queria demonstrar.

CORO-

COROLARIO.

43 TRes grandezas, ſendo em proporçaõ Geometrica, o quadrado do termo do meyo, he igual ao rectangulo feito dos dous extremos.

Sejaõ as grandezas ∺B, C, D: digo, que CC = BD; porque B.C::C.D: logo BD = CC.

PROPOSIÇAM VIII.

Theorema.

QUando quatro grandezas eſtaõ diſpoſtas, de ſórte, que o producto dos ſeus extremos, he igual ao producto dos meyos, eſſas grandezas ſaõ geometricamente proporcionaes.

44 Sejaõ as quatro grandezas B, D, F, G, ſendo FD producto dos meyos, e BG producto dos extremos, ſe multiplicarmos F, e G por B, ſerà (*numer.* 38.) BF.BG::F.G, e pela meſma razaõ, multiplicando B, e D por F, ſerá BF.DF::B.D; mas porque DF, e BG ſaõ dous productos, que tem a meſma razaõ ao terceiro BF:

$$BF\left(\begin{array}{l} FD::B.D \\ BG::F.G \end{array}\right.$$

Logo ſaõ iguaes pelo (*num.* 33.) a razaõ de B.D, he a meſma, que a de F.G; e aſſim B.D::F.G; e he o que ſe queria demonſtrar.

PROPOSIÇAM IX.

Theorema.

SE quatro termos forem proporcionaes, conſervaráõ a meſma proporçaõ, nas cinco mudanças ſeguintes.

45 Sejaõ as grandezas B.D::F.G (*num* 41.) B G = D F , e pelo (*num.* 44) qualquer mudança a esses quatro termos , sempre ficaráõ proporcionaes, com condiçaõ, que B, e G, extremos, e os meyos D, e F, sejaõ sempre meyos, ou extremos; porque sempre será B G = D F.

46 Podemos primeiramente mudar a disposiçaõ dos termos em tres diferentes modos: primeiramente, transpondo as razoens , como, em lugar de B.D:: F.G , podemos dizer F.G::B.D, em que os meyos passaõ a extremos , e os extremos a meyos sem turbar a proporçaõ , pois que sempre saõ iguaes os productos B F, e B G.

47 A segunda mudança se faz , premutando a disposiçaõ dos termos de cada razaõ , de sórte, que os consequentes passaõ a antecedentes, e os antecedentes a consequentes, como, se de B.D::F.G, dizemos D.B::G.F; porque sempre saõ iguaes os productos B G, e D F.

48 A terceira mudança se faz alternando , tomando os termos alternativamente , isto he , comparando os antecedentes juntamente, e da mesma sórte os consequentes, como, se de B.D::F.G será alternando B.F::D.G, e a proporçaõ se conserva; porque B G = F D: pódem-se fazer mais duas mudanças, que fazem quarta, e quinta.

49 A quarta, comparando os antecedentes, e mais os consequentes com os mesmos consequentes: a esta mudança chamaõ, compondo; porque se B.D::F.G, será compondo B+D.D::F+G.G, como fica demonstrado no (*num.* 35.)

50 A quinta mudança ſe diz, dividindo; porque ſe comparaõ os antecedentes, menos os conſequentes com os meſmos conſequentes, como fica moſtrado (*num.* 37) ſeja B.D::F.G, ſerá dividindo B − D. D::F − G.G.

PROPOSIÇAM X.

Theorema.

EM huma proporçaõ de muitas grandezas, aſſim como o antecedente de huma, he para o ſeu conſequente, aſſim a ſoma de todos os antecedentes, he para a ſoma de todos os conſequentes.

51 Seja B.C::D.F::G.H: devemos moſtrar, que B + D + G, ſoma dos antecedentes he para C + F + H, ſoma dos conſequentes, como B.C, ou D.F, ou G.H.

Alternando ------- B.D::C.F
Compondo ------- B + D.D::C + F.F
Alternando ------- B + D.C + F::D.F
Pela hypotheſi B.F::G.H:
logo (*numer.* 33.) B + D.C + F::G.H
Alternando, B + D.G::C + F.H
Compondo, B + D + G.G::C + F + H.H; e he o que ſe queria demonſtrar.

Note-ſe, como foy aqui neceſſario uſar das mudanças, que pódem ter as proporçoens, ſem ſe alterarem, nem perderem a proporcionalidade.

PROPO-

PROPOSIÇAM XI.

Problema.

DAdos tres termos de huma proporçaõ, achar o quarto termo.

52 Sejaõ B, C, D os tres primeiros termos de huma proporçaõ, de que ſe quer achar o quarto; multiplique-ſe o ſegundo, e o terceiro, hum pelo outro, e ſerá o producto CD: divida-ſe eſte producto pelo primeiro termo B; e ſupponho, que o quociente he F: digo, que F ſerá o quarto termo buſcado; o quociente F de CD, dividido por B, ſe ſe multiplicar por B, ſerá igual ao producto CD (*pelo num.* 38.) e aſſim BF = CD: logo (*num.* 44) eſtes quatro termos B, C, D, F, fazem eſta proporçaõ B.C::D.F, na qual F he o quarto termo.

53 Se nos derem eſtes tres termos 2, 4, 8 para buſcar hum quarto termo: multiplicando 4 por 8, e dividindo o producto 32 por 2, primeiro termo, o quociente 16 ſerá o quarto termo buſcado.

COROLARIO.

54 SE nos derem eſta proporçaõ de quatro termos: B.C::D.F, ſe notaõ aqui as conſequencias, que ſe pódem tirar, ſegundo os termos ſe multiplicarem, ou dividirem huns pelos outros.

55 Primeira, ſe o ſegundo termo C ſe multiplicar pelo terceiro D, e o producto ſe dividir pelo quarto F, o quociente ſerá o primeiro termo B; porque (*num.* 44.) F.D::C.B; e aſſim ſe póde tomar

o ulo ultimo consequente por primeiro antecedente, e B, que era o primeiro termo, será o quarto.

56 Segunda, se o primeiro termo B, se multiplicar por F, quarto termo, e o producto B F se dividir por D, terceiro termo, o quociente desta divisaõ será igual ao segundo termo C; porque (*num.* 44.) D.B::F.C, em que C he o quarto termo.

57 Terceira, o terceiro termo D, he igual ao quociente de B F, producto do primeiro termo, pelo quarto, dividido pelo segundo, e porque C. B::F.D, em que D he o quarto termo.

Da Regra de tres directa, e inversa.

A Proposiçaõ precedente nos ensina a pratica da regra de tres, que muitos chamaõ regra de ouro, pelo grande uso, que tem.

58 A regra de tres, he directa, ou inversa; pela regra de tres directa, se busca hum quarto termo proporcional a tres termos dados, isto he, em que o quarto termo seja para o terceiro, como o segundo para o primeiro: pela regra de tres inversa, se busca hum quarto termo, dados tres termos em proporçaõ inversa, de sórte, que quando o segundo termo he mayor, ou menor, que o primeiro, tanto o quarto, pelo contrario, he mayor, ou menor, que o terceiro.

EXEMPLO

Da Regra de tres directa.

59 HUm homem em 6 dias dispendeo 24 moedas, quantas gastarà em 30, fazendo sempre o mesmo gasto?

Nes-

Nesta questaõ busca-se hum quarto termo, que tenha a mesma razaõ para 30, que 24 tem para 6: os primeiros tres termos saõ conhecidos; e assim pela proposiçaõ precedente, multiplicaremos 30 por 24, e dividiremos o producto 720 pelo primeiro termo 6, e o quociente 120 será o quarto termo buscado.

Todo o artefício desta pratica, e regra, consiste em dispor os termos dados, de sórte, que fiquem em proporçaõ, e o termo buscado tem o quarto lugar.

Tambem se deve advertir, que as cousas semelhantes explicadas pelos termos da proporçaõ tenhaõ o mesmo nome, e se na proposta, o naõ tiverem, será necessario reduzillos a elles; porque a questaõ a cima se podia propôr deste modo.

Hum homem despendeo em 6 dias 288 cruzados, quantas moedas gastarà em hum mez, fazendo a mesma despeza? Para a resoluçaõ desta questaõ se devem reduzir os cruzados a moedas, e os mezes a dias.

Da regra de tres inversa.

60 DEvemonos servir desta regra, todas as vezes que quizermos buscar hum quarto termo mais pequeno, que o terceiro á proporçaõ, que o segundo he mayor, que o primeiro, ou hum quarto termo mayor, que o terceiro á proporçaõ, que o segundo he menor, que o primeiro, como veremos no seguinte exemplo.

EXEMPLO

da Regra de tres inverſa.

61 VAlendo o trigo a 300 reis o alqueire, davaõ 16 onças por hum vintem, ſendo a 600 reis o alqueire, quantas onças ſe devem dar por hum vintem.

300.16::600.

Bem ſe conhece, que reſultaria abſurdo, ſe eſta queſtaõ ſe reſolveſſe pela regra antecedente; e porque nella ſe buſca hum quarto termo menor, que o terceiro, á proporçaõ, que o ſegundo he mayor, que o primeiro, ſe fará a regra trocada, pois eſtaõ trocados os termos: multiplicando o primeiro pelo ſegundo, e dividindo pelo terceiro, que dará no quociente 8, pelo quarto termo buſcado.

Eſta regra he eſcuſada, ſe ſe examinar com attençaõ a razaõ dos termos, para os poder diſpôr, de modo, que façaõ proporçaõ directa: os termos a cima ſe pódem diſpor deſta ſórte:

600.300.16.

PROPOSIÇAM XII.

Problema.

DIvidir proporcionalmente huma grandeza dada em partes proporcionaes ás partes dadas de outra grandeza.

62 Seja a grandeza A, ou 27, a qual ſe quer dividir em partes proporcionaes às partes da grandeza B, ou 9, cujas partes ſaõ C, ou 4, D, ou 2, F, ou 3.

Pelo

Pelo (*num.* 52) se busque o valor de G, e de H, e de I, partes de A, por tres operaçoens diferentes, pois que estas tres grandezas G, H, I, haõ de ser proporcionaes ás tres grandezas C, D, F; e para cada proporçaõ temos tres termos conhecidos, a saber, B, A, C: B, A, D: B, A, F; e assim

1ª. $\overset{9}{B} . \overset{27}{A} :: \overset{4}{C} . \overset{12}{G}$

2ª. $\overset{9}{B} . \overset{27}{A} :: \overset{2}{D} . \overset{36}{H}$

3ª. $\overset{9}{B} . \overset{27}{A} :: \overset{3}{F} . \overset{9}{I}$.

Só he necessario o valor de G, e H, e I; para o que se multiplique o terceiro C, pelo segundo A, ou o quarto por 27, e o producto AC, ou 108 dividido pelo primeiro termo B, ou 9, dará no quociente o valor de G, a saber, 12, parte proporcional buscada: o mesmo se praticará nas mais proporçoens, e sahiráõ as mais partes proporcionaes buscadas da grandeza A.

Por quanto a grandeza G he (construcçaõ) quarta proporcional ás tres grandezas B, A, C, será parte proporcional da grandeza A, como a grandeza C da grandeza B; porque, sendo proporcionaes B.A :: C.G será (*num.* 45.) B.C :: A.G; e assim A contém a G, como B a C: logo G será parte semelhante de A, como he C de B; e o mesmo se póde mostrar das mais partes: logo as grandezas G, H, I, seráõ partes semelhantes de A, como o saõ C, D, F, de B; e he o que se queria demonstrar.

Da Regra de companhias.

63 A Regra de companhias he huma pratica da proposiçaõ precedente, como, quando 3, ou

ou 4, ou mais pessoas fazem entre si sociedade, pondo cada hum certa porçaõ de dinheiro, para com elle se fazer negocio; e no cabo da companhia, he necessario repartir o ganho á proporçaõ, com que cada hum entrou. As entradas fazem huma soma, que he o primeiro termo da proporçaõ, e a soma do ganho faz o segundo termo, e a entrada do primeiro he o terceiro termo, e fazendo a regra de tres directa, multiplicando o terceiro termo pelo segundo, e dividindo o producto pelo primeiro, sahirá no quociente o ganho, que toca á primeira pessoa; e se fazem tantas operaçoens, quantas saõ as pessoas, que entráraõ na sociedade, servindo sempre a soma das entradas de primeiro termo, o ganho total de segundo, e a entrada particular de terceiro, que he o mesmo, que se praticou na proposiçaõ precedente.

EXEMPLO.

64 TRes pessoas, fizeraõ bolsa de dez mil cruzados para negociarem com elles: o primeiro entrou com 2000, o segundo com 5000, e o terceiro com 3000 cruzados, e ganháraõ quatro mil cruzados: pergunta-se, quanto cabe a cada hum? Devem-se repartir os quatro mil cruzados pelos tres companheiros á proporçaõ da quantia, com que cada hum entrou.

Segundo o que fica dito, o primeiro termo he a soma das entradas, que saõ dez mil cruzados, o segundo termo he o ganho total, que saõ quatro mil cruzados, e estes dous termos servem para as tres operaçoens, sendo em cada huma, terceiro termo a entrada particular de cada hum; e feitas as operaçoens, será o ganho do primeiro 800 cruzados, o do segundo 2000,

e o

e o do terceiro 1200, que fazem a ſoma dos 4 mil cruzados, do ganho total.

$$10000.4000::\left(\begin{array}{l}2000\,.\,800\\5000.2000\\3000.1200.\end{array}\right.$$

Da Regra chamada: falſa poſiçaõ.

65 QUando ſe ſabe, que as partes incognitas de hum numero propoſto tem entre ſi certa proporçaõ, ſe ſuppoem hum numero, cujas partes tenhaõ a meſma proporçaõ, e por eſſe meyo ſe vem a deſcobrir as partes incognitas, que ſe queriaõ ſaber. Chama-ſe falſa poſiçaõ; porque ſe ſuppoem hum numero, com o qual ſe obra, como ſe foſſe o verdadeiro: ha duas regras de falſa poſiçaõ, huma ſimples, e outra compoſta; aqui naõ fallaremos da compoſta; mas ſó ſim da ſimples.

E X E M P L O.

66 SAbe-ſe, que tres idades de tres peſſoas em ſoma, fazem 144 annos, e que a idade do ſegundo, he o dobro da idade do primeiro; e que a idade do terceiro he o triplo da idade do ſegundo; pergunta-ſe, que idade tem cada hum? Supponhamos, que o primeiro tinha tres annos, e ſegundo a hypotheſi, o ſegundo terá ſeis annos, e como o terceiro he o triplo do ſegundo, terá dezoito annos; mas a ſoma deſtas tres idades fazem 27, e naõ dizem a verdade; porque devem fazer 144 annos; porém como ſabemos, que as ppartes de 144 haõ de ſer proporcionaes ás partes de 27, naõ temos mais do que pelo

(*num.* 62.) repartir 144 em partes proporcionaes ás partes de 27, que saõ 3, 6, 18, e seráõ as partes buscadas 16, 32, 96.

$$27 . 144 :: \begin{cases} 3 . 16 \\ 6 . 32 \\ 18 . 96 \end{cases}$$

CAPITULO VI.

Das Progreçoens Geometricas.

PROPOSIC,AM XIII.

Theorema.

EM huma Progreçaõ Geometrica, o producto de dous termos, igualmente distantes dos extremos, he igual ao producto dos meyos.

67 Seja ∺ B.C.D.E.F.G.H, em progreçaõ geometrica: devemos mostrar, que CG = BH, ou DF = BH. Pela definiçaõ das progreçoens, B.C :: G.H: logo, pelo (*num.* 41.) BH = CG; e porque tambem B.D :: F.H: logo BH = DF; e he o que se queria demonstrar.

PROPOSIC,AM XIV.

Theorema.

EM huma progreçaõ geometrica, o segundo termo he igual ao primeiro, multiplicado pela primeira potencia do expoente da razaõ, que reina na progreçaõ: o terceiro he igual ao primeiro, multiplicado do pela ſegunda potencia do expoente : o quarto he igual ao primeiro multiplicado pela terceira potencia do expoente ; e aſſim dos mais termos.

68 A inſtrucçaõ deſte theorema o faz parecer dificultoſo, naõ tendo dificuldade alguma ; pois he, como hum corolario do lemma , que fica propoſto.

Seja eſta progreçaõ $\div\!\div$ B, C, D, F, G, H: ſuppondo, que o expoente da razaõ de B a C, he Q: logo $QB = C$; e porque o quociente de D dividido por C he tambem Q: logo QC, ou $QQB = D$; e aſſim reduziremos eſta progreçaõ na que ſe ſegue, q̃ he a meſma $\div\!\div B . QB . QQB . Q^3B . Q^4B . Q^5B$, &c. donde ſe vê claramente , que o ſegundo termo he igual a B , primeiro termo , multiplicado pela primeira potencia do expoente Q; e o terceiro igual ao primeiro B, multiplicado pela ſegunda potencia do expoente Q; e aſſim dos mais.

PROPOSIÇAM XV.

Problema.

CONTINUAR huma progreçaõ, de que ſe conhecem os tres primeiros termos, ou ſó dous, com o expoente da razaõ.

69 Sejaõ eſtes tres termos $\div\!\div B . C . D$; pelo (*num.* 52.) acharemos o quarto termo , multiplicando C por D, e dividindo o producto CD por B, e o quociente $\frac{CD}{B}$ ſerá o quarto termo, iſto he, $B . C :: D . \frac{CD}{B}$; e como $C . D . \frac{CD}{B}$ ſaõ tres termos , a eſtes buſcaremos o quarto termo do meſmo modo, que achámos o terceiro ; e aſſim poderemos aumentar a progreçaõ indefinitamente.

Se ſouberem os dous primeiros termos, e o expoente da razaõ, que reina na progreçaõ, a ſaber, Q, Q, que he o quociente de $\frac{C}{B}$, pelo (*num.* 68.) ſerá o terceiro termo $Q^2 . B$, o quarto Q^3 B, e aſſim dos mais.

PROPOSIC,AM XVI.

Problema.

ACHar qualquer dos termos de huma progreçaõ, de que ſe conhece o primeiro, e a razaõ do primeiro ao ſegundo.

70 Seja o primeiro termo de huma progreçaõ 5, e o expoente da razaõ do primeiro para o ſegundo, ſeja dez, e queremos achar o oitavo termo.

para iſto tomaremos a ſetima potencia de dez, multiplicando ſete vezes dez por ſi meſmo; o que ſe faz, ajuntando ſete cifras ao numero dez, e reſultará 100000000, que multiplicada por 5, o primeiro termo faz 500000000, que ſerá o oitavo termo buſcado, como he evidente (*num.* 68.)

EXEMPLO I.

71 HUm mercador quer vender hum cavalo, com condiçaõ, que lhe naõ daràõ mais pelo primeiro cravo das ſuas ferraduras, do que hum real, pelo ſegundo, dez reis, e pelo terceiro, cem reis, e o cavalo ſó ſe achava com vinte cravos: pergunta-ſe, quanto valerà o ultimo cravo? Para achar o preço, he neceſſario ajuntar a 10, 19 cifras, de ſórte, que o ultimo cravo faz huma taõ prodigioſa ſoma, que todos os Principes do mundo juntos naõ teriaõ com que o pagar.

EXEM-

EXEMPLO II.

72 JAcob com ſetenta peſſoas de ſua familia, ſuppondo, que no cabo de vinte annos foſſe dobrada a familia, e que no cabo de outros vinte, ſe aumentaſſe tambem em dobro, e aſſim por diante, de vinte em vinte annos: pergunta-ſe, quanto ſeria a ſua familia no cabo de duzentos annos?

Buſque-ſe o decimo termo de huma progreçaõ, cujo primeiro termo he ſetenta, e como o expoente da razaõ, que reina, he dous, buſcaremos a nona potencia de dous, o que faz 512; e por eſta potencia multiplicaremos o primeiro termo 70, e o producto ſerá 35840; e tanta ſerà a familia de Jacob, no fim do ſegundo ſeculo.

PROPOSIC,AM XVII.

Theorema.

EM huma progreçaõ Geometrica o ſegundo termo, menos o primeiro he para o primeiro, como o ultimo, menos o primeiro, para a ſoma de todos os termos, que o precedem.

73 Seja ∺ B.C.D.F.G.H, neſta progreçaõ, como em qualquer outra, cada conſequente póde ſervir de antecedente ao termo, que ſe lhe ſegue; e aſſim poderemos expreſſar a progreçaõ neſta fórma: B.C::C.D::D.F::F.G::G.H; mas (*num.* 32) como o primeiro termo B, he para o ſegundo C, aſſim B+C+D+F+G, ſoma dos antecedentes, he para C+D+F+G+H, ſoma dos conſequentes.

B.C::B+C+D+F+G.C+D+F+G+H.

Premutando.

C . B : : C + D + F + G + H . B + C + D + F + G.

Dividindo.

C − B . B : : C + D + F + G + H − B − C − D − F − G . B + C + D + F + G.

Mas porque + C + D + F + G − C − D − F − G = o: logo C + D + F + G + H − B − C − D − F − G = H − B: logo tambem C − B . B : : H − B . B + C + D + F + G; isto he, que o segundo termo C, menos o primeiro B he para o mesmo termo B, como o ultimo termo H, menos o primeiro B, he para a soma de todos os termos, que precedem o ultimo; e he o que se queria demonstrar.

COROLARIO I.

74 SE a razaõ, que reina na progreçaõ for dupla, o ultimo termo, que chamamos X, será igual á soma de todos os termos, que o precedem. Seja A o primeiro termo, S a soma de todos os termos, que precederem X, ultimo termo.

Se a razaõ he dupla, sendo o primeiro termo A, o segundo serà 2 A, mas por esta proposiçaõ 2 A − A . A : : X − A . S; e porque 2 A − A = A, he necessario, que X − A, seja = S, quer dizer, que o ultimo termo de huma progreçaõ, menos o primeiro, he igual á soma de todos os termos, que o precedem; e he o que se propoz neste corolario.

COROLARIO II.

75 SE a razaõ, que reina na progreçaõ for tripla, o ultimo termo X, menos o primeiro, he o dobro de S, soma dos termos, que precedem o ulti-

ultimo; porque ſendo o primeiro termo A, o ſegundo ſerà 3 A; mas ſegundo a propoſiçaõ antecedente 3 A − A . A :: X − A . S; e porque 3 A − A he o dobro de A: logo X − A ſerà o dobro de S.

COROLARIO III

76 SE a razaõ for quadrupla, o ultimo termo X, menos o primeiro, ſerà o triplo de S, ſoma dos termos, que o precedem; porque ſe o primeiro termo he A, o ſegundo ſerà 4 A; e aſſim 4 A − A . A :: X − A . S; mas 4 A − A he o triplo de A: logo X − A, ſerà o triplo de S; e aſſim de todas as mais.

PROPOSIÇAM XVIII.

Problema.

ACHar a ſoma de huma progreçaõ, da qual ſe conhece o primeiro, o ſegundo, e ultimo termo.

77 Se chamarmos ao primeiro termo A, ao ſegundo B, ao ultimo X, e á ſoma dos termos, que precedem o ultimo, S, ſerá (*num.* 73.) B − A . A :: X − A . S; e aſſim acharemos o valor de S, pelo (*numer.* 52.) multiplicando o ultimo termo X, depois de lhe diminuir o primeiro termo A, pelo primeiro termo, e dividindo eſſe producto pelo ſegundo termo, tendo-lhe diminuido o primeiro, a ſaber, por B − A, e o quociente ſerá o valor de S, e ajuntando-lhe o ultimo termo, teremos a ſoma de toda a progreçaõ, pois que S, he o valor de todos os termos, que precedem o ultimo.

EXEM-

E X E M P L O I.

78 CErta pessoa gastou no primeiro anno dez moedas, no segundo anno quinze, e no ultimo dez mil e dez, pergunta-se: quantas gastou por todas.

Segundo esta proposta, será, pelo (*num.* 77.) o segundo termo 15, menos o primeiro 10, para o primeiro 10, como 10010, menos o primeiro 10, para a soma dos termos, que o precedem.

15 – 10. 10 :: 10010 – 10. S.

Para achar a soma, q̃ se busca, multiplicaremos 10010 – 10 por 10, isto he, 100 por 10, e o producto 10000, se divida por 15 – 10, isto he, por 5, e o quociente da divisaõ 2000, junto com 10010, faz a soma 30010, que he o numero das moedas, que gastou.

E X E M P L O. II.

79 SUppondo, que a familia de Jacob, 20 annos depois da sua chegada ao Egypto, foy duas vezes mayor, do que quando entrou, e que tendo entrado Jacob com 70 pessoas, nos primeiros 20 annos se achou com 140, aumentando-se sempre na mesma proporçaõ, e que no fim dos ultimos 20 annos, do segundo seculo, depois da sua entrada, a familia se aumentou de 35840: pergunta-se: quanto se teria aumentado a familia no espaço de 200 annos?

Esta questaõ se reduz a achar a soma de huma progreçaõ, na qual o primeiro termo he 70, o segundo 140, e o ultimo 35840; e assim, pois que esse ultimo termo, menos o primeiro 70, he igual á soma de todos os termos, que o precedem, deve-se ajuntar 35840 ao mesmo numero 35840 – 70, isto he, 35770 com 35840, o que faz 71610, que he o numero,

mero, a que chegou a familia de Jacob, e feria muito mais; porque Jacob teve muitos filhos, de que devia haver mayor defcendencia.

PROPOSIÇAM XIX.

Problema.

DAdo o primeiro, e ultimo termo, e o numero dos termos de huma progreçaõ, achar o expoente.

80 Seja huma progreçaõ, em que 70 he o primeiro termo, e 35840 o ultimo, que he o decimo termo: queremos achar o expoente da razaõ, que reina nefta progreçaõ.

Pelo (*num.* 68.) o primeiro termo 70, multiplicado pela nona potencia do expoente, faz o ultimo termo: logo dividindo 35840 por 70, o quociente 512, ferá a nona potencia do expoente; e affim, tirando a raiz ao numero 512 pelo methodo, que fica explicado no Livro fegundo, acharemos, que o expoente bufcado he 2.

PROPOSIÇAM. XX.

Problema.

DAdo o primeiro termo, o expoente, e o ultimo termo, achar o numero dos termos.

81 O primeiro termo feja 70, o expoente 2, e o ultimo termo 35840; e affim, querendo achar o numero dos termos, divida-fe o ultimo termo 35840 por 70, o quociente 512 ferá a potencia do expoente, igual ao numero dos termos da progreçaõ, menos 1, como fica moftrado (*num.* 68.) logo, pois que

512 he a nona potencia de dous, o termo 35840 ſerá o decimo termo; e aſſim eſta progreçaõ tem 10 termos.

EXEMPLO.

82 SAbe-ſe, que certa peſſoa deſpendeo, o primeiro anno, ſeis moedas, o ſegundo anno, o triplo, e ao todo veyo a deſpender no ultimo anno 486 moedas. Quer ſaberſe em quantos annos fez a ſobredita deſpeza?

O primeiro termo he 6, o expoente da razaõ he 3, e o ultimo termo 486: dividindo eſte ultimo termo por 6, o quociente 81 he a quarta potencia de 3; e aſſim 486 deve ſer o quinto rermo; e ſendo 5 os termos, ſaõ 5 os annos, em que fez a deſpeza.

PROPOSIÇAM XXI.

Problema.

DAdo o expoente, o numero dos termos, e o ultimo termo de huma progreçaõ, achar o primeiro termo.

83 Seja o expoente 3, o ultimo termo 486, e 5 o numero dos termos: pelo (*num.* 68.) o ultimo termo 486 foy feito do primeiro termo, multiplicado pela quarta potencia do expoente: logo dividindo 486 por 81, que he a quarta potencia de 3, o quociente 6 ſerá o primeiro termo buſcado, como he evidente (*num.* 68.)

PROPO-

PROPOSIC,AM XXII.

Problema.

DAdo o expoente, o numero dos termos, e a ſoma da progreçaõ, achar qualquer dos termos.

84 Seja 3 o quociente de huma progreçaõ de 6 termos, cuja ſoma he 728: para achar qualquer dos termos da progreçaõ, em que reina a razaõ tripla, ſe forme huma progreçaõ de 6 termos, como a que ſe ſegue ∺ 1.3.9.27.81.243; a ſoma deſta progreçaõ he 364; e para achar qualquer dos termos da progreçaõ a cima, ſe divida 728 em 6 partes proporcionaes ás partes da progreçaõ, cuja ſoma ſaõ 364, e acharemos, que as partes, que lhe correſpondem fazem a ſeguinte progreçaõ ∺ 2.6.18.54.162.486, que pelo (*num.*62.) ficaõ ſabidos, naõ ſó hum dos termos, mas todos os termos da progreçaõ, que ſe buſcarem.

PROPOSIC,AM XXIII.

Problema.

DAdo o primeiro termo, o expoente, e a ſoma de huma progreçaõ, achar quantos ſaõ os termos, e o valor do ultimo.

85 Seja o primeiro termo da progreçaõ 2, o expoente da razaõ 3, e a ſoma 728. Eſta ſoma contèm o ultimo termo, e todos os que o precedem; mas o ultimo termo, menos o primeiro, que he 2, he o dobro de todos os que o precedem, como fica moſtrado (*num.* 75.) logo diminuindo de 728, o primeiro termo, que he 2, e dividindo (*num.* 62.) o reſto 726 em duas partes taes, que huma ſeja o dobro da outra, ſerá huma 242, e a outra 484, e ajuntando a eſ-

ta

ta parte mayor, o primeiro termo 2, a ſoma 486 ſerá o ultimo termo; e pelo (*num.* 81.) acharemos qual he o numero dos termos deſta progreçaõ.

ADVERTENCIA.

86 A Reſoluçaõ deſta propoſiçaõ naõ he particular, ainda que o parece; e nós daremos outra mais geral no ultimo livro.

PROPOSIC,AM XXIV.

Theorema.

TOdas as potencias de qualquer grandeza, poſtas por ordem, faráõ huma progreçaõ Geometrica.

87 Tomemos, por exemplo, a grandeza A, de que ſe ſegue $\div\!\!\div$ A . A^2. A^3. A^4. A^5. A^6. A^7. A^8. Segundo a definiçaõ das potencias, a ſegunda potencia he feita da primeira, multiplicada por ſi meſma: a terceira he feita da ſegunda, multiplicada pela primeira: a quarta da terceira, multiplicada pela primeira; e aſſim A he o quociente da ſegunda, dividida pela primeira, e da primeira, e da terceira dividida pela ſegunda; e da quarta dividida pela terceira, e aſſim das mais: logo as razoens, que eſſas grandezas tem, tendo o meſmo expoente, eſtaõ ordenadas em progreçaõ; e he o que ſe queria demonſtrar,

LOGICA

LOGICA ANALITICA,

LIVRO IV.

DAS RAZOENS, QUE AS POTENCIAS TEM entre si, e de todas as grandezas de muitas dimençoens.

CAPITULO I

Duas, ou mais razoens se pódem somar, e multiplicar, humas por outras; e assim huma razaõ póde ser composta de muitas razoens.

1 NO Livro precedente, em que tratamos das razoens, foy para saber o que he huma grandeza, a respeito de outras, que com ella se comparaõ. Agora examinaremos as razoens em si mesmas, como se fossem grandezas absolutas, e naõ respectivas ás grandezas, de que saõ razoens.

2 Consideremos, por exemplo, a razaõ dupla em si mesma, e a tripla, ou qualquer outra razaõ: he claro, que as razoens, assim consideradas, se pódem numerar, e que saõ capazes das operaçoens da Arithmetica; porque as podemos ajuntar humas a outras: a razaõ dupla com a razaõ tripla, e que podemos diminuir huma razaõ dupla de huma tripla, e tomar duas, ou mais vezes huma dupla, ou tripla, por exemplo, duas, ou tres vezes, e a multiplicar por tres, o que farà huma razaõ sextupla, e dividir huma razaõ sextupla por outra tripla, o quociente será huma razaõ dupla.

3 Se bem considerarmos os numeros, e a sua natureza, acharemos, que tambem saõ razoens: quando dizemos, que huma torre tem 100 palmos de alto, e que outra só tem 80, comparamos huma com outra, segundo a medida; e dizemos, que huma he mayor, que a outra, e a comparaçaõ dos numeros 100, e 80 he a razaõ de huma para a outra; mas para isso he necessario primeiramente concordar de huma certa medida, como, por exemplo, o palmo será necessario, querendo numerar as razoens, reduzilas primeiro, de sórte, que tenhaõ hum termo commum, que seja, como a sua commua medida. Veremos como isto se póde fazer, e logo as operaçoẽs da Arithmetica se faráõ sobre as razoens com a mesma facilidade, que sobre os numeros; assim conheceremos claramente, que as razoens se pódem compôr de outras razoens, como hum numero se póde compôr de muitos numeros, somando, ou multiplicando.

Das definiçoens, e axiomas, que pódem ſervir ás razoens compoſtas, para ſua mayor inteligencia.

DEFINIÇAM I.

4 HUma razaõ ſe diz compoſta, quando he feita de duas, ou mais razoens, multiplicadas humas por outras.

Deſta ſórte a razaõ ſextupla he aſſim chamada, por ſer compoſta da multiplicaçaõ da razaõ dupla, pela razaõ tripla.

DEFINIÇAM II.

5 AS razoens componentes ſaõ aquellas, de cuja multiplicaçaõ reſultaõ as razoens compoſtas.

Deſta ſórte a razaõ tripla, e a dupla, ſaõ razoens componentes da razaõ ſextupla.

DEFINIÇAM III.

6 HUma razaõ compoſta de duas razoens iguaes ſe chama razaõ duplicada de cada huma deſſas razoens.

A razaõ de 2 a 8, he compoſta de duas razoens iguaes, a ſaber de 2.4, e de 4.8; e aſſim a razaõ de 2 a 8 he duplicada.

DEFINIÇAM IV.

7 HUma razaõ compoſta de tres iguaes, ſe chama razaõ triplicada de cada huma deſſas razoens.

DE-

DEFINIÇAM V.

8 HUma razaõ composta de quatro razoens iguaes, se chama quadruplicada; e assim das mais.

He necessario advertir, que ha muita differença entre razaõ dupla, e razaõ duplicada, e o mesmo entre huma razaõ tripla, e huma razaõ triplicada, como ao diante se verà.

Deve-se tambem advertir, que duas, ou mais razoens se entendem multiplicadas, quando se multiplicaõ os seus expoentes; o que he manifesto, pelo que fica dito, como tambem sendo iguaes as razoens componentes, o saõ tambem as compostas, como he evidente.

9 As razoens se pódem reduzir, de modo, que sobre ellas se façaõ todas as operaçoens da Arithmetica.

As diferentes grandezas se naõ medem, senaõ depois de reduzidas a huma commua medida (como temos dito) e assim he necessario praticar o mesmo com as razoens, de sórte, que se possaõ comparar hũas com outras, como se fossem grandezas absolutas; o que se consegue, dando-lhe o mesmo consequente.

10 Porque, por exemplo, as duas razoens 3 para 12, e 4 para 12, em que saõ antecedentes 3, e 4, e tem hum mesmo consequente 12, he facil de conhecer, que a razaõ de 3 a 12 he subquadrupla, e de 4 a 12 subtripla; e que assim as duas razoens 3 para 12, e 4 para 12, saõ como 3 para 4: examinemos como esta reducçaõ se póde fazer, primeiramente pelas letras, para nos convencer, que o que temos, que dizer das razoens, he igualmente verdadeiro, ou sejaõ

as

as razoens de numero a numero, ou ſejaõ ſurdas.

11 Sejaõ dadas as razoens de B.C, e de F.G: multipliquem-ſe os termos da primeira razaõ, pelo conſequente da ſegunda, a ſaber, B, e C por G, e os productos BG, e CG tem a meſma razaõ, que B para C (*num.* 38. *cap.* 4. *liv.* 3.) multipliquem-ſe os termos da ſegunda razaõ, pelo conſequente da primeira, a ſaber, FG por C, o que faz CF, CG, que tem a meſma razaõ de F para G.

$$\left.\begin{array}{l} B.C::BG \\ F.G::CF \end{array}\right) .CG$$

Onde ſe vê claramente, que as duas razoens de B.C, e de F.G, reduzidas tem hum meſmo conſequente: ſejaõ as duas razoens em numeros 3.7, e 5.11, he neceſſario reduzilas, de ſórte, que tenhaõ ambas o meſmo conſequente, para aſſim ſe poder conhecer a razaõ, que ellas tem entre ſi: multiplique-ſe primeiramente 3, e 7 por 11, o que faz 33, e 77, e logo multiplicando tambem 5, e 11 por 7, o que faz 35; e 77, ficaráõ as duas razoens de 3 para 7, e de 5 para 11, reduzidas a hum meſmo conſequente.

$$\left.\begin{array}{l} 5.11::33 \\ 3.7::35 \end{array}\right) .77$$

E deſta ſórte ſe conhece, que as duas razoens propoſtas ſaõ como os numeros 33, e 35; e aſſim podemos obrar com os ſeus expoentes, como ſe foſſem as meſmas razoens, iſto he, ſomando-os, e multiplicando-os, &c. e aſſim naõ he difficultoſo o fazerem-ſe as operaçoens da Arithmetica com as razoens, do que com os numeros, que tambem ſaõ razoens, como fica dito.

12 Se for neceſſario ſomar huma razaõ tripla com huma razaõ dupla, ſe ſoma 2, e 3, que ſaõ os ſeus expoentes, e a ſoma 5 ſerá o expoente de huma razaõ quintupla: ſe for neceſſario diminuir a razaõ dupla da razaõ tripla, ſe diminua 2 de 3, e o reſto 1 ſerá o expoente da razaõ de igualdade: ſe quizermos multiplicar huma razaõ tripla, por huma razaõ dupla, multiplicaremos os ſeus expoentes 2, e 3, e daráõ 6, expoente da razaõ ſextupla: do meſmo modo, ſe quizermos dividir huma razaõ ſextupla por huma razaõ tripla, o quociente da diviſaõ ſerá o expoente da razaõ dupla.

13 O que temos dito das razoens, que tem numeros por expoentes, convém igualmente ás razoens ſurdas, das quaes podemos achar os expoentes, como fica moſtrado, obrando com os ſeus expoentes, pois que quaeſquer duas razoens ſe pódem reduzir, de ſórte, que tenhaõ ambas hum meſmo conſequente; e neſſe caſo os ſeus antecedentes ſaõ os ſeus expoentes, ſobre os quaes podemos fazer todas as operaçoens da Arithmetica, como ſobre os numeros abſolutos, que ſaõ como antecedentes de muitas razoens, que tem todas o meſmo conſequente, a ſaber, a unidade.

CAPITU-

CAPITULO II.

Das Progreçoens Geometricas.

PROPOSIC,AM I.

Theorema.

A Razaõ de huma grandeza para outra, he composta das razoens das grandezas interpostas.

14 Sejaõ as grandezas B.C.D.F: entre B, e F saõ interpostas C, e D: devemos mostrar, que a razaõ de B.F he composta da razaõ de B.C, e de C.D, e de D.F; o que he evidente, pelo que deixamos dito (*liv.* 3. *cap.* 4. *n.* 38.)

PROPOSIC,AM II.

Theorema.

EM huma progreçaõ geometrica, a razaõ do primeiro termo para o segundo he simples: a do primeiro ao terceiro duplicada; a do primeiro ao quarto triplicada; e assim das mais, que se seguirem.

15 Esta proposiçaõ se póde propôr de outro modo, como se segue.

Em huma progreçaõ geometrica a razaõ de dous termos, entre os quaes ha dous intervallos, he duplicada, e se ha 3 intervallos, he triplicada, &c.

O que he manifesto; porque a progreçaõ geometrica he huma mesma razaõ continuada; e assim a razaõ de hum termo a outro he composta das razoens dos termos interpostos, pelo (*num.* 10.) e assim a razaõ do primeiro termo ao quarto, he huma razaõ triplicada;

plicada, pois he composta de tres razoens iguaes. Do mesmo modo se mostrará, que a razaõ de dous termos, entre os quaes ha dous intervallos, he duplicada, por ser feita de duas razoens iguaes; e será triplicada, se houver tres intervallos, quadruplicada, se houver quatro, &c.

PROPOSIÇAM III.

Theorema.

DAdos muitos termos das razoens seguidas, se multiplicarmos antecedentes por antecedentes, e consequentes por consequentes, os productos seráõ hum para outro, em razaõ composta dessas razoens.

16 Sejaõ as razoens de B.C, e de D.F; se multiplicarmos os antecedentes B, e D, faraõ BD, e o consequente C pelo consequente F, dará CF: digo, que a razaõ de BD.CF será composta da razaõ de B para C, e da de D para F.

Para mostrar esta verdade, se tome huma das raizes do producto BD, ou B, ou D, e outra do producto CF, ou C, ou F, tomando sempre a mayor, ou a menor de ambos os productos; e se tomarmos C, e D, e multiplicarmos essas duas raizes huma pela outra, que suppomos ficar entre BD, e CF, faraõ tres grandezas, BD, CD, CF; (*e pelo num.* 38. *liv.* 3. *cap.* 4.) faz esta proporçaõ BD.CD::B.C, e CD.CF::D.F; mas (*num.* 14.) a razaõ de BD.CF he composta da razaõ de BD para CD, e da de CD para CF: logo he tambem composta das razoens de B.C, e da de D.F, que saõ as mesmas.

17 Seja huma terceira razaõ de G para H; se multiplicarmos BD por G, e CD por H, segundo o que

fica

fica dito, a razaõ de B D G, para F C H, he composta da razaõ de B D para G, e de C F para H; e assim a razaõ de B D G para C F H, he composta das tres razoens de B, para C, e de D para F, e de G para H; e he o que se queria demonstrar.

PROPOSIC,AM IV.

Problema.

DAdas duas, ou mais razoens, achar a razaõ composta, de que ellas saõ as razoens componentes.

18 Sejaõ as razoens de B para C, e de D para F: queremos achar a razaõ composta, de que ellas saõ componentes; para o conseguir devemos multiplicar os antecedentes pelos antecedentes, e os consequentes pelos consequentes; e seraõ os productos B D, e C F, que serà huma razaõ composta das duas razoens. Se houver ainda huma terceira razaõ, como a de G para H, como as duas primeiras razoens tem composto à razaõ, que ha entre B D, e C F, basta que se multiplique o antecedente G por B D, o que faz B D G, e o consequente H por C F, o que faz C F H, (*num.* 17) a razaõ de B D G para C F H, he composta da razaõ de G para H, e da razaõ de B D para C F.

Se houvesse huma quarta razaõ, que se quizesse ajuntar às precedentes, seria necessario multiplicar B D G, pelo seu antecedente, e o seu consequente por C F H, e teria essa quarta razaõ a razaõ dos productos, e a razaõ dos productos seria composta dessas quatro razoens.

De que se colhe claramente, que poderemos achar huma razaõ composta de muitas razoens dadas.

CAPITULO III.

Da Regra de tres, e de Companhias compoſtas.

Da Regra de tres compoſta.

ALgumas vezes ſe buſca hum quarto termo, que tenha huma razaõ compoſta de muitas razoens: Eſta propoſiçaõ ſe farà mais clara com huma queſtaõ de exemplo.

19 O preço, que ſe coſtuma pagar de frete por 8 arrobas de peſo, vindas de 100 legoas de caminho, ſaõ 4 moedas de ouro: pergunta-ſe, quanto ſe deve pagar por 12 arrobas, vindas de 400 legoas?

He evidente, que ſe buſca hum quarto termo, a que chamamos X, que ſeja proporcional, naõ ſó à diſtancia do caminho; mas tambem à quantidade de peſo. Para reſolver eſta queſtaõ, e quantas lhe forem ſemelhantes, devemos buſcar a razaõ compoſta de peſo apezo, e a razaõ compoſta de diſtancia a diſtancia: multiplicaremos pois 8 arrobas por 100 legoas, o que faz 800, e multiplicando as doze arrobas por 400 legoas, dará no producto 4800, e teremos eſtes termos de huma proporçaõ.

$$800 . 4 :: 4800 . X.$$

Para acharmos o valor de X, faremos a regra directa, multiplicando o terceiro termo pelo ſegundo, e dividindo o producto pelo primeiro, que dará no quociente 24 moedas, pelo tranſporte buſcado.

Pode ſucceder buſcarſe hum termo, que tenha huma razaõ compoſta de 3, e de 4 razoens; mas, pelo que fica dito (*num.* 18) acharemos as razoens compoſtas, dadas as razoens componentes.

Da Regra de Companhias composta.

NA regra de companhia ſimples ſe buſca hum termo, que tenha huma razaõ dada para hum termo dado; porèm na regra de companhias composta ſe buſca hum termo, que tenha huma razaõ dada para outra razaõ composta.

EXEMPLO

20 QUatro mercadores ganhàraõ em commum 240 cruzados: o primeiro tinha entrado com 20 cruzados, por 4 mezes: o ſegundo com 40, por 5 mezes: o terceiro com 60, por 6 mezes: e o quarto com 80, por 7 mezes. Deve-ſe repartir o ganho à proporçaõ da entrada, e tempo de cada hum.

Para reſolver a queſtaõ, o que primeiramente ſe deve fazer, he buſcar as razoens compoſtas deſſas razoens; e para iſſo devemos multiplicar a entrada de cada hum, pelo tempo, com que entrou com o dinheiro, e reſultaràõ os quatro termos ſeguintes, 80 pelo primeiro, 200 pelo ſegundo, 360 pelo terceiro, 560 pelo quarto, e ficaõ eſtes numeros, como he manifeſto, em razaõ compoſta; e juntos eſſes quatro numeros em huma ſoma, ſerà o primeiro termo da proporçaõ: o ſegundo ſerà o ganho total, e o terceiro a razaõ compoſta, que reſultou para cada hum, de cuja ſoma ſe fez o primeiro termo, e ſahirà por quarto termo o que toca a cada hum por quatro operaçoens da regra de tres; e tocarà ao primeiro 16 cruzados, ao ſegundo 40, ao terceiro 72, e ao quarto 112, como ſe ſegue da taboada ſeguinte.

1200 . 240 : :	) 80	. 16
	) 200	. 40
	) 360	. 72
	) 560	. 112

Quem

Quem entender bem a theorica das razoens compostas, naõ acharà dificuldade em resolver quaesquer razoens, por mais compostas que sejaõ; e por essa razaõ nos naõ alargamos a dar mais exemplo.s

CAPITULO IV.

Das razoens, que tem entresi as grandezas de muitas dimençoens.

PROPOSIC, A M V.

Theorema.

DUas grandezas de muitas dimençoens, que tem iguaes algumas de suas raizes, e outras desiguaes, tem entresi a razaõ das desiguaes.

21 Sejaõ as duas grandezas BC, e DC, que tem huma das suas raizes iguaes: devemos mostrar, que DC.DC : : B. D; o que he manifesto (*num.* 38. *liv.* 3.)

Sejaõ as duas grandezas BBC, e DBC: digo, que BBC.DBC : : B.D; porque essas grandezas BBC, e DBC, saõ productos da multiplicaçaõ de B, e de D, multiplicados pela grandeza BC; e assim BBC.DBC : : B.D (*num.* 38. *liv.* 3.) e he o que se queria demonstrar.

COROLARIO I.

22 O Producto de duas grandezas he hum meyo proporcional entre os quadrados dessas grandezas.

Sejaõ as duas grandezas B, e D, cujo producto he BD: o quadrado de B, he BB, e o de D he DD: devemos mostrar $\div$ BB.BD.BD.DD; o que se prova va pela proposiçaõ antecedente, e (*num.* 38. *liv.* 3.)

$$\left.\begin{matrix} BB . BD \\ BD . DD \end{matrix}\right) :: B . D$$

COROLARIO II.

23 O Producto das raizes quadradas de dous quadrados he hum meyo proporcional entre esses quadrados. Este corolario he inverso do primeiro, e da mesma sórte se demostra.

COROLARIO III.

24 DAdos dous cubos, como X^3, e Y^3, se multiplicarmos o quadrado da raiz do primeiro pela raiz do segundo, o que faz XXY, e o quadrado da raiz do segundo, pela raiz cubica do primeiro, que faz YYX: digo, que estes dous productos saõ dous meyos proporcionaes entre dous cubos dados; e assim devemos mostrar $\div X^3 . X^2 X :: Y^2 X . Y^3$, pelo (*num.* 15.)

$$\left.\begin{matrix} X^3 \; X^2 \; Y \\ X^2 . Y . Y^2 X \\ Y^2 \; X . Y^3 \end{matrix}\right) :: X . Y$$

Logo (*numer.* 33. *liv.* 3.) $X^3 . X^2 Y :: X^2 Y . Y^2 X :: Y^2 X . Y^3$: logo $X^3 . X^2 Y :: Y^2 X . Y^3$.

COROLARIO IV.

25 ENtre dous quadrados de quadrados, ou quartas potencias, como A^4, e B^4, estes tres productos $A^3 b$, $A^2 b^2$, $A b^3$ saõ tres meyos pro-

porcionaes, entre A^4, e B^4. Estes 4 productos $A^4 b$, $A^3 bb$, $A^2 bbb$, Ab^4 saõ quatro meyos proporcionaes, entre A^5, e B^5. o que se prova pelos corolarios precedentes; e o mesmo se póde aplicar a todas as mais potencias, como se póde ver na taboada seguinte.

1	$::$	a^2	ab	b^2								
2	$::$	a^3	aab	abb	b^3							
3	$::$	a^4	a^3b	$aabb$	ab^3	b^4						
4	$::$	a^5	a^4b	a^3bb	aab^3	ab^4	b^5					
5	$::$	a^6	a^5b	a^4bb	a^3b^3	aab^4	ab^5	b^6				
6	$::$	a^7	a^6b	a^5bb	a^4b^3	a^3b^4	aab^5	ab^7	b^7			
7	$::$	a^8	a^7b	a^6bb	a^5b^3	a^4b^4	a^3b^5	aab^6	ab^7	b^8		
8	$::$	a^9	a^8b	a^7bb	a^6b^3	a^5b^4	a^4b^5	a^3b^6	aab^7	ab^8	b^9	
9	$::$	a^{10}	a^9b	a^8bb	a^7b^3	a^6b^4	a^5b^5	a^4b^6	a^3b^7	aab^8	ab^9	b^{10}

PROPOSIC,AM VI.

Theorema.

OS planos ſaõ huns para os outros em razaõ compoſta das ſuas raizes.

26 Sejaõ os dous planos dados BD, e CF: digo, que a razaõ deſtes dous planos, he compoſta da razaõ de B para C, e de D para F: o primeiro plano BD he producto dos antecedentes de B, e D das razoens de B.C, e de D.F: o producto CF he o dos conſequentes C, e F: logo (*num.* 16.) BD, e CF tem razaõ compoſta das razoens de B para C, e de D para F; e he o que ſe queria demonſtrar.

COROLARIO.

27 OS quadrados tem entre ſi razaõ duplicada da razaõ de ſuas raizes.

BB, e DD ſaõ dous quadrados, e hum para outro em razaõ compoſta da razaõ de B.D, e da de B.D; mas eſſas duas razoens ſaõ iguaes: logo (*num.* 6.) a razaõ compoſta de BB para DD he duplicada.

PROPOSIC,AM VII.

Theorema.

A Razaõ de hum ſolido para outro, he compoſta das razoens, que as ſuas raizes tem entre ſi.

BDC,

28 BDC, e FGH ſaõ dous ſolidos: devemos moſtrar, que a razaõ do primeiro ſolido para o ſegundo he compoſta das tres razoens, a ſaber, de B.F, de D.G, e de C.H: O primeiro ſolido ſe conſidéra ſeito da multiplicaçaõ dos tres antecedentes BDC, e o ſegundo dos tres conſequentes FGH multiplicados da meſma ſórte: logo (*num.* 16) a razaõ de B D C para FGH he compoſta das razoens das ſuas raizes.

COROLARIO.

29 OS cubos ſaõ entre ſi em razaõ triplicada da razaõ de ſuas raizes: B^3, e C^3 ſaõ dous cubos: logo ſe conſiderarmos o primeiro como producto dos antecedentes, e o ſegundo como producto dos conſequentes, a razaõ do primeiro para o ſegundo, ſerà compoſta das tres razoens B . C, de B.C, e de B.C; mas eſtas tres razoens ſaõ iguaes: logo (*num.* 7.) a razaõ, que ellas compoem, he triplicada.

PROPOSIÇAM VIII.

Theorema.

OS quadrados de quadrados ſaõ em razaõ compoſta de ſuas raizes, a qual he quadruplicada; e aſſim das mais potencias.

30 Eſta propoſiçaõ ſe prova, como as duas precedentes; porque as quatro potencias tem quatro razoens iguaes; e aſſim a razaõ compoſta deſſas razoẽs he quadruplicada.

Do

Do meſmo modo as quintas potencias ſe compoem de cinco razoens iguaes; a ſexta de 6; e aſſim das mais.

PROPOSIC,AM IX.

Theorema.

QUando quatro grandezas ſaõ proporcionaes, os ſeus quadrados, os ſeus cubos, &c. ſaõ tabem proporcionaes.

$$\text{Se } A.B::C.D: \text{digo, que } \left(\begin{array}{l} a^5.\,b^5::c^5.\,d^5 \\ a^4.\,b^4::c^4.\,d^4 \\ a^3.\,b^3::c^3.\,d^3 \\ a^2.\,b^2::c^2.\,d^2 \end{array} \right.$$

31 A razaõ de A_2 para B_2, e a de C_2 para D_2. ſaõ duplicadas de huma meſma razaõ, a ſaber, da razaõ de A para B, ou da razaõ de C para D; a razaõ de A^3 para D^3, e a de C_3 para D^3 he triplicada da meſma razaõ de A para B: logo (*num.* 8.) ſe as razoens componentes ſaõ iguaes, o ſeráõ tambem as compoſtas.

A converſa deſta propoſiçaõ he tambem manifeſta; porque quando os quadrados, os cubos, &c. ſaõ proporcionaes, o ſaõ tambem as ſuas raizes.

COROLARIO.

32 OS quadrados, os cubos, e todas as outras potencias dos termos de huma progreſſaõ, eſtaõ tambem em progreſſaõ; pois que os

quadrados, e os cubos, &c. feitos de grandezas proporcionaes, saõ tambem proporcionaes; e se as grandezas fizerem huma progressaõ continua, he evidente, que tambem faraõ progressaõ continua os quadrados, os cubos dessas grandezas, &c.

$$\text{Se } A.B.C\colon \text{ logo } \begin{cases} \div A^2.B^2.C^2 \\ \div A^3.B^3.C^3 \\ \div A^4.B^4.C^4 \\ \div A^5.B^5.C^5 \end{cases}$$

PROPOSICAM X.

Theorema.

EM toda a progressaõ geometrica, os quadrados dos dous termos, que se seguem immediatamente, saõ entre si, como o primeiro para o que se segue ao segundo.

33 Seja $\div$ B.C.D.F, &c. digo, que BB.CC ::B.D. Pelo (*num.* 27.) a razaõ de BB para CC he duplicada da razaõ de B para C, que he a mesma, que a de C para D; mas (*num.* 15.) a razaõ de B para D he composta dessas duas razoens: logo (*numer.* 8.) haverá a mesma razaõ entre BB, e CC, que entre B, e D: logo BB.CC::B.D; e he o que se queria demonstrar.

PROPO-

PROPOSIC,AM XI.

Theorema.

EM huma progreſſaõ geometrica, o cubo do primeiro termo he para o cubo do ſegundo, como o primeiro termo he para aquelle, que ſe ſegue ao terceiro.

34 Seja ∺ B.C.D.F, &c. digo, que $B^3 . C^3$ :: B.F (*num.* 29.) a razaõ de B^3 para C^3 he triplicada da razaõ de B para C, que he a meſma, que a de C para D, e de D para F; mas (*num.* 16.) a razaõ de B para F he composta deſſas tres razoens: logo a razaõ de B^3 para C^3 he a meſma, que a de B para F: e he o que ſe queria demonſtrar.

ADVERTENCIA.

35 ESte theorema dá o meyo de ſe poder dobrar o cubo; porque ∺ $B^3 . C^3$ :: B . F, para achar hum cubo, que ſeja o dobro de B^3; naõ he neceſſario mais do que dobrar B, e entre B, e eſſe duplo, que chamo F, achar C, e D dous meyos proporcionaes (ao diante veremos, como eſſes meyos ſe achaõ) e ſe F he o dobro de B, o cubo de C ſerá o dobro do cubo de B.

PROPOSICAM XII.

Theorema.

EM huma progreſſaõ geometrica, o quadrado de quadrado do primeiro termo, he para a meſma po-

potencia do ſegundo, como o primeiro termo para o que ſe ſegue ao quarto.

36 ESta progreſſaõ geometrica ſe prova, como as duas precedentes; e o meſmo he de todas as mais potencias.

PROPOSIC,AM XIII.

Problema.

AChar hum meyo proporcional entre duas grandezas dadas.

37 Multipliquem-ſe as duas grandezas dadas, huma pela outra, e a raiz quadrada do producto ſerá o meyo proporcional buſcado, como ſe prova (*numer.* 41. *liv.* 3.) e aſſim ſe as grandezas dadas forem BC, a raiz quadrada do producto BC, ſerá o meyo proporcional entre B, e C: ſe nos derem eſtes numeros 2, e 18, multiplicados fazem 36, cuja raiz quadrada 6 he meyo proporcional, entre 2, e 18. deſta ſórte: 2.6::6.18.

Por outro modo.

SE os numeros dados forem quadrados, como, por exemplo, 4, e 16, tomaremos as ſuas duas raizes 4, e 2, que multiplicadas fazem 8, meyo proporcional entre 4, e 16, como he evidente. (*numer.* 16.)

PROPO-

PROPOSIÇAM XIV.

Problema.

ACHar dous meyos proporcionaes entre duas grandezas dadas.

Esta proposiçaõ he algumas vezes impossivel; como tambem a precedente, quando as grandezas forem numeros; ao diante diremos em que casos.

38 Querendo achar dous meyos proporcionaes entre os dous numeros 2, e 16, chamaremos a esses dous meyos proporcionaes M, e N, desta sórte ÷ 2 . M : : N . 16; pelo (*num.* 29.) o cubo 2, que he 8, he para M^3, como 2 para 16; e assim 8 . M^3 : : 2 . 16, ou 2 . 16 : : 8 . M^3; e esta proporçaõ está reduzida a huma de quatro termos, dos quaes os tres primeiros saõ conhecidos; e assim acharemos o valor do cubo M^3, multiplicando 16 por 8, e o producto 128 dividiremos por 2, primeiro termo, e o quociente 64 serà o valor de M^3, cuja raiz cubica 4 será o primeiro meyo proporcional: para achar o segundo meyo proporcional, se busque entre 4, e 16 hum meyo proporcional, que he 8, que serà igual a N; e assim estaõ achados os dous meyos proporcionaes entre 2, e 16, que saõ 4, e 8, desta sórte, 2 . 4 : : 8 . 16.

De outro modo.

SE os numeros dados forem cubos, como 8, e 64, tomaremos as suas raizes cubicas, 2, e 4, e multiplicaremos o quadrado da primeira 2 pela segunda, a saber, 4 por 4, que fazem 16, e o quadrado da ſegunda raiz pela primeira, a ſaber, 16 por 2, que fazem 32 pelo ſegundo meyo proporcional, como ſe colhe do (*num.* 22.) e aſſim 8.16 :: 32.64.

PROPOSIÇAM XV.

Problema.

39 ENtre duas grandezas dadas, achar quantos meyos proporcionaes ſe quizerem.

Sejaõ as duas grandezas dadas B, e L, entre as quaes queremos achar cinco meyos proporcionaes, a ſaber, C, D, F, G, H; pelo (*num.* 36) B he para L, como a ſexta potencia de B para a ſexta potencia de C, primeiro meyo proporcional, deſta ſórte $B.L :: B^6.C^6$; e aſſim ſe achará o valor da ſexta potencia de C; que he o quarto termo de huma proporçaõ, da qual os tres primeiros termos ſaõ conhecidos B, L, e B^6.

Sendo conhecido eſte primeiro termo, ſe acharà o ſegundo; porque pelo (*num.* 36.) ſerà $C.L :: C^5.D^5$; e conhecido o valor de D, ſe achará o de F; pois que $B.L :: D^4.F^4$; e aſſim dos mais.

Por outro modo.

POdemos tirar as raizes das potencias das grandezas dadas, entre as quaes ſe querem achar muitos meyos proporcionaes, e multiplicar eſſas raizes do modo, que fica dito (*num.* 25.)

ADVER-

ADVERTENCIA.

40 NEm ſempre ſe póde expreſſar por numeros, o valor das grandezas.

PROPOSIÇAM XVI.

Theorema.

SE duas grandezas de duas dimenſoens forem iguaes, as duas raizes da primeira ſeráõ reciprocas às duas raizes da ſegunda; iſto quer dizer, que ſeràõ eſſas raizes meyos, ou extremos de huma proporçaõ de quatro termos.

41 Sejaõ as duas grandezas BF, e CD iguaes; as ſuas raizes B, F; C, D; ſaõ reciprocas, a ſaber, B. C :: D. F; o que he evidente, como ſe demonſtrou (*no liv.* 3. *num.* 44.) e a razaõ he; porque ſendo quatro grandezas, de tal modo diſpoſtas, que o producto dos extremos ſeja igual ao producto dos meyos, eſſas quatro grandezas ſaõ proporcionaes.

Varios theoremas ſe pódom demonſtrar pelo que fica dito neſte, e nos mais livros, ſem que ſeja neceſſario aumentar o numero das propoſiçoens.

Theorema I.

42 O Producto dos meyos, ou dos extremos, he meyo proporcional, entre o producto dos antecedentes, e o producto dos conſequentes.

Seja B.C :: D.F: (*num.* 21.) BB.CD :: B.C, e CD.

e CD.CF::D.F: logo BD.CD::CD.CF, ou ÷ BD.CD.CF: logo CD, producto dos meyos, he meyo proporcional entre BB, producto dos antecedentes, e CF, producto dos consequentes: do mesmo modo se póde mostrar, que BF he meyo proporcional entre BD, e CF.

Theorema II.

43 OS quadrados dos dous termos de cada razaõ saõ entre si, como o producto dos antecedentes, para o producto dos consequentes.

Seja B.C::D.F, a proporçaõ, que se pede, será BB.CC::BD.CF; o que se demostra com facilidade; porque sendo B.C::D.F, serà tambem B.D::C.F: pelo (*num.* 15.) BB.BD::B.D, e CC.CF::C.F; mas porque a razaõ de C.F, he a mesma, que a de B.D: logo tambem BB.BD::CC.CF, e BB.CC::BD.CF; e he o que se queria mostrar.

Theorema III.

44 EM huma progressaõ ÷ C.D.F.G, hum desses termos C serà para o outro F, como a soma dos quadrados de C, e de F dos antecedentes, he para a soma dos quadrados, de D, e de G dos consequentes.

Isto quer dizer C.F::CC+DD.D+FF; porque (*num.* 28.) CC.DD::C.F: digo, e DD.FF::D.G; mas a razaõ de D.G he a mesma, que a de C para F: logo ajuntando a CC, e a DD, grandezas, que tenhaõ a mesma razaõ, será (*liv.* 3. *numer.* 34.) CC+DD.DD+FF::CC.DD: logo tam-

tambem CC+DD.DD+FF::C.F; e he o que se queria demonstrar. Este theorema mostra o caminho para mostrar outros muitos theoremas semelhantes.

Theorema IV.

45 COmo C.G, assim a soma dos cubos de C, e de D, e de F, he para a soma dos cubos de D, de F, e de G.

Theorema V.

46 COmo C.F, assim o quadrado de C+D he para o quadrado de D+F; e como C.G, assim o cubo de C+D+F para o cubo de D+F+G.

Theorema VI.

47 COmo C para F, assim a differença dos quadrados de C, e de D, para a differença dos quadrados de D, e de F.

As demonstraçoens destes ultimos theoremas saõ faceis; porque sendo CC.DD::C.F, e DD.FF::C.F: logo (*num.* 36. *liv.* 3.) tirando de DD, e de FF as grandezas CC, e DD, que tem a mesma razaõ, ficaràõ proporcionaes DD−CC.FF−DD::C.F; mas DD−CC he a differença de CC, e de DD, como tambem FF−DD he a differença entre DD, e FF.

LOGICA ANALITICA, LIVRO V.

DOS QUEBRADOS, E DAS OPERAC,OENS DA Arithmetica ſobre elles, conſiderados como razões.

CAPITULO I.

1 OS quebrados ſaõ os modos de expreſſar a razaõ, que tem entre ſi duas, ou mais grandezas, ou numeros; e aſſim ſaõ razoẽs.

Author houve, que diſſe, ſe naõ tinha feito reflexaõ ſobre ſe poderem fazer todas as operaçoens da Arithmetica ſobre as razoens; o que naõ deixa de cauſar alguma admiraçaõ; porque em todos os tempos ſempre ſe fizeraõ as operaçoens da Arithmetica ſobre os quebrados, iſto he, ſomando, diminuindo, multiplicando, e dividindo os quebrados, que ſaõ certamente razoens.

As expressoens, em que as fracçoens, ou quebrados consistem, saõ muy naturaes, e muy proprias para expressar o que quizerem. A esta expressaõ $\frac{5}{6}$ se chama quebrado, e denota, que huma grandeza inteira foy partida, ou quebrada em 6 partes, ou que tem 6 partes, das quaes lhe tomamos 5: esta expressaõ $\frac{5}{6}$ he logo propriamente para notar huma razaõ; porque, como temos dito, razaõ, he huma quantidade relativa, que exprime o modo, com que huma grandeza contém, ou he contheuda em outra; o que se conhece pela divisaõ; e por tanto, o quociente da divisaõ de duas grandezas, he o expoente da sua razaõ; mas nós temos visto, que o sinal da divisaõ de hum numero por outro he, pondo hum por cima, e outro por baixo de huma linha; e assim querendo dividir B por C, escreveremos $\frac{B}{C}$; e o quociente de B, dividido por C he $\frac{B}{C}$, e nota a razaõ de B para C; pela mesma razaõ $\frac{5}{6}$ he hum sinal, que mostra, que 5 he dividido por 6, e juntamente o expoente da razaõ de 5 para 6.

2 No livro primeiro fica mostrado, que quando o divisor for mayor, que o numero, que ha de ser dividido, he necessario pôr esse numero por baixo de huma risca, e o que se divide, por cima; por exemplo, querendo-se dividir 5 por 6, devemos escrever $\frac{5}{6}$: chama-se esta expressaõ hum quebrado; porque se suppoem, que cada unidade do resto do numero, que se ha de dividir, he partida em tantas partes, quantas saõ as unidades do divisor; por exemplo, se este numero 5 for 5 moedas, que sobejaraõ de huma divisaõ, entre seis pessoas; como cada huma naõ póde levar huma moeda, se suppoem cada moeda dividida em seis partes, e tocará a cada huma $\frac{5}{6}$ de moeda.

CAPI-

CAPITULO II.

Das definiçoens, e explicaçaõ dos termos.

DEFINIC,AM I.

3 DEfiniçaõ, he huma expressaõ, que declara a razaõ da parte de hum numero inteiro, que he dividido em tantas partes, quantas se fizerem com esse numero inteiro.

Seja A huma grandeza inteira, por exemplo, huma vara, que se considèra dividida em 5 partes: este numero 5 denota o numero das partes em que a grandeza A he dividida; e supponho, que queremos tomar tres partes, pondo os 5 por baixo de huma linha, poremos por cima o numero das partes, que queremos tomar; e assim 3 quintos, ou 3 quintas partes, será a expressaõ das partes para o todo.

DEFINIC,AM II.

4 EM qualquer quebrado, o numero, que fica por baixo da linha, se chama denominador; porque significa em quantas partes a grandeza inteira he dividida. Neste quebrado $\frac{3}{4}$ o numero 4 se chama denominador; porque dá nome às partes; e por isso se chamaõ quartas partes; se fosse 5, seriaõ quintas partes, &c,

DEFINIC,AM III.

5 O Numero, que se poem por cima da linha, em qualquer quebrado, se chama numerador,

rador: neste quebrado $\frac{3}{4}$, o numero tres he o numerador; porque diz o numero de partes, que se devem tomar da grandeza inteira; e querendo tomar da grandeza inteira A, ou 4, 3 partes, escreveremos $\frac{4}{3}$

DEFINIC,AM IV.

6 QUebrado de quebrado, saõ os numeros, que exprimem as partes das partes de hum inteiro.

Seja A huma moeda, e B a sua metade: o numero, que expressar alguma parte de B, serà o numero duas vezes quebrado, ou quebrado de quebrado.

O primeiro quebrado he $\frac{1}{2}$, pois que he metade de A; e se esta metade se romper em outra metade, serà a sua expressaõ $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$; e assim como hum quebrado simples declara a razaõ de hũa parte para o seu todo, hum quebrado de quebrado exprime a razaõ de huma parte para outra menor, da mesma grandeza.

Tambem se poderia dividir em huma terceira, ou quarta vez, em metade da metade da metade, como $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$; e assim indefinitamente.

CAPI-

CAPITULO III.

Dos axiomas, ou propoſiçoens evidentes ſobre os quebrados.

AXIOMA I.

7 DEnominador de hum quebrado vale ſempre inteiro.

Neſte quebrado $\frac{3}{4}$, o numero 4 vale hum inteiro; porque moſtra em quantas partes o inteiro he dividido; pois que comprehende todas as ſuas partes, as quaes juntas ſaõ iguaes ao todo.

AXIOMA II.

8 SE o numerador he igual ao denominador, tambem valerá hum inteiro; ſe for menor, valerá menos, ſe for mayor, valerá mais, que hum inteiro.

Eſte quebrado $\frac{4}{4}$, o numerador 4 vale hum inteiro; porque cõprehende todas as partes do denominador; e aſſim vale tanto como elle.

Neſte quebrado $\frac{2}{4}$, o numerador 2 vale menos, que o denominador 4; porque naõ vale mais, que duas partes, que ſaõ metade do denominador 4.

Neſte quebrado $\frac{6}{4}$, o numerador 6 vale mais, que o ſeu denominador 4; porque comprehende todas

das as partes do denominador, e mais 2, que juntas ſazem metade do denominador.

AXIOMA III.

9 OS quebrados naõ ſaõ outra couſa mais, do que huma expreſſaõ da razaõ, que hum numero inteiro tem para a ſua parte, ou partes; por exemplo, $\frac{3}{4}$ de hũa moeda, he hum quebrado, q̃ declara o valor de hum numero, que moſtra a razaõ, que 3 tem para 4.

AXIOMA IV.

10 AInda que a hum quebrado ſe ajunte, ou ſe diminua o ſeu numerador, ou denominador, o ſeu valor ſerá ſempre o meſmo, ſe depois deſſe accreſcentamento, ou diminuiçaõ ficar a meſma razaõ, que de antes tinha hum para outro.

Como temos dito, que os quebrados ſaõ razoens, he certo, que ficando a meſma razaõ, fica o meſmo quebrado; e por iſſo $\frac{2}{4}$ $\frac{6}{12}$ $\frac{5}{10}$, naõ vale mais, que metade de hum inteiro, como $\frac{1}{2}$; porque ſempre o denominador he o dobro do numerador; e aſſim poſto que ſejaõ differentes os caracteres mayores, ou menores, accreſcentados, ou diminuidos, ſe conſervarem a meſma razaõ, teraõ ſempre o meſmo valor.

CAPI-

C A P I T U L O IV.

Das preparaçoens necessarias para fazermos as operaçoens da Arithmetica, sobre os quebrados, ou razoens.

P R O P O S I Ç A M I.

Problema.

REduzir hum inteiro às suas partes.

Será necessario multiplicar o inteiro pelo numero das partes, a que o quizermos reduzir.

11 Sejaõ, por exemplo, 10 moedas de ouro, que queremos reduzir em tostoens: como cada moeda he composta de 48, multiplicaremos 48 por 10, e o producto 480 será o numero dos tostoens.

C O R O L A R I O I.

12 POr meyo desta proposiçaõ se dà o mesmo nome a duas grandezas differentes; o que dà melhor a conhecer a razaõ de huma para outra.

Por exemplo, comparando duas moedas com 48 tostoens, reduzindo as duas moedas nas suas partes, que saõ 96 tostoens, percebemos mais claramente a razaõ, que ha entre hum todo, e as sus partes.

C O R O L A R I O II.

13 PEla mesma proposiçaõ podemos dar valor à moeda, e às medidas.

Avaliar huma moeda, ou grande medida, he declararlhe o valor por outra moeda, ou por outra medida de differente eſpecie mais commua, ou mais conhecida.

Se quizermos ſaber, quanto valem 100 moedas de ouro reduzidas a toſtoens, multiplicaremos 100 por 48, e o producto ſerà 4800 toſtoens; e iſto he reduzir huma moeda, ou medida mayor a outras menores.

COROLARIO III.

14 PODemos reduzir hum inteiro, ſeja moeda, ou medida, a hum quebrado, dado o denominador.

Supponho, que o tal denominador dado he 6, e ſeja o numero inteiro 4: deve-ſe multiplicar o numero 4 pelo denominador dado 6, e o producto ſerá o numerador do quebrado, a ſaber, $\frac{24}{6}$, que valem o meſmo, que 4 inteiros; e aſſim ſe poderà reduzir qualquer inteiro a quebrado, com qualquer denominador.

Para reduzir huma grandeza, como A, a hum quebrado, que o denominador ſeja D: ſegundo o que fica dito, multiplicaremos A por D, e o producto A D ſerá o numerador do quebrado, a ſaber, $\frac{AD}{D}$: ſe nos derem a reduzir a grandeza A a hũ quebrado, cujo denominador ſeja $A + B$, multiplicaremos A por $A + B$, e o producto $AA + AB$ ſerá o numerador do quebrado $\frac{AA + AB}{A + B}$.

CORO-

COROLARIO IV.

15 PAra reduzir hum inteiro em quebrado, basta escrever esse numero por numerador, e o mesmo numero por denominador, ou a unidade.

Por exemplo, para pormos em quebrado huma moeda, escreveremos $\frac{1}{1}$; porque o numerador, sendo igual ao denominador (*num.* 7.) vale hum inteiro, ou huma moeda.

Tambem por letras se póde reduzir, por exemplo, a grandeza x a este quebrado $\frac{x}{x}$, ou simplesmente $\frac{x}{1}$, porque dividindo x por 1, o quociente he x, a saber, a grandeza inteira.

ADVERTENCIA.

16 DEve-se advertir, que para notar as partes de huma grandeza, que se expressa por letras, he necessario ajudarse dos caracteres da Arithmetica; por exemplo, se quizermos expressar alguma parte do quadrado AA, por exemplo, a quarta parte, escreveremos esta expressaõ literal $\frac{1}{4}$ AA.

PROPOSIC, AM II.

Problema.

AJuntar as partes de huma grandeza ao seu todo.

17 Para esta operaçaõ, será necessario dividir o nu-

numero das partes dadas, pelo numero, que denota, quantas vezes o inteiro, ou a grandeza inteira, as contém.

Por exemplo, para reduzir 4800 tostoens a moedas de ouro, dividiremos 4800 por 48, e o quociente 100 ferà o numero das moedas, como he evidente (*num.* 12.)

Por meyo desta proposiçaõ podemos dar hum mesmo nome a duas grandezas differentes, e por esse meyo descobrirmos mais claramente a razaõ de huma grandeza para outra. Sejaõ dadas duas grandezas, ou numeros differentes, a saber, reis, e tostoens, e queremos, que tenhaõ o mesmo nome: naõ tem mais misterio, que reduzir os reais a tostoens, ou os tostoens a reais, e ficaõ com o mesmo nome, conhecendo-se assim mais claramente a razaõ, que tem hum para outro; e assim querendo-se saber, que razaõ tem 600 reis para 9 tostoens, reduziremos os tostoens a reais, ou os reais a tostoens; e será igualmente conhecida a razaõ de 6 tostoens para 9, &c.

COROLARIO I.

18. POr meyo desta proposiçaõ daremos hum mesmo nome a grandezas differentes, por onde se conheça mais claramente a razaõ, que tem humas para outras.

Sejaõ dadas as duas grandezas 60 braças, e 50 palmos, e queremos, que estas duas grandezas tenhaõ o mesmo nome: para o conseguir, multiplicaremos as braças pelo numero dos palmos, que cada huma contém, a saber, por 10; e seraõ 600 pal-

palmos; por onde vemos mais claramente a razaõ, que tem 600 para 50, que he a ſua duodecima parte: tambem podiamos reduzir os palmos a braças; e ſeriaõ 5 braças, que comparadas com 60, ſeriaõ a ſua duodecima parte.

COROLARIO II.

19 PODemos tambem reduzir as moedas, ou medidas pequenas a grandes, a ſaber, o que valem humas, a reſpeito de outras.

Se quizermos ſaber, quantas varas tem 120 palmos, divida-ſe eſte numero por 5, que a vara contèm; e o quociente 24 moſtra, que 120 palmos valem 24 varas; e aſſim dos mais generos.

COROLARIO III.

20 TAmbem ſe póde reduzir hum quebrado em numeros inteiros, e conhecer quantos inteiros vale. Iſto ſuppoem, que o quebrado ſempre vale mais, do que o inteiro, a que chamaõ quebrados improprios; o que ſe conhece, quando o numerador he mayor, que o ſeu denominador: ſeja, por exemplo, eſte quebrado $\frac{24}{4}$, divida-ſe o numerador pelo ſeu denominador, iſto he, 24 por 4, e o quociente 6 moſtra, que $\frac{24}{4}$ valem 6 inteiros.

PROPOSIC,AM III.

Problema.

REduzir os quebrados, ou razoens a hum meſmo denominador, ou conſequente.

21 Isto he o mesmo, que reduzir duas razoens a expressoens, em que tenhaõ o mesmo consequente, como ensinamos no livro 4.

Sejaõ estes dous quebrados, ou razoens $\frac{2}{5}$, e $\frac{3}{4}$, os quaes se querem reduzir a hum mesmo denominador, ou (o que vale o mesmo) ao mesmo consequente, sem mudar o seu valor. Para o conseguir, multiplicaremos o denominador do primeiro, pelo denominador do segundo, e o producto será o denominador, ou consequente commum; e multiplicando o numerador do primeiro, pelo denominador do segundo, o producto será o numerador, ou o antecedente do primeiro quebrado, e para numerador do segundo, multiplicaremos o numerador do segundo quebrado, pelo denominador do primeiro, e o producto será o numerador do segundo quebrado, como aqui parece.

$$\frac{2}{5} \qquad \frac{3}{4}$$
$$\frac{8}{20} \qquad \frac{15}{20}$$

Sejaõ os quebrados por letras $\frac{B}{X}$, e $\frac{C}{Z}$, se seguirmos o que fica dito dos numeros, multiplicaremos X por Z, e serà o producto XZ o denominador de ambos os novos quebrados; e logo multiplicando B por Z, serà o producto o numerador do primeiro, e X por C o numerador do segundo, como aqui parece.

$$\frac{B}{X} \qquad \frac{C}{Z}$$
$$\frac{BZ}{XZ} \qquad \frac{XC}{XZ}$$

CO-

COROLARIO I.

22 POr meyo desta proposiçaõ podemos conhecer claramente a razaõ de dous quebrados differentes.

Sejaõ os 2 quebrados $\frac{2}{5}$, e $\frac{3}{4}$, e queremos conhecer o excesso de hum sobre outro: para o conseguir, se reduzaõ esses dous quebrados a hum mesmo consequente, como temos ensinado, e depois de reduzidos, seraõ $\frac{8}{20}$, e $\frac{15}{20}$, que saõ os mesmos, ou tem o mesmo valor; e assim se vê claramente, que o primeiro he menor, que o segundo, por $\frac{7}{20}$.

Reduzindo os dous quebrados, ou razoens $\frac{B}{X}$, e $\frac{C}{Z}$ ao mesmo nome, como $\frac{BZ}{XZ}$, e $\frac{CX}{XZ}$, q̃ tem ambos o mesmo denominador, ou consequente, se vê mais claramente, qual he a razaõ, que tem entre si, a qual he de BZ para CX.

COROLARIO II.

23 DAdos dous quebrados, podemos conhecer, qual delles he mayor, ou menor.

Para bem entender, em que consiste o excesso de huma razaõ sobre outra, se deve notar, que, sendo a razaõ hum modo de conter, ou ser contheudo, a respeito de outra grandeza, que igual, ou desigualmente contèm, quando com ella se compára, devemos entender, que isto se entende particularmente do primeiro termo dessa razaõ, que se compára; e assim quando o antecedente de huma razaõ he mayor, a respeito do seu consequente, do que o antecedente

cedente de outra razaõ, a respeito do seu consequente, a primeira razaõ he mayor, que a segunda: logo para notarmos sensivelmente o excesso destas duas razoens, lhe devemos dar o mesmo consequente, ou reduzillas a hum mesmo nome.

Por exemplo, estas duas razoens $\frac{2}{7}$, e $\frac{4}{9}$, reduzidas a hum mesmo consequente, saõ $\frac{18}{63}$, e $\frac{28}{63}$, q̃ mostraõ claramente, que a primeira razaõ he mais pequena, que a segunda, tanto, quanto vay de 28 a 18, comparados com 63.

LEMMA I.

Achar a mayor commua medida, ou o mayor commum divisor de dous numeros dados.

24 Chama-se commua medida, ou commum divisor aquelle numero, que divide outros dous exactamente; e assim para achar o mayor commum divisor de dous numeros dados, serà necessario tirar hum de outro.

CASO I.

25 SE o excesso do mayor mede inteiramente o menor, esse serà o commum divisor de ambos, e o mayor de todos os communs divisores.

Sejaõ dados os dous numeros B = 25, e D = 30, tirando 25 de 30, o excesso 5 méde justamente a 25, e deve tambem medir a 30 justamente, e he o mayor divisor entre esses 2 numeros, ou grandezas B, e D; porque primeiramente D naõ he mayor, que B, mais que por 5; e este numero 5 he contheudo do 5 vezes em 25: logo he neceſſario, que ſeja huma vez mais em D, ou em 30; e aſſim o deve medir exactamente: Em ſegundo lugar, devemos moſtrar, que 5 he a mayor medida commua, ou o mayor commum diviſor dos dous numeros dados; para o que ſupponhamos, que ha outro diviſor mayor, que chamaremos C; ſe eſta ſuppoſiçaõ he poſſivel, ſendo D mayor, que B, ſerá neceſſario, que C ſeja contheudo mais vezes em D, do que em B; mas o numero C, ſendo mayor, igual, ou menor, que 5, que he o exceſſo de B ſobre D, ſe he mayor, naõ póde medir exactamente B, e D; ſe he menor ſe ſegue o meſmo; e ſe he igual, ſerá o numero 5 o mayor commum diviſor de B, e D; e aſſim a ſuppoſiçaõ era impoſſivel.

CASO II.

26 SE o exceſſo do mayor numero ſobre o menor, naõ medir o mais pequeno, ſerà neceſſario diminuirlhe eſſe exceſſo do mais pequeno até achar o numero, que meça exactamente o menor; o que ſe entenderà melhor por hum exemplo: ſejaõ dados os numeros 21, e 27; o exceſſo 6 do mayor para o menor, naõ méde a 21, numero mais pequeno; e aſſim tiro 6 de 21, e reſtaõ 15, que naõ medem o numero mais pequeno 6; e aſſim diminuindo 6 de 15, reſtaõ 9, e tirando 6 de 9, reſtaõ 3, que medem exactamente a 6: digo, que 3 he o mayor commum diviſor dos numeros dados 21, e 27; porque pela demonſtraçaõ precedente, o numero 3 he a commua medida, e a mayor, que mede 9, e 6; e porque 15 he mayor, que 9 por 6, he preciſo, que 3 ſeja a commua medida de 9, e de 15, e a mayor; porque ſe houveſſe outra mayor, que 3, naõ ſeria 3 a mayor medida de 9, e de 6, e da meſma ſòrte ſe

moſtrará, que 3 he a commua medida, e a mayor, que mede 15, e 21, e de 21, e 27.

LEMMA II.

27 A Char o menor numero, que poſſa medir dous numeros dados: ſe hum dos numeros dados he medido pelo outro, eſſe numero ſerá o buſcado.

Sejaõ os numeros dados 3, e 6, o primeiro 3 méde a 6; e aſſim fica evidente, que 6 he o mais pequeno numero, que póde ſer medido pelos dous numeros 3, e 6; ſe hum dos dous numeros dados, naõ medir o outro, ſerá neceſſario multiplicar hum pelo outro; e o producto ſerá o numero buſcado.

Sejaõ dados os numeros 3, e 4; o ſeu producto 12 he o mais pequeno numero, que póde ſer medido por 3, e por 4; mas iſto ſó tem lugar, e he verdadeiro, quando os dous numeros dados naõ excedem o numero mayor dos caractéres, que he 9.

A razaõ geral he, de achar os dous mais pequenos, que ſejaõ os expoentes de ſua razaõ; como ſe for 8, e 12 os numeros dados, ſeria neceſſario buſcar 2, e 3, e multiplicar o mayor pelo menor, e o menor pelo mayor, que darà o meſmo producto, o qual he o numero buſcado; porque multiplicando 8 por 3, e 12 por 2, o numero 24 he o producto de huma, e outra multiplicaçaõ.

PRO-

PROPOSICAM IV.

Problema.

REduzir hum quebrado, ou razaõ aos menores termos.

28 Será neceſſario dividir o numerador, e o denominador do quebrado, pela ſua mayor commua medida.

Seja eſte quebrado $\frac{30}{48}$: divida-ſe 30, e 48 por 6, que he a ſua mayor commua medida, e os quocientes 5, e 8 nos daraõ o novo quebrado $\frac{5}{8}$; porque (*num.* 39. *liv.* 3.) 5 he para 8, como 30 para 48; e pelo (*numer.* 10.) os dous quebrados $\frac{30}{48}$, e $\frac{5}{8}$ valem huma meſma couſa; e he certo, que eſte quebrado $\frac{30}{48}$ ſe acha reduzido aos menores termos; porque ſe ſe dividir 30, e 48 por 6, que he o ſeu mayor commum diviſor, nenhuma outra diviſaõ póde dar menores expoentes, que os quocientes deſta diviſaõ; pois que os mayores diviſores daõ menores quocientes; e aſſim feita eſta reducçaõ, vemos mais claramente a razaõ, que tem o numerador para o denominador.

Os quebrados, que ſe expreſſaõ por letras, ſe reduzem a menores termos com muita facilidade; porque, ſegundo o que fica dito, quando as meſmas letras ſe achaõ nas grandezas, que ſe dividem, e nos diviſores, baſta deſvanecer as letras ſemelhantes, que ſe achaõ em huma, e outra grandeza, como, por exemplo, para dividir BX por X, baſta deſvanecer X de huma, e outra parte, e fica B ſendo o quociente

da

da divisaõ: do mesmo modo, para reduzir a menores termos a razaõ, ou quebrado AAC, ACD basta desvanecer as letras semelhantes, e o quociente será $\frac{A}{D}$, que vale o mesmo, que $\frac{AAC}{ACD}$, e fica a razaõ de A para D.

Seja dado este quebrado $\frac{AAC+AAD}{CD+DD}$, que reduzidos a menores termos, será $\frac{AA}{D}$; tambem póde ser este quebrado $\frac{AA+AA}{D+D}$

Como em huma, e outra grandeza se apagaõ as letras semelhantes, que tinhaõ a mesma razaõ, ainda fica a mesma razaõ no quociente; e assim no quebrado acima, será AA.D::AAC+AAD.CD+DD.

Quando dous quebrados tem hum commum denominador, para os reduzir a mais simples termos, de sórte, que conservem sempre hum commum denominador, he necessario naõ apagar mais, do que as letras, que se acharem ao mesmo tempo nos dous numeradores, e no denominador commum, por exemplo, estes dous quebrados, que tem hum comum denominador $\frac{BDCD}{AACCD}$, $\frac{A^5C}{AACCD}$, que tirando a letra C, ficaõ de resto $\frac{BDD}{AACD}$, $\frac{A^5}{AACD}$

Se naõ fosse necessario conservar o mesmo denominador, se poderaõ reduzir os quebrados a cima nestes $\frac{BD}{AAC}$, e $\frac{A^5}{ACD}$.

PROPO-

PROPOSIÇAM V.

Problema.

REduzir os quebrados de quebrados a hum só quebrado.

29 Seja dado o quebrado de quebrado $\frac{B}{C}$ de $\frac{C}{Z}$; o producto dos denominadores serà o denominador do quebrado, que se busca, e o producto dos numeradores serà o numerador do tal quebrado, que he $\frac{BC}{CZ}$.

DEMONSTRAÇAM.

PEla definiçaõ dos quebrados de quebrados, este quebrado de quebrado $\frac{B}{C}$ de $\frac{C}{Z}$ declara a razaõ de B, parte de C á grandezà inteira Z, de que C he tambem parte, e por tanto a razaõ de B para Z he composta da razaõ de B.C, e da razaõ de C.Z (*liv.* 4. *num.* 10.) e pelo (*liv.* 4. *num.* 14.) a razaõ de BC.CZ he composta da razaõ de B.C, e da razaõ de C.Z: logo a razaõ de BC.CZ he igual á razaõ de B.Z, e he o que se busca; porque reduzir hum quebrado de quebrado a hum sò quebrado, he declarar juntamente a razaõ da parte á grandeza inteira.

Seja dado o quebrado de quebrado $\frac{2}{4}$ de $\frac{5}{8}$: seguindo a regra a cima, multiplicaremos 4 por 8, e o producto 32 serà o denominador do quebrado, q̃ se busca, e o producto do numerador 2 pelo numerador 5, serà o numerador do tal quebrado; e assim $\frac{10}{32} = \frac{2}{4}$ de $\frac{5}{8}$

ADVERTENCIA.

30 SE nos derem a reduzir a hum ſó quebrado, o quebrado de quebrado de quebrado, iſto he, $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{8}$, multiplicaremos o denominador do primeiro pelo denominador do ſegundo, iſto he, 4 por 6, e o producto 24 pelo denominador do terceiro; o que faz 192, que ſerá o denominador do quebrado buſcado; e multiplicando o numerador do primeiro pelo numerador do ſegundo, a ſaber, 3 por 5, e o producto 15, pelo numerador do terceiro; o que faz 105, para numerador do quebrado buſcado, que he $\frac{105}{192}$.

PROPOSIC,AM VI.

Problema.

REduzir hum quebrado a termos conhecidos.

31 Seja o quebrado, que queremos reduzir $\frac{2}{3}$ de huma moeda de ouro; e queremos ſaber quantos toſtoens valem: multiplicaremos o numerador, e o denominador pelo numero dos toſtoens, que tem huma moeda, e o producto 96 ſerá para o producto 144, como 2 para 3 (*liv.* 3. *num.* 38.) e dividindo 96, e 144 por 3, denominador do quebrado dado, os quocientes 32, e 48 teraõ ainda a meſma razaõ de 2 para 3: logo $\frac{2}{3}$ he igual a $\frac{32}{48}$, iſto he os dous terços da moeda de ouro.

Para eſta operaçaõ naõ he neceſſario multipli-

car

car o denominador; o que ſó ſe fez para darmos ao meſmo tempo a demonſtraçaõ, em como ſempre a razaõ ſe conſerva; e aſſim baſta multiplicar o numerador pelo numero dos toſtoens contheudos na moeda, e repartir o producto pelo denominador do quebrado: logo multiplicando 48 por 2, e repartindo o producto 96 por 6, dará no quociente 32 toſtoens pelos 2 terços da moeda.

Se ſuccedeſſe naõ ajuſtar o quebrado para o numero das partes da moeda, ou de outra qualquer grandeza, e ficaſſe algum reſto, com eſſe reſto ſe, obraria de novo atè chegar á parte conhecida, ou quantidade taõ pequena, que ſe naõ faça caſo della.

PROPOSIÇAM VII.

Problema.

Dividir hum numero pequeno por outro mayor.

32 Para dividir hum numero pequeno por outro mayor, poremos o menor dividendo por numerador, e o mayor por denominador de hum quebrado, deſta ſórte $\frac{2}{5}$; e eſte quebrado expreſſa, e declara o valor do quociente buſcado.

DEMONSTRAÇAM.

Se o numero 2 denota duas moedas de ouro a repartir por 5 homens, cada hum terà 2 quintas partes de moeda de ouro (*numer.* 14.) para reduzir eſſe numero inteiro 2 em 1 quebrado, de que 5 ſeja ja denominador, deve-ſe multiplicar 2 por 5, e o producto 10 ſerá o numerador do quebrado, que ſe buſca, que he $\frac{10}{5}$ igual a 2 inteiros; mas para repartir 10 quintas partes de huma moeda entre 5 homens, he evidente, que ſe deve dividir 10 por 5, e dará no quociente o numero 2; pois que eſſe numero 10 naſceo da ſua multiplicaçaõ; e aſſim eſcrevendo o numero mayor ſobre o menor ſe fizeraõ abreviadamente duas operaçoens: A primeira reduzindo hum numero inteiro em hum quebrado, que tem por denominador o diviſor; e a ſegunda dividindo o numerador do quebrado, pelo diviſor propoſto; e iſſo com muita facilidade.

Atègora naõ temos podido dar à demonſtraçaõ deſta operaçaõ, que propuzemos no livro primeiro; o que agora cumprimos.

Eſta explicaçaõ he ſò para ficar a regra demonſtrada; porque depois, para repartir as dez quintas partes de huma moeda de ouro por 5 homens, naõ tem difficuldade alguma.

CAPITULO V.

Do ſomar, diminuir, multiplicar, e repartir das razoens, e dos quebrados.

ADVERTENCIA.

33 TEmos dito, que quando muitas razoens tem por conſequente huma meſma grandeza, a grandeza de cada antecedente, póde ſer conſiderada, como grandeza abſoluta, a reſpeito

peito dos outros antecedentes; porque he claro, e certo, que muitos terços de huma meſma grandeza, por exemplo, de huma moeda de ouro, ſaõ entre ſi grandezas abſolutas: logo para ſomarmos $\frac{2}{3}$ com $\frac{4}{3}$ naõ he neceſſario mais regras, que as ordinarias; e aſſim $\frac{2}{3}$ com $\frac{4}{3}$ fazem $\frac{6}{3}$; mas para dar a conhecer, que eſſe numero 6 ſignifica $\frac{6}{3}$ de huma grandeza inteira, eſſes 6 terços ſe lhe poem por baixo o denominador de terços, que he o numero 3; e aſſim eſcreveremos $\frac{6}{3}$; o meſmo ſe póde dizer de quaeſquer outras grandezas, como logo veremos.

E porque quando as razoens, ou quebrados propoſtos ſe achaõ reduzidos a hum meſmo nome, ou a hum meſmo denominador, como entaõ tem hum meſmo conſequente, as operaçoens, que ſe fazem ſobre eſſas razoens, ou quebrados, naõ tem difficuldade alguma.

Nós temos moſtrado, que podemos eſcrever huma razaõ do meſmo modo, que ſe eſcrevem os quebrados, como $\frac{A}{B}$, para notar a razaõ de A para B; e aſſim moſtrando, como ſe fazem as operaçoens da Arithmetica ſobre os quebrados, moſtra como ſe pódem fazer as razoens.

PROPOSIÇAM VIII.

Problema.

A Juntar em huma ſoma muitos quebrados, ou razoens.

34 A primeira cousa, que se deve fazer, he de reduzir os quebrados, ou as razoens a hum mesmo denominador (*num.* 21.)

Sejaõ $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{4}$, que reduzidos a hum mesmo denominador, ou consequente, saõ $\frac{72}{99}$, $\frac{80}{99}$, $\frac{48}{99}$, ajunto em huma soma os 3 numeradores 72, 80, 48, que faz 200, desta sórte $\frac{200}{96} = \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{2}{4}$.

Quando for necessario numeros inteiros ajuntalos a numeros quebrados, reduziremos os inteiros a hum quebrado, que tenha o mesmo nome, que o quebrado dado; e assim para ajuntar 6 a $\frac{2}{8}$, reduzirey 6 à hum quebrado, que tenha o mesmo denominador 8, e serà $\frac{48}{8}$; e este quebrado junto a $\frac{2}{8}$ faz $\frac{50}{8}$

Da mesma sórte ajuntaremos os quebrados literaes: sejaõ dados estes quebrados $\frac{AA}{C}$, e $\frac{BB}{C}$; e a soma serà $\frac{AA+BB}{C}$; a razaõ de AA+BB para C, he a mesma razaõ igual ás duas razoens de AA.C, e de BB.C, juntas em huma soma.

PROPOSIÇAM IX.

Problema.

Diminuir hum pequeno numero quebrado, ou razaõ, de outro mayor.

35 Sejaõ dados os dous quebrados $\frac{4}{6}$, e $\frac{2}{8}$, e queremos diminuir $\frac{2}{8}$ de $\frac{4}{6}$: devem-se reduzir primeiro a hum mesmo denominador, ou consequente, e serà $\frac{32}{48}$, e $\frac{12}{48}$, e tirando 12 de 32, o resto serà $\frac{20}{48}$.

Se

Se for neceſſario diminuir hum quebrado, de hum inteiro, ou hum inteiro de hum quebrado, ſerà neceſſario reduzir hum inteiro a hum quebrado, que tenha o meſmo conſequente do quebrado dado.

Como, para diminuir $\frac{3}{4}$ do numero 8, reduziremos 8 a $\frac{32}{4}$, que tem o meſmo valor, que 8 inteiros; e aſſim diminuindo-lhe os $\frac{3}{4}$, o reſto ſerà $\frac{29}{4}$.

Do meſmo modo, para diminuirmos o quebrado $\frac{AA}{C}$ do quebrado $\frac{BB}{C}$, eſcreveremos $\frac{BB-AA}{C}$.

PROPOSIÇAM X.

Problema.

MUltiplicar hum quebrado por outro, ou huma razaõ por outra.

36 Sejaõ dadas as duas razoens, ou quebrados $\frac{4}{5}$, e $\frac{2}{3}$, reduziremos ambos os quebrados a hum meſmo denominador, ou conſequente $\frac{12}{15}$, e $\frac{10}{15}$, e multiplicando os numeradores hum por outro, o producto 120 ſerà o numerador do producto; e o producto dos dous denominadores 15, e 15, que he 225, o denominador do novo quebrado, ou o producto da multiplicaçaõ dos dous quebrados.

Para multiplicar os dous quebrados a cima $\frac{4}{5}$, e $\frac{2}{3}$, podemos abreviar eſta operaçaõ com mayor brevidade, iſto he, naõ reduzindo os dous quebra-

dos

dos $\frac{4}{5}$, e $\frac{2}{3}$ ao meſmo nome; porque baſta multiplicar os numeradores hum por outro, e o producto ſerà numerador do novo quebrado: da meſma ſórte multiplicando os dous denominadores, o producto ſerá denominador do novo quebrado: o producto de 2 por 4 he 8, e o producto de 5 por 3 he 15, e o novo quebrado he $\frac{8}{15}$: he facil de provar, que eſta operaçaõ he boa, e exacta, pela ſeguinte

DEMONSTRAC,AM.

PAra o que baſta moſtrar $\frac{8}{15} = \frac{120}{225}$; pois que ſaõ compoſtos de razoẽs iguaes; porque a razaõ de 8 para 15 he compoſta de 4 para 5, e de 2 para 3, e $\frac{120}{225}$ he compoſta de 12 para 15, e de 10 para 15, que ſaõ as meſmas razoens, como fica dito (*liv.* 4. *num.* 8.) que as razoens compoſtas ſaõ iguaes às razoens componentes.

Da meſma ſòrte, multiplicaremos as razoens, ou quebrados literaes, como $\frac{B}{C}$ por $\frac{M}{N}$, e ſerà o producto $\frac{BM}{CN}$.

PROPOSIC,AM XI.

Problema.

DIvidir hum quebrado por outro.

37 Em toda a diviſaõ ſe buſca, de que modo o diviſor he contheudo no dividendo, ou a grandeza dada a dividir, que he o meſmo, que buſcar a razaõ do diviſor para o dividendo; porque, como temos viſto, o expoente da razaõ deſſas duas grandezas, he o quo-

ciente de huma razaõ dividida por outra; e aſſim quando nos propoem de dividir hum quebrado por outro quebrado, o que ſe procura ſaber, he a razaõ de hum para outro, a qual he expoente deſſa razaõ.

Quando dous quebrados, ou razoens tem hum meſmo denominador, ou o meſmo conſequente, he certo, que eſſes dous quebrados teràõ entre ſi a meſma razaõ, que os ſeus numeradores: como, por exemplo, he evidente, que $\frac{2}{4}$ he para $\frac{2}{3}$ :: 2 . 3; e aſſim neſſe caſo, o novo quebrado $\frac{2}{3}$ he o expoente da diviſaõ dos dous quebrados $\frac{2}{4}$, e $\frac{3}{4}$; porém ſe os quebrados propoſtos tiverem differentes nomes, os devemos multiplicar em cruz, a ſaber, o denominador de hum pelo numerador do outro, a ſaber, o primeiro pelo ſegundo, e o ſegundo pelo primeiro.

Sejaõ os dous quebrados $\frac{B}{D}$, $\frac{F}{G}$; multiplicaremos D por F, e G por B, e ſerá o expoente $\frac{BG}{DF}$ da razaõ dos dous quebrados propoſtos, como ſe vê pela ſeguinte

DEMONSTRAÇAM.

Multiplicando B por G, e F por D, teremos eſtes dous productos B G, e F D; e ficaõ os dous quebrados propoſtos reduzidos ao meſmo nome $\frac{DF}{DG}$, e $\frac{BG}{DG}$, cujo expoente he $\frac{BG}{DF}$, ſegundo o que fica dito, que quando os dous quebrados tem o meſmo nome, ſaõ entre ſi, como os ſeus numeradores; e he o que ſe queria demonſtrar.

Por eſte methodo dividiremos $\frac{3}{5}$ por $\frac{2}{6}$, multiplicando 5 por 2, que darà 10, que ſe porà por baixo de huma linha, e por cima o producto de 3 por 6; e o quebrado $\frac{18}{10}$ ſerá o expoente da razaõ de $\frac{3}{5}$ para $\frac{2}{6}$.

CAPITULO VI.

Das mais operaçoens da Arithmetica ſobre os quebrados.

38 AS mais operaçoens da Arithmetica ſe fazem ſobre os quebrados, do meſmo modo, que nas grandezas abſolutas; e aſſim naõ devemos tratar deſſas operaçoens; porque para ellas baſta ſaber ſomar, diminuir, multiplicar, e repartir ao ordinario; e ſabendo-as, ſe ſabe a regra de tres, de companhias, e as mais regras, que ſe obráraõ nos numeros abſolutos.

Para tirar as raizes dos numeros quebrados, ſe faz tambem pelo meſmo modo dos numeros abſolutos; porque, por exemplo, para tirar a raiz quadrada do quebrado $\frac{9}{25}$ ſe tire a raiz do numerador 9, que he 3, e a raiz do denominador 25, que he 5, e dará o novo quebrado $\frac{3}{5}$, raiz quadrada de $\frac{9}{25}$: deſta ſórte, $\frac{A}{B}$ he a raiz quadrada de $\frac{AA}{BB}$, e a raiz cubica de $\frac{8}{27}$ he $\frac{2}{3}$; porque a raiz cubica de 8 he 2, e a de 27 he 3: a raiz cubica de $\frac{A^3}{B^3}$ he $\frac{A}{B}$.

Aquî daremos alguns exemplos, em que ſe veja o uſo, que pódem ter os quebrados, e tambem a pratica do que temos enſinado; e nas queſtoens ſe deve notar huma couſa de muita utilidade; e he, que a reſoluçaõ de huma queſtaõ depende muitas vezes ſó-

sómente de se lhe saber expressar os termos.

Hum numero inteiro se póde partir em quantas partes quizerem; e convem escolher a divisaõ propria para resolver a questaõ, como veremos na seguinte.

QUESTAM. I.

39 O Tanque de huma fonte tem três bicas; pela primeira toda a agoa se vasa em 3 horas, pela segunda em 5, e pela terceira em 6.

Pergunta-se, em quanto tempo se vasarà pelas tres bicas?

Segundo esta questaõ he proposta, toda a agoa se vasa pela primeira bica em 3 horas, e se segue, que em huma hora vasarà a terça parte; da mesma sórte pela segunda bica, em huma hora se vasarà a quinta parte, e pela terceira, em huma hora a sexta parte; e assim por todas as 3, sahirà dentro de huma hora: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$; e somando estes tres quebrados pela regra, que temos dado, fazem o quebrado $\frac{63}{90}$, que reduzido a menores termos, serà $\frac{7}{10}$; e assim poderemos dizer, se $\frac{7}{10}$ de toda a agoa se vasaõ dentro de huma hora, em quanto tempo se vasaraõ $\frac{10}{10}$? Estes termos $\frac{7}{10}$ 1 hora, e $\frac{10}{10}$ saõ os primeiros tres termos de huma proporçaõ de quatro termos; e o ultimo termo serà o tempo, em que se vasa toda a agoa.

$$\frac{7}{10} \cdot 1 :: \frac{10}{10}$$

E mul-

E multiplicando o terceiro termo desta proporçaõ pelo segundo, o producto será $\frac{10}{10}$; porque hum naõ altera multiplicando, ou diminuindo esse producto pelo primeiro termo, que he $\frac{7}{10}$, o quociente serà 1, e $\frac{3}{10}$, quarto termo buscado.

$$\frac{7}{10} \cdot 1 :: \frac{10}{10} \cdot 1 \frac{3}{10}$$

E assim diremos, que toda a agoa se vasarà pelas 3 bicas dentro de huma hora, e $\frac{3}{10}$ de outra.

QUESTAM II.

40 AQuilles anda 10 vezes mais depressa, que huma tartaruga, e a quer alcançar, levando-lhe huma legoa de distancia: pergunta-se, quando a poderá alcançar?

Digo, que a deve alcançar à primeira nona parte da segunda legoa; porque em quanto ella faz huma nona parte da segunda legoa, Aquilles fará $\frac{10}{9}$ partes; porque anda 10 vezes mais depressa; mas $\frac{10}{9}$ valem huma legoa, e mais $\frac{1}{9}$ de legoa: logo, &c.

CAPITULO VII.

De outras differentes especies de numeros quebrados.

AS medidas grandes se dividem ordinariamente em outras mais pequenas; e assim podemos considerar os numeros inteiros, como medidas gran-

grandes, e os quebrados, como medidas menores; o que jà deixamos dito, e enſinado o meyo de reduzir eſſas medidas differentes, e de dar às mayores, e menores o meſmo nome, quando he neceſſario fazer com ellas as operaçoens ordinarias da Arithmetica; mas como as grandezas quebradas ſe pódem ſomar, diminuir, multiplicar, e repartir, ſem nenhuma reducçaõ, como ſe poderà facilmente comprehender pelos exemplos ſeguintes; por iſſo nos parececo conveniente tratarmos deſtas operaçoens,

41 Huma moeda de ouro tem 48 toſtoens, cada toſtaõ cinco vintens, cada vintem tem vinte reis; e aſſim tendo differentes ſomas, que fazer de moedas, toſtoens, e vintens, para ſe ſomarem, ſe hiraõ pondo por ordem em huma meſma linha, em differentes lugares, pondo a de mayor valor no primeiro lugar; e aſſim das que ſe forem ſeguindo do modo, que aqui vay notado.

moedas.	toſtoens.	vintens.
5	20	12
7	40	14
11	25	25
25	12	9
50	13	00

Para ſomar eſtas differentes eſpecies, devemos principiar pelas de menor valor, como aqui pelos vintens, que ſomados fazem 60, que valem 12 toſtoens, que ſe ajuntaràõ á eſpecie, que ſe ſegue; e ſomados com os mais, fazem 109, em que ha 2 moedas, e ſobejaõ 13 toſtoens, que ſe deixaõ em ſeu lugar, e paſſaõ as duas moedas para o lugar ſe-

 guinte,

guinte, que com as mais fazem 50. Quaesquer outros generos de pezo, e medida se somaõ do mesmo modo, por exemplo,

Quintaes.	Arrobas.	Arrateis	Onças.
15	20	28	16
13	16	24	64
12	15	20	30
9	25	21	18
68	3	5	0

42 Começando a operaçaõ pelas onças, se acharaõ 128, que fazem 8 arrateis, os quaes passaraõ para os arrateis seguintes, que com os mais fazem 101, em que ha tres arrobas, e cinco arrateis; as tres arrobas passaraõ para as arrobas, e se deixaõ cinco arrateis; as tres arrobas somadas com as mais arrobas fazem 79, em que ha 19 quintaes, e 3 arrobas; os 19 quintaes se somaõ com os mais quintaes seguintes, e se deixaõ 3 arrobas no lugar, que lhe pertence; os 19 quintaes somados com os mais, fazem a soma 68, a qual se escreverá por baxo dos quintaes

Estes dous exemplos bastaõ para mostrar o como se somaõ as differentes especies, ou sejaõ de pezo, ou de medida, ou de qualquer outro genero.

Dos quebrados da Dizima.

43 ENtre as differentes especies de numeros quebrados tem o primeiro lugar os da dizima, em que procedem por partes decimas: a estas partes

partes ſe daõ nomes differentes ; os que ſe dividem ſó huma vez ſe chamaõ primos; os que ſe dividem ſegunda vez, ſe chamaõ ſegundos, e ſe terceira, terceiros, &c,

Quando eſtes quebrados vaõ juntos aos numeros inteiros, naõ tem os numeros inteiros ſinal algum; porém os primos, ou os da primeira diviſaõ ſe notaõ com huma riſquinha por cima; os ſegundos, ou os da ſegunda diviſaõ, com duas; os terceiros, com tres; e aſſim por diante. As operaçoẽs da Arithmetica, que ſe haõ de reduzir a pratica, baſta paſſar até ſegundos, ou quando muito a terceiros, que ſaõ já partes milecimas; e huma milecima parte de huma polegada he já couſa taõ pouca, que ſe deve deſprezar.

Deſte genero de quebrados ſe deve uſar nas mediçoens das obras da Arquitectura militar, e civil, pela grande facilidade, que offerece, evitando o calculo laborioſo dos quebrados da Arithmetica ordinaria. Eſta doutrina ſe acha baſtantemente explicada no primeiro tomo do Engenheiro Portuguez.

C A P I T U L O VIII.

Da comenſurabilidade, e incomenſurabilidade das linhas, e das ſuperfices.

D E F I N I Ç A M I.

44 HUma linha, ou ſuperfice, ſe diz comenſuravel com outra, quando a razaõ, que tem entre ſi, ſe póde expreſſar por nume-

numeros, e que tem entre ſi huma commua medida, a ſaber, huma terceira grandeza, com quem ſe comparaõ.

A medida commua de huma braça, he o palmo; porque o contèm exactamente dez vezes. As grandezas, que naõ tem medida commua, naõ tem razaõ, que ſe poſſa expreſſar por numeros.

DEFINIC,AM II.

45 AS grandezas incomenſuraveis, ſaõ aquellas, que naõ tem medida commua, que as poſſa medir.

Huma grandeza, por exemplo, de 2 palmos e $\frac{1}{2}$ naõ póde ſer medida exactamente por huma braça, nem por hũa vara, nem por hum palmo, nem ainda por huma polegada, e nem por outra qualquer medida, ainda mais pequena; e aſſim duas grandezas ſaõ incomenſuraveis, quando ſe lhe naõ póde achar medida, por mais pequena, que ſeja, que a poſſa medir.

COROLARIO

46 SEgue-ſe, que duas grandezas, que tem huma razaõ indefinita, ſem achar numero, ou medida, que as poſſa expreſſar, ſaõ incomenſuraveis entre ſi.

DEFINI-

DEFINIC,AM III.

47 GRandeza racional, he huma grandeza conhecida, e determinada, a respeito de outra, cujo valor se póde expressar por numeros.

DEFINIC,AM IV.

48 DUas grandezas entre si incomensuraveis pódem ser comensuraveis em potencia, se os seus quadrados, ou os seus cubos forem comensuraveis.

Se B, e C saõ incomensuraveis; porém os seus quadrados saõ comensuraveis, como 3, e 5, B, e C incomensuraveis em si mesmos, saõ comensuraveis em segunda potencia; porque saõ comensuraveis 9, e 25, quadrados de 3, e de 5.

Se X, e Z naõ fossem comensuraveis, nem os seus quadrados XX, e ZZ; e que porèm fossem comensuraveis, os seus cubos X^3, e Z^3, sendo X, e Z incomensuraveis em si mesmos, e em segunda potencia, o seriaõ em terceira potencia os seus cubos, sendo X.Z::10.13.

DEFINIC,AM V.

49 OS numeros expoentes de huma razaõ, saõ os minimos termos, a que ella se póde reduzir.

Desta sòrte, se X . Z : : 6 . 12, os seus expoentes seráõ 1, e 2; porque saõ os minimos numeros, que tem a mesma razaõ, que 6, e 12; e dous numeros, saõ comensuraveis, quando, ao menos, tem a unidade por sua commua medida.

Entre as grandezas incomensuraveis, a razaõ, que reina, se chama surda.

Esta materia das incomensuraveis tem sua difficuldade; porque como ha razoens surdas; e estas se pódem dizer iguaes, mayores, ou menores, toda a difficuldade consiste em distinguir o em que consiste a igualdade de razoens de numero a numero, e a igualdade das razoens surdas; porque o modo, por onde as primeiras saõ iguaes, he muy differente do modo donde se dizem iguaes as razoens surdas.

Porque duas razoens de numero a numero, naõ saõ iguaes; se naõ porque ellas tem os numeros expoentes; e reduzidas saõ huma sò, e mesma razaõ. 8 . 12, ou 100 . 150, tem a mesma razaõ; porque reduzidas huma, e outra, fazem huma só razaõ de 2 para 3.

Mas nas razoens surdas naõ he o mesmo; porque senaõ póde dizer, que tem os mesmos expoentes; porque se os tivessem, naõ seriaõ surdas.

Mas a igualdade consiste, em que todas as aliquotas semelhantes dos dous primeiros antecedentes saõ igualmente contheudas nos seus consequentes; ainda que nenhuma aliquota do primeiro antecedente

seja

ſeja preciſamente tantas vezes contheuda no ſeu conſequente, nem a aliquota parcelha do ſegundo antecedente no ſegundo conſequente; mas ſempre a reſpeito de hum, e de outro, com algum reſto; e como eſſes reſtos vaõ ſempre ao infinito ſem ſe eſgotarem, naõ ſe lhe póde notar deſigualdade, ainda que ſe naõ poſſa expreſſar.

A diagonal de hum quadrado he incomenſuravel em ſi meſma, e comenſuravel em potencia com cada hum dos ſeus lados; e as partes de huma linha cortada em meya, e extrema razaõ, ſaõ irracionaes; porèm a parte media he comenſuravel com a toda em ſi, e em potencia.

Muito ſe poderia dizer ſobre eſta materia; o que ommittimos; porque os elementos das Sciencias devem ſer claros, e breves.

seja precisamente, tantas vezes contenha-se esta conse-
quente, nem a aliquota parte do segundo antecedente no segundo consequente; mas sempre a excesso de hum, ou de outro, seja algum resto, e como estes restos vaõ sempre ao infinito diminuindo, naõ se lhe póde notar desigualdade, ainda que se naõ possa expecificar.

A diagonal de hum quadrado he incomensuravel em si mesma, e a contínua excepção da proporcia com cada hum dos seus lados; e as partes de huma linha cortada em meya, e extrema razaõ, estaõ proporcionaes; porém a parte media he incomensuravel com a toda em si, e em proporcionaes.

Muito se poderia dizer sobre esta materia, que omittimos, porque os elementos das Sciencias devem ser claros, e breves.

LOGICA ANALITICA, LIVRO VI.

DO MODO DE RESOLVER HUMA QUESTAM, ou problema.

CAPITULO I.

Modo Sintetico, e Analitico.

1 TEMOS dito da grandeza em geral tudo o que podia ſervir para elementos, e o que baſta para poder entender os Authores, que tem eſcrito mais largamente deſta materia, agora trataremos do modo de reſolver as queſtoens, e examinar o methodo, de que nos havemos de ſervir.

A queſtaõ, he huma propoſiçaõ, na qual ſe buſca huma verdade incognita, e donde porém ſe conhecem algumas couſas, que dizem reſpeito, ou razaõ com outras verdades conhecidas.

Ninguem buſca o que naõ conhece; porque ſe naõ conhece, ſe cançaria de balde; e ſó ſe poderá achar o que ſe buſca, ſe tivermos alguns ſinaes, por onde o poſſamos conhecer; e aſſim em huma queſtaõ, nem tudo he incognito; ella traz comſigo alguns, como ſinaes, por onde ſe poſſa achar; para o que he neceſſario methodo, e he muito importante uſar delle nas ſciencias; e as queſtoens, que aqui tratarmos, ainda que naõ pareçaõ de grande utilidade, ſerviráõ de exemplo para as que trataõ de materias mais importantes.

2 O primeiro methodo ſe chama *Analitico*, ou methodo de *reſoluçaõ*; porque ſe reſolve em partes a couſa, que ſe quer conhecer; o ſegundo methodo ſe chama *Sintetico*, ou methodo de *compoſiçaõ*; porque nelle ſe ajuntaõ as partes da couſa, que ſe examina.

O primeiro methodo desfaz, examinando as partes; o ſegundo compoem o todo das partes; e por hum, e outro methodo ſe reſolvem as queſtoens, os quaes pelos termos explicados no livro primeiro, paſſaremos ás reſoluçoens das queſtoens.

CAPITULO II.

Da Analiſi, e em que eſte methodo conſiſte, e nelle ſe ſuppoem as couſas feitas, como ſaõ propoſtas.

3 NAõ tratamos aqui da etymologia da palavra Analiſi, que ſignifica reſoluçaõ; procuramos

curamos sómente ter desta palavra huma idéa clara do que significa, para que desta idèa possamos reduzir o que devemos obrar por este methodo; quando se nos propoem hum problema, devemos suppor a cousa, que he em si verdadeiramente, como se propoem; e do que na questaõ he conhecido, se tira conhecimento para o mais, que ainda se naõ sabe; e he isto o que se chama *Analisi*; e juntamente vemos a razaõ de se chamar methodo de *invençaõ*; porque pelo seu soccorro vimos a descobrir aquillo, que naõ sabiamos; e pelo contrario, pelo methodo sintetico podemos ensinar aos outros aquillo, que já sabemos: cada hum destes dous methodos tem muita utilidade; mas porque o methodo sintetico he muy conhecido, e delle usamos nos livros antecedentes, apliquemo-nos agora a bem conhecer o methodo Analitico; no qual a primeira cousa, que se deve fazer, he expressar claramente, o que se propoem na questaõ, para se poder considerar attentamente, o que nella se propoem; pois que pela supposiçaõ sómente da cousa, de que se trata, se deve deduzir tudo o que nella se quer saber.

Para que isto melhor se entenda, nos serviremos de hum exemplo. Querem-se, por exemplo, saber as idades de tres pessoas, das quaes só se sabe, que a segunda pessoa tem de idade 5 annos, mais, que a primeira; e a terceira tem o dobro da primeira, e da segunda: sabe-se mais, que a idade de todas tres saõ 75 annos: A questaõ he de saber, quantos annos tem cada huma?

He necessario dar nome às cousas, que se propoem em huma questaõ; e assim chamo X à idade do primeiro: logo a do segundo será X ✳ 5; e pois, que

que a idade do terceiro he o dobro da idade do primeiro, e do ſegundo: logo a ſua idade ſerá $4X + 10$; e aſſim eſtas tres idades ſeràõ X, $X + 5$, $4X + 10 = 75$.

Tendo expreſſado o problema propoſto, tal, qual elle he, pela ſuppoſiçaõ ſe veyo a deduzir, o que ſe buſcava.

Para bem uſar deſte methodo, devemos ter ſempre preſentes as regras ſeguintes.

REGRA I.

4 A Primeira couſa, que ſe deve fazer, he perceber diſtinctamente o eſtado da queſtaõ propoſta, e o que for neceſſario buſcar para a reſolver.

Huma queſtaõ he quaſi reſoluta, quando ſe ſabe buſcar o meyo de a reſolver; o que ſe póde perceber melhor por hum exemplo; ſe diſſerem a hum homem: ajunte todas as palavras de huma lingoa, ſem que lhe falte nenhuma, e ſem o ſoccorro de livro algum, nem de meſtre: eſta queſtaõ à primeira viſta parece impoſſivel; e naõ tem difficuldade, valendo-ſe das combinaçoens; porque ſabida a Arte das combinaçoens, por ella ſe faráõ quantas palavras ſaõ poſſiveis de todas as lingoas do mundo; e entre ellas ſe acharàõ certamente todas as palavras de huma certa lingoa.

REGRA

REGRA II.

5 PAra deſcobrir, qual he o eſtado da queſtaõ, he neceſſario ſepararlhe todas as couſas, que naõ for neceſſario examinar, para poder chegar ao conhecimento da verdade; e tambem na queſtaõ ſe deve ſuprir alguma couſa, que lhe falte.

REGRA III.

6 QUando ſe deſpreza em huma queſtaõ aquillo, que ſò ſervia de a embaraçar, e que ſe ſuprem as condiçoens neceſſarias, que nellas ſe naõ declaraõ, ſe vê claramente o que ſe deve buſcar, que he dar nome a cada termo, e expreſſallo por algum caracter, ou ſinal; por eſta regra ſe naõ ſatiga a imaginaçaõ, e ſe naõ embaraçaõ, nem eſquecem facilmente os nomes, que já ſe achaõ notados ſobre o papel; e por iſſo na queſtaõ a cima das tres idades, chamamos à idade do primeiro X, e poderemos notar a do ſegundo com a letra Z, e a do terceiro com a letra Y.

Eſtes caractères fazem o entendimento mais attento; e o que ſe nota naõ eſquece facilmente; por exemplo, conhecendo pela ſuppoſiçaõ da queſtaõ preſente, que a idade da primeira peſſoa, que eu chamey X, tem 5 annos menos, que a idade da ſegunda, notada com a letra Z: logo ſe deſcobre, que $X + 5 = Z$, ou $Z - 5 = X$.

E logo proſigo o exame deſta queſtaõ com huma inteira aplicaçaõ; porque naõ he neceſſario conſervar na memoria as primeiras couſas, que ſe vaõ deſcobrindo; pois ficaõ notadas, e depoſitadas no papel.

REGRA IV.

7. TEndo notado com ſeus ſinaes as grandezas, que ſaõ o ſugeito da queſtaõ, he neceſſario diſtinguir com ſinaes differentes as couſas conhecidas, e as incognitas.

Se em huma queſtaõ tudo foſſe conhecido, naõ ſeria queſtaõ; porque ninguem pergunta (por exemplo) ſériamente, qual he a metade de 24; e ſe tudo foſſe tambem incognito, naõ ſeria queſtaõ; porque ſe hum homem me diſſeſſe ſimpleſmente, que lhe deſcobriſſe o numero, que elle tinha tomado no ſeu penſamento ſem me dizer mais nada, podia-ſe-lhe reſponder, ſe eſtava elle certo de ter eu a ſciencia, ou a virtude de adivinhar. Em huma queſtaõ racionavel ſempre entre as couſas occultas, que ſe procuraõ, ſe achaõ algumas grandezas conhecidas, que he neceſſario diſtinguir, notando-as com ſinaes differentes: as couſas, que na queſtaõ ſaõ conhecidas, ſe notaõ com as primeiras letras do Alfabeto, como A, B, C, &c. e as couſas incognitas com as ultimas letras, como X, e Z, &c. porque aſſim ſe ajuda a imaginaçaõ, e ſe percebe ſenſivelmente, o que ſe vay buſcar na queſtaõ, que he o valor de algumas das incognitas X, e Z, &c.

Quando na queſtaõ propoſta ſe falla de muitas grandezas de differentes eſpecies, neſte caſo ſe pódem notar com as primeiras letras dos ſeus; como, por exemplo, ſe ſe fallaſſe de annos, mezes, e dias,

dias, ſe notariaõ os annos com a letra A, os mezes com a letra M, e os dias com a letra D.

REGRA V.

8. QUando huma queſtaõ naõ he determinada por alguma grandeza particular, de ſórte, que muitas grandezas pódem ter as meſmas condiçoens, que ſe requerem na queſtaõ, neſſe caſo ſe póde ſuppor huma à diſcriçaõ, que a determine.

Se nos propozerem de achar huma grandeza, que foſſe a ſexta parte de outra; como eſta queſtaõ he indeterminada, ſe pòde ſuppor huma grandeza, que a determine; como, por exemplo, tomando a grandeza 30, e dividindo-a por 6, o quociente 5 reſolveria a queſtaõ; pois que 30 he huma grandeza, de que 5 he a ſua ſexta parte; e aſſim bem ſe moſtra, que quando as queſtoens ſaõ indeterminadas, as pódem ſatisfazer muitas grandezas.

REGRA VI.

9 DEvem-ſe abreviar, e pôr mais correctas as expreſſoens das grandezas, que ſervem a reſolver a queſtaõ, reduzindo-as aos mais ſimples termos, que for poſſivel.

As expreſſoens, de que nos ſervirmos devem ſer breves, e deſembaraçadas, para ſe repreſentarem mais facilmente na imaginaçaõ; e aſſim em lugar de eſcrever $X + 5 + X + X + 10$, ſe deve eſcrever $3X +$ 15, 15; porque esta expressaõ, como mais simples, e mais desembaraçada, aclara melhor a questaõ.

CAPITULO III.

Das regras, com que se buscaõ as igualaçoens.

10 O Problema sempre tem algumas condiçoens, que se devem examinar; e por esse meyo achar huma igualaçaõ, que he o mesmo, que achar huma dobrada expressaõ, pela qual se conhece a razaõ, que huma grandeza conhecida tem com outra incognita.

Já temos dito muitas vezes, que se naõ descobre huma verdade incognita, se naõ depois de conhecer a razaõ, que ella tem com outra verdade já conhecida; e assim examinando-se huma questaõ, he necessario dar attençaõ á razaõ, que se observa entre aquillo, que he conhecido, e aquillo, que ainda se ignora: as regras seguintes mostraràõ, como este exame se deve fazer.

REGRA I.

11 DEpois de ter notado no papel as grandezas, que expressaõ os termos da questaõ, e postas por ordem, se devem comparar as grandezas incognitas com as que forem conhecidas, para poderem descobrir a razaõ, que ellas tem entre si.

Na questaõ das tres idades (*liv.* 3. *num.* 66.) notadas com letras X, Z, Y, devemos considerar a

razaõ

razaõ, que eſſas grandezas tem entre ſi, por exemplo, que X tem $+ 5$ annos, e que Y he o dobro de X, e de Z; o que ſe deve fazer com aplicaçaõ para deſcobrir a razaõ, que ha entre eſſas grandezas

REGRA II.

12 DEpois de conhecidas as razoens, que ſe achaõ entre os termos de huma queſtaõ, logo ſe conhece a differença, que ha entre eſſes termos, e a que os faz deſiguaes; e por eſſe meyo ſe pódem expreſſar de dous differentes modos; e he o que ſe chama fazer huma igualaçaõ.

Sem ſahir da queſtaõ propoſta, pois que nòs ſabemos, por exemplo, que Z he mayor, que X por 5: logo 5 he a differença entre X, e Z; e aſſim ſey, que $Z - 5 = X$, ou que $X + 5 = Z$, que he huma dobrada expreſſaõ; e porque Y he o dobro de X, e de Z, neceſſariamente $2X + 2Z$ lhe ſeràõ iguaes; deſta ſórte, poſſo expreſſar eſſas grandezas de dous modos, a ſaber, Z, ou $X + 5$, e $2X + 2Z$, ou Y; e eſtas dobradas expreſſoens he o que chamaõ igualaçoens; e os termos, que ficaõ de huma, e outra parte do ſinal de igualdade, ſe chamaõ membros da igualaçaõ; e deſta ſórte $2X + 2Z$, e Y, ſaõ os membros deſta igualaçaõ $2X + 2Z = Y$.

REGRA III.

13 DEvem-ſe buſcar, e achar tantas igualaçoens, quantas forem as grandezas incognitas na igualaçaõ, para que nas expreſſoens do

problema fique huma ſò grandeza incognita.

Quando ſe conhece a differença, que faz deſiguaes os termos de hum problema, he facil, que nas differentes expreſſoens naõ venha a ficar mais, que huma ſó incognita; por exemplo, na queſtaõ propoſta, pois que ſabemos, que $X + 5 = Z$, que he a ſegunda idade, naõ chamaremos à ſegunda idade, ſenaõ $X + 5$; e porque a terceira idade notada com a letra Y, he o dobro de X, e de $X + 5$, naõ lhe chamaremos mais Y, ſenaõ $2X + 2X + 10$; e neſta expreſſaõ temos reduzido os termos; e aſſim as tres grandezas X, Z, Y, depois de reduzidas às tres grandezas X, $X + 5$, $4X + 10$, já naõ tem mais, que huma letra incognita, a ſaber, X; e aſſim ſó falta ſaber o valor de X; o que facilmente ſe conſegue; porque ſe a ſoma deſtas tres idades he 75: logo $X + X + 5 + 4X + 10 = 75$; e abreviando a expreſſaõ, ajuntando as incognitas em huma ſó ſoma, teremos eſta igualaçaõ: $6X + 15 = 75$, que he huma dobrada expreſſaõ; porque $6X + 15$, e 75 tem o meſmo valor.

REGRA IV.

14 QUando as grandezas conhecidas ſe achaõ miſturadas humas com outras, devem-ſe ſeparar, pondo tudo, o que he conhecido de huma parte, e da outra, o que he incognito.

Por eſte meyo ſe achará ſó de huma parte da igualaçaõ a grandeza incognita, e da outra tudo o que he conhecido; e ſendo ſó huma grandeza incognita, já ſe naõ póde chamar a tal grandeza incognita; pois que he igual a huma couſa conhecida. Se $X = 10$,

$X = 10$, já ſey o ſeu valor; porém ſendo mais grandezas, ſerá neceſſario, que paſſe para hum dos membros da igualaçaõ, tudo o que for conhecido, para que ſe conheça diſtinctamente a razaõ, que as grandezas incognitas tem com as conhecidas; por exemplo, neſta igualaçaõ $6X + 15 = 75$, a grandeza X ſe acha miſturada com a grandeza 15, a qual deve paſſar para o outro membro com o ſinal contrario, para ficar a incognita ſó de huma parte, e ſerà a nova igualaçaõ $6X = 75 - 15$; e tirando de 75 os 15, que tem de menos, naõ ſe turba a igualaçaõ; pois que de duas couſas iguaes, tirando-lhe partes iguaes, ſaõ iguaes os reſtos; e aſſim a igualaçaõ a cima, ſe reduz a eſta $6X = 60$.

REGRA V.

16 DEvem-ſe reduzir aos termos mais ſimples as razoens de igualdade, que ha entre os dous membros de igualaçaõ; porque quanto mais ſimples ſaõ os termos, com que ſe expreſſà huma razaõ, tanto he mais clara.

Para reduzir a razaõ de igualdade entre $6X = 60$ a menores termos, dividaõ-ſe eſſes dous termos $6X$, e 60, pelo ſeu commum diviſor 6, de cuja diviſaõ reſultaõ os quocientes X, e 10, que tem a meſma razaõ, iſto he, $X = 10$; porque dividindo duas grandezas por huma meſma grandeza, os quocientes tem entre ſi a meſma razaõ, que as grandezas.

Depois de reduzidos os termos, como fica dito, a grandeza X, que era incognita fica conhecida, por ſer igual a 10.

Quan-

17 Quando se acha o valor de huma das grandezas incognitas de huma questaõ proposta, se conhece o valor das mais porque, por exemplo, nesta questaõ, depois de ter achado, que X vale 10, e que $X + 5 = Z$: logo $10 + 5 = Z$; e assim Z vale 15; e porque $2X + 2Z = Y$: logo a grandeza Y vale 50: e por consequencia a primeira idade era 10, a segunda 15, e a terceira, 50, que somadas fazem 75, idade total de todos tres; e assim seguindo o methodo, que temos dito, se achará infallivelmente a resoluçaõ da questaõ proposta, achando-se huma das grandezas incognitas, igual a huma grandeza conhecida; e se naõ deve achar acaso; mas sim seguindo o methodo natural; o qual sendo seguido, se conhece o que se busca.

Hum problema se diz impossivel, de hum de dous modos, ou a respeito do nosso conhecimento, ou absolutamente impossivel em si mesmo, quando contém em si huma manifesta contradiçaõ, como este problema.

Achar hum numero, que seja justamente o terço de 12, e igual a 5; o que he pedir hum numero, que seja ao mesmo tempo 4, e 5.

18 Hum problema se diz impossivel a respeito do nosso conhecimento, quando involve contradiçaõ, naõ tendo meyos para alcançar a sua resoluçaõ, por se naõ poder reduzir aos mais simples termos a sua igualaçaõ; por exemplo, sejaõ estes termos $XX = BB + AX$. Eu bem percebo, que naõ posso saber qual he o valor de X; porque naõ posso saber o seu valor, só com saber, que o seu quadrado he igual ao quadrado de B, e a hum plano feito de X por A, guandeza tambem conheciada. CA-

CAPITULO IV.

Do modo de desvanecer, ou desembaraçar as grandezas incognitas das igualaçoens.

19 QUando huma quantidade he positiva, e que se naõ acha mais, que em hum só membro da igualaçaõ, se chama quantidade desembaraçada; como nesta igualaçaõ A + B = X, a grandeza X he desembaraçada, *id est*, naõ he multiplicada por outra grandeza.

20 Para desembaraçar huma grandeza, o podemos fazer por via de diminuiçaõ; e neste caso devemos passar a grandeza, que a acompanha, para outro membro da igualaçaõ com o sinal contrario; como, por exemplo, tendo esta igualaçaõ A + C = X − D, passaremos D para o outro membro da igualaçaõ com o signal +, serà A + C + D = X.

21 Da mesma sórte, se na igualaçaõ Y + A = B + C, faremos passar A do primeiro membro com o sinal −, e ficarà Y desembaraçado, desta sórte, Y = B + C − A.

22 Daqui se segue, que podemos fazer todos os termos de huma igualaçaõ positivos, transpondo os que tem o sinal menos para a outra parte com o sinal mais; como nesta igualaçaõ AB − CC + CD − DD = A + BB; transpondo CC, e DD para o outro membro, com o sinal +, ficàraõ os termos todos positivos, a saber, AB + CD = AA + BB + CC + DD.

23 Tambem ſe pódem reduzir da meſma ſórte todos os termos de huma igualaçaõ iguaes a cifra, como neſta igualaçaõ $AA + BB = CD + BC - DD$: tranſpondo-os com os ſinaes contrarios, ſerà $AA + BB - CD - BC + DD = o$

24 Para deſembaraçar huma quantidade, que ſe acha dividida por algum numero, ou letra, devemos multiplicar todos os mais termos pelo diviſor da grandeza dividida; como neſta igualaçaõ $A + B = \frac{XX}{C}$, multiplicaremos o termo $A + B$ por C, e darà $AC + BC = XX$, ficando deſembaraçado o quadrado de X.

25 Como huma grandeza literal dividida he hum quebrado, ſegue-ſe, que podemos deſembaraçar os quebrados das igualaçoens, multiplicando os mais termos pelo denominador do quebrado; para livrar de quebrado a igualaçaõ $A + \frac{DD}{C} + B = D + C$, multiplicaremos os membros da igualaçaõ por C, denominador do quebrado, e teremos $AC + DD + BC = DC + CC$, onde ſe acha deſvanecido o quebrado.

26 Deve-ſe advertir, que ſendo muitos os quebrados, ſe devem hir multiplicando ſucceſſivamente, ou para os multiplicar todos de hũa ſó vez, multiplicando cada termo pelo producto de todos os denominadores, e logo apagar nos numeradores, e denominadores de cada quebrado as letras, que ſe acharem ſemelhantes.

Por via de diviſaõ, ſe pódem tambem deſembaraçar nas igualaçoens as grandezas incognitas, que ſe achaõ multiplicadas por grandezas conhecidas.

27 Pa-

27 Para desembaraçar a grandeza incognita X na igualaçaõ $AX = BB - CC$, dividiremos cada membro por A, e teremos $X = BB - \frac{CC}{A}$ dividido por A.

CAPITULO V.

Do uso da extracçaõ das raizes, para desembaraçar as grandezas incognitas.

28 Quando em huma igualaçaõ, hum dos membros contèm grandezas conhecidas, e que a incognita da outra parte he hum quadrado, ou hum cubo perfeito, naõ ha mais, que tirar as raizes dos dous membros, e teremos a incognita desembaraçada; por exemplo, se tivermos $XX + 2AX + AA = BC + DD$, como o primeiro membro da igualaçaõ he hum quadrado perfeito, tirando a raiz quadrada de cada membro, teremos $X + A = \sqrt[2]{BC + DD}$; e fazendo passar A do primeiro membro, ficará só $X + = \sqrt[2]{BC + DD} - A$.

29 Da mesma sórte usaremos, se a incognita da igualaçaõ for hum cubo perfeito, como nesta $X^3 + 3AXX + 3AAX + A^3$, e $X^3 - 3AXX + 3AX + A^3 = AB$; tirando a raiz de cada membro, teremos a igualaçaõ mais simples $X + A = \sqrt[3]{AAB}$; e transpondo a do primeiro termo para o segundo, teremos X desembaraçado $X = \sqrt[3]{AAB} - A$.

30 Muitas vezes succede o poderse fazer o membro da igualaçaõ, em que se acha a incognita, huma

ma potencia perfeita, ajuntando-lhe huma grandeza conhecida; por exemplo, se esta igualaçaõ $XX+2AX=BC$, lhe ajuntarmos o quadrado AA, teremos esta $XX+2AX+AA=BC+AA$, onde o primeiro membro he huma potencia perfeita; e assim tirando a raiz quadrada do primeiro membro, teremos a igualaçaõ $X+A=\sqrt[2]{BC+AA}$, ou $X=\sqrt[2]{BC+AA}-A$.

31 O mesmo se praticará nesta igualaçaõ $XX-2AX=CC$; porque ajuntando-lhe o quadrado AA teremos $X-2AX+AA=CD+AA$, em que o primeiro membro he hum quadrado; e assim tirando-lhe a raiz, teremos $X-A=\sqrt[2]{CD+AA}$, ou $X=A+\sqrt[2]{CD+AA}$.

32 Porèm se tivermos huma igualaçaõ, como $XX+AX=AB$, poderemos tambem mudar o primeiro termo em hum quadrado perfeito, ajuntando a hum, e outro membro $\frac{1}{4}AA$, para termos $XX+AX+\frac{1}{4}AA=AB+\frac{1}{4}AA$, em que a raiz do primeiro membro he $X+\frac{1}{2}A$; e para ver, que $X+\frac{1}{2}A$ he a raiz, naõ ha mais do que multiplicalla por si mesma, e o producto será $XX+AX+\frac{1}{4}AA$: de que se segue a igualaçaõ a cima $X\frac{1}{2}A=\sqrt[2]{AB+\frac{1}{4}AA}$, ou $X=\sqrt[2]{AB+\frac{1}{4}AA}-\frac{1}{2}A$; e fica sabido o valor de X; e se tivermos $XX-AX=BC$, e lhe ajuntarmos a cada membro $\frac{1}{4}AA$ teremos $XX-AX+\frac{1}{4}AA=BC+\frac{1}{4}AA$, em que o primeiro membro fica huma potencia perfeita; e assim teremos $XX-AX+\frac{1}{4}AA=BC+\frac{1}{4}AA$; e tirando-lhe a raiz a hum, e outro membro, teremos $X-\frac{1}{2}A=\sqrt[2]{BC+\frac{1}{4}AA}$, ou $X=\frac{1}{2}A+\sqrt[2]{BC+\frac{1}{4}AA}$.

33 Quan-

33 Quando nas igualaçoens a grandeza incognita eſtá embaraçada com a grandeza conhecida, como neſtes exemplos, em que a grandeza X ſe acha multiplicada pela grandeza A conhecida, ſe chama eſta grandeza *affecta* à grandeza conhecida; e a grandeza conhecida, por alguns he chamada *coefeciente*; e neſtes caſos daõ por regra, que ſe deve ajuntar a hum, e outro membro o quadrado da metade do coefeciente.

34 Deſta ſórte, ſe nos derem eſta igualaçaõ $XX - \frac{1}{2}X = \frac{BC}{2}$, ajuntando-lhe o quadrado da metade de $\frac{1}{2}X$, que he $\frac{1}{16}$, teremos $XX - \frac{1}{2}X + \frac{1}{16} = \frac{BC}{2} + \frac{1}{16}$; e tirando-lhe a raiz, teremos $X - \frac{1}{4} = \frac{BC}{2} + \frac{1}{16}$; e para ſe ver, ſe $X - \frac{1}{4}$ he a raiz do primeiro membro, multiplique-ſe por ſi meſma, e ſe achará certo; e ſobre iſto ſe deve fazer algum exercicio, para ſe facilitar na extracçaõ das raizes,

CAPITULO VI.

Do modo de ſubſtituir nas igualaçoens o valor das grandezas incognitas.

35 QUando conhecemos o valor de algumas letras, que queremos deſvanecer para deſembaraço, lhe ſubſtituiremos outras mais ſimples em ſeu lugar; por exemplo, neſta igualaçaõ $A + Z = Y + B - C$, querendo deſvanecer a incognita Z, ſuppondo $Z = D + E$, tirando Z, e pondo $D + E$ em ſeu lugar, teremos $A + D + E = Y + B - C$, em que Z jà naõ apparece; e neſta igualaçaõ $B + D - X = C + Z$, em lugar de X poremos

$A-E$, que lhe ſuppomos igual; e apagando X, ficarà em ſeu lugar $-A+E$, por cauſa de X ſer grandeza negativa; e aſſim teremos $B+D-A+E=C+Z$, em que X já naõ apparece.

36 Se a letra, que ſe quer deſvanecer ſe achar multiplicada, ou dividida por qualquer outra grandeza, ſerà neceſſario multiplicar, ou dividir o valor da tal grandeza; por exemplo, ſe na igualaçaõ $BB+AX-CC=AD+AA-YY$ quizermos deſvanecer X, que ſuppomos $X=E+F$, como X he multiplicado por A, devemos tambem multiplicar por A o ſeu valor $C+F$; porque aſſim fica $AX=AE+AF$; e metendo na igualaçaõ $AE+AF$ em lugar de AX, teremos $BB+AE+AF-CC=AD+AA-YY$, em que X jà naõ apparece.

37 Para fazer deſvanecer a letra Z na igualaçaõ $CC+YY-2DB+AA-BZ$, ſupporemos $Z=D-E+G$; e aſſim multiplicaremos o valor de Z por B, com quem eſtava multiplicado, para ter $BZ=BD-BE+BG$, e como BZ tem o ſinal $-$ na igualaçaõ, ſe trocaraõ os ſinaes de $BD-BC+BG$, pondo na igualaçaõ $-BD+BC-BG$; e aſſim teremos $CC+YY-2DB+AA-BD=AA-BD+BE-BG$, em que a letra Z incognita fica deſvanecida.

38 Se a letra, que ſe quer deſvanecer for lado de hum quadrado, ou de hum cubo, ſerá neceſſario quadrar, ou cubicar o ſeu valor; por exemplo, ſe neſta igualaçaõ $YY-2BD=2AX+DD$, ſuppondo $Y=B+D$, ſerà neceſſario quadrar o valor de Y, e teremos $YY=BB+2BD+DD$; e eſte quadrado

drado poremos em lugar do quadrado YY, e teremos $BB + 2BD + DD - 2BD = 2AX + DD$; e como $+ 2BD - 2BD$ ſe deſvanecem, e DD ſe acha em hum, e outro membro da igualaçaõ com o meſmo ſinal, tirados, fica $BB = 2AX$; e deſembaraçando X, dividindo os dous membros da igualaçaõ por 2A, teremos $\frac{BB}{2A} = X$, cujo valor fica ſabido.

39 Para deſvanecer todas as grandezas incognitas de huma igualaçaõ, devemos conſiderar o eſtado da queſtaõ com attençaõ, examinando as condiçoens, que encerra, e notando com as letras do Alfabeto eſſas grandezas, ſuppondo o problema verdadeiro, e as razoens, que tem humas grandezas para as outras; e ſe começará pela mais ſimples das igualaçoens, para deſembaraçar huma das incognitas, e logo as mais ſucceſſivamente.

40 Iſto ſe fará mais claro, fazendo aqui deſvanecer as incognitas das tres igualaçoens ſeguintes $X + Y = Z + A$, $Y + Z = B + X$, e $X + Z = C + Y$.

41 Comecemos primeiramente a buſcar o valor de Z na primeira igualaçaõ, e acharemos $Z = Y + X$; e aſſim temos jà o valor de Z; e pondo na igualaçaõ em lugar de Z o ſeu valor $Y + X$; nas outras igualaçoens ficaraõ mudadas em $2Y + X - A = B + X$, e $2X + Y - A = C + Y$; e como X ſe acha no primeiro, e no ſegundo membro da igualaçaõ com o ſinal mais, da meſma ſórte, que Y na ſegunda, ſe deſvanecem; e deſembaraçando as incognitas, que ficaõ, teremos $2Y = B + A$, e $2X = C + A$, ou $Y = \frac{B+A}{2}$, e $X = \frac{C+A}{2}$; e ſe na primeira igualaçaõ, em que a incognita Z foy deſembaraçada, e o valor de X, e de

e de Y conhecido, teremos $\frac{B+A+C+A-A}{2}=Z$, ou $\frac{B+C}{2}=Z$; e assim teremos achado o valor das incognitas X, Y, Z, em letras conhecidas.

42 Deve-se advertir, que o bom successo do trabalho, e aplicaçaõ necessaria, para resolver hum problema, depende ordinariamente da facilidade de achar as mais claras expressoens, dando ás grandezas do problema os sinaes mais convenientes, tomando o todo pela parte, ou a parte pelo todo, ou dividindo o todo em suas partes, como ao diante diremos, fazendo exercicio das regras dadas em alguns problemas.

43 O meyo de achar igualaçoens he a attenta consideraçaõ da razaõ, que tem entre si as grandezas; porque fica facil igualar as grandezas, cujas razões saõ conhecidas; e para as expressar de dous modos differentes, devemos-lhe considerar as differenças: porque ajuntando a differença á menor grandeza, fica igual à mayor, como tirando a differença da mayor fica igual a menor; por exemplo, se a differença de X, e de Z for 5, e que X seja a menor, será $X+5=Z$, ou $X=Z-5$; e assim temos dobrada expressaõ destas grandezas, e nos poderemos servir da que melhor accomodar.

44 Metade da soma de quaesquer duas grandezas, mais metade da sua differença, he igual à mayor grandeza: e metade da soma, menos metade da differença, he igual á menor.

Atéqui temos dito o que basta, e na resoluçaõ dos problemas seguintes se faráõ familiares, e mais fixas as regras, que ficaõ dadas. CA-

CAPITULO VII.

Da resoluçaõ de varios problemas.

45 PAra mostrar com mayor extensaõ o uso do methodo, que atéqui temos ensinado, mostraremos neste capitulo por hum modo abstracto alguns problemas, os quaes se pòdem aplicar mais particularmente a outros sugeitos, como se verà no fim do primeiro problema.

Problema I.

DIvidir o numero 100 em taes duas partes, que a sua differença seja 40.

46 Chame-se Z a parte mayor de 100, e X a parte menor; porque a differença he 40: logo teremos esta dobrada igualaçaõ $X + 40 = Z$, ou $Z - 40 = X$; e assim poderemos substituir $X + 40$ em lugar de Z, ou $Z - 40$ em lugar de X.

Para achar huma segunda igualaçaõ, por meyo da qual, se acha só huma grandeza incognita, se considére, que segundo a questaõ he porposta $X + Z = 100$, ou $X + X + 40 = 100$, ou $Z + Z - 40 = 100$; e qualquer destas duas igualaçoens póde resolver facilmente a questaõ; porque nesta $X + X + 40 = 100$, se tire 40 de cada parte, e teremos $X + X = 60$, ou $X = 30$; e assim fica sabido o valor de X, que atègora se ignorava. Na igualaçaõ $Z + Z - 40 = 100$, ajuntaremos 40 a cada parte; e resultarà $Z + Z = 140$; e tomando metade, teremos $Z = 70$; e fica sabido o valor de Z. Deste problema se tira hum principio, a ſaber, que duas vezes a menor parte de huma grandeza, e mais a ſua differença com a parte mayor, iguala toda a grandeza: ou duas vezes a parte mayor, menos a ſua differença iguala a toda a grandeza.

Eſte meſmo problema ſe podia propor de hum modo menos abſtracto, dizendo, que dous homens ſe achavaõ entre ambos com certo numero de dinheiro, que importava 100 moedas, e hum delles tinha 40 mais, que o outro; e ſe queria ſaber com quantas ſe achava cada hum delles; porèm para mayor brevidade proporemos os problemas em geral; e cada hum depois os aplicarà como lhe parecer.

Problema II.

DIvidir o numero 100, em taes duas partes, que a mayor ſeja o triplo da menor, e mais 20.

47 Chame-ſe Z a parte mayor, e X a menor; ſegundo a queſtaõ he propoſta, ſerà $3X + 20 = Z$; e em lugar de Z, podemos nós ſubſtituir $3X + 20$; mas porque $X + Z = 100$: logo $X + 3X + 20 = 100$; e tirando 20 de cada parte, reſtará $4X = 80$; e dividindo por 4 hum, e outro membro, teremos $X = 20$; e como $3X + 20 = Z$: logo Z vale 80; e eſtá reſoluta a queſtaõ.

Problema. III.

DIvidir o numero 60, de ſórte, que o primeiro numero, e mais o ſeu quinto com o terço do ſegundo, façaõ 14.

48 Seja X a quinta parte do primeiro numero, e Z o terço do ſegundo numero; ſerá o primeiro 5X com o terço de Z igual a 14, como ſe ſuppoz: logo $14X = \frac{1}{3} Z$; multiplico eſta igualaçaõ por 3, e teremos $42 - 3X = Z$; mas porque $5X + Z = 60$: logo ſubſtituindo $42 - 3X$ em lugar de Z, teremos $5X + 42 - 3X$, ou $42 + 2X = 60$; e tirando 42 de cada parte, reſtaráõ $2X = 18$; e aſſim $X = 9$, e $5X = 45$, e $Z = 15$.

Pela ſuppoſiçaõ, $X + Z = 60$. Pela ſegunda ſuppoſiçaõ $\frac{X}{5} + \frac{Z}{3} = 14$: logo $5X = 14 - \frac{Z}{3}$, ou $X = 70 - \frac{5Z}{3}$: logo $70 - \frac{5Z}{3} + Z = 60$, ou $210 - 5Z + 3Z = 180$, ou $210 - 2Z = 180$, ou $210 - 180 = 2Z$, ou $30 = 2Z$, ou $Z = 15$.

Problema IV.

49 PEdem-ſe dous numeros, dos quaes ſe ſabe, que o menor he o terço do mayor, e que ſe ſe tirar o mais pequeno de 16, e o mayor de 30, os reſtos ſejaõ iguaes.

Seja o menor X, e o mayor Z; pela primeira ſuppoſiçaõ, $3X = Z$, e pela ſegunda $16 - X = 30 - Z$; e ſubſtituindo 3X em lugar de Z, teremos $16 - X = 30 - 3X$; ajuntando X a cada parte, teremos $16 = 30 - 2X$; ajunto 2X a eſta igualaçaõ, e terey $16 + 2X = 30$; e tirando 16 de ambas as partes, ficaõ $2X = 14$; e dividindo por 2, ambos os membros, teremos $X = 7$: e por conſeguinte $3X = 21$.

Problema

Problema V.

BUscaõ-se dous numeros, que tenhaõ entre si a razaõ de 1 para 5, e que ajuntando ao mais pequeno, 4, e ao mayor, 6, fiquem na razaõ de 1 para 3.

50 Seja o menor X, e o mayor Z; e porque X he a quinta parte de Z: logo 5X = Z, ajuntando 4 a X, e 6 a Z, resultarà esta proporçaõ X + 4 . Z + 6 :: 1 . 3, ou esta X + 4 . 5X + 6 :: 1 . 3: logo 3X + 12 = 5X + 6; e tirando de huma, e de outra parte 3X, e 6, restaõ 6 = 2X; e dividindo ambos os membros por 2, restarà 3 = X; e assim 3 serà o valor de X, e 15 o valor de Z.

Pela primeira supposiçaõ X . Z :: 1 . 5; pela segunda X + 4 . Z + 6 :: 1 . 3: Pela primeira supposiçaõ 5X = Z: Pela segunda 3X + 12 = Z + 6, tiro Z de cada parte, e restará 3X + 6 = Z: logo 3X + 6 = 5X: logo 6 = 2X,

Problema VI.

ESta grandeza X − 30, he o triplo de X − 100: pede-se o valor de X.

51 Por quanto X − 30 he o triplo de X − 100, será X − 30 = 3X − 300, ajuntando 30 a cada parte, teremos X = 3X − 2700; ajunto a cada parte 270, e teremos X + 270 = 3X, e tirando X de cada parte, ficaõ 270 = 2X: dividaõ-se por 2 os termos desta igualaçaõ, e teremos 135 = X, que he o numero, que se buscava.

Proble-

Problema VII.

DIvidir 100 em taes duas partes, que o terço da primeira com o quinto da ſegunda, façaõ 30.

52 Seja a primeira parte X, e a ſegunda Z: logo $100 - X = Z$, e $100 - Z = X$: pela ſuppoſiçaõ o terço da primeira parte X com o quinto de Z, ſegunda parte, he igual a 30: logo teremos eſta igualaçaõ $\frac{1}{3}X + \frac{1}{5}100 - X = 30$, e reduzindo eſta igualaçaõ a termos mais ſimples, ſe multiplicaráõ ambos os membros por 15, que he o numero, que póde ſer medido exactamente por 3, e por 5; e aſſim multiplicando primeiramente o ſegundo membro por 15, reſultaràõ 450, e multiplicando o outro membro por 15, começando por $\frac{1}{3}X$, darà $\frac{15}{3}$, que ſaõ 5 inteiros, ou $5X$; e logo multiplicando o $\frac{1}{5}100 - X$ por 15, darà $300 - 3X$: logo teremos eſta igualaçaõ $5X + 300 - 3X = 450$; e tirando 300 de hum, e outro membro, reſtaõ $2X = 150$, e dividindo por 2 reſtará $X = 75$: logo Z valerá 25, que he o que falta para 100.

Problema VIII.

BUſca-ſe hum numero, que junto a 100, e a 20, fique na razõ de 1 para 3.

53 Seja o numero buſcado X; e pela ſuppoſiçaõ, $20 + X$ ſerá para $100 + X :: 1 . 3$; o producto dos extremos he igual ao producto dos meyos: logo $60 + 3X = 100 + X$; tiro 60, e X de cada parte, e teremos $2X = 40$, e dividindo por 2, teremos $X = 20$, que he o numero, que ſe buſcava.

Problema IX.

COnhecida a differença de duas grandezas, e a razaõ de huma para outra, achar cada huma das grandezas.

54 Seja X a grandeza menor, a differença da mayor á menor ſeja B: logo a mayor ſerá X+B; e ſuppondo, que X.X+B::1.3: logo 3X=X+B; tirando X de cada membro, reſtaráõ 2X=B: logo $X=\frac{B}{2}$; ſe X.X+B::2.3, ſerà 3X=2X+2B, tirãdo 2X de cada parte reſtarà X=2B: a reſoluçaõ deſte problema he geral, ſeja qual for a differença; porque ſempre ſe acharà o valor da incognita.

Problema X.

COnhecida á ſoma de duas grandezas, e o producto de huma por outra, achar o valor de ambas.

55 Para reſolver eſta, e outras ſemelhantes queſtoens, ſe deve ſuppor 2A a ſoma, e a differença 2X; e aſſim a mayor ſerá A+X, e a menor A−X: multiplicando A−X por A+X, o producto AA−XX=B, que ſupponho ſer o producto conhecido, e ajuntando XX a cada parte, teremos AA=B+XX: tire-ſe B de cada membro, e reſtará AA−B=XX: logo tirando B do quadrado de A, a raiz quadrada do reſto ſerà o valor de X.

A expreſſaõ deſte problema he quaſi geral; e por ella ſe pódem reſolver hum grande numero de queſtoens.

Problema

Problema. XI.

DIvidir o numero 100 em taes duas partes, que o producto da mayor Z multiplicada pela menor X, seja para XX, quadrado da menor, como 10 para 1.

56 Como se suppoem, que X he a parte menor, e Z a parte mayor de 100, serà $100 - Z = X$, e $100 - X = Z$: logo multiplicando X por Z, ou pela grandeza, que lhe he igual $100 - X$, o producto $100X - XX$, deve ser para XX, como 10 para 1.

$$100X - XX . XX :: 10 . 1$$

E porque o producto dos extremos he igual ao producto dos meyos: logo $100X - XX = 10XX$; ajunte-se XX a cada membro, e teremos $100X = 11XX$; divida-se esta igualaçaõ por X, e teremos $100 = 11X$, e dividindo a igualaçaõ por 11, o quociente serà 9, e $\frac{1}{11}$: logo X valerà 9 e $\frac{1}{11}$, e Z 90 e $\frac{10}{11}$.

Problema XII.

HUm certo homem despendeo certo numero de moedas, de que se naõ lembra; porém sabe, que o $\frac{1}{2}$ + o $\frac{1}{3}$ + o $\frac{1}{4}$ do dito numero + 22 faziaõ 94.

57 Somem-se estes quebrados, e a soma serà $\frac{26}{24}$: logo segundo a supposiçaõ $\frac{26}{24} + 22 = 94$: tirem-se 22 de cada membro, e restaràõ $\frac{26}{24} = 72$; e porque 72 he igual a $\frac{26}{24}$, a saber, ao $\frac{1}{2}$ + ao $\frac{1}{3}$ + ao $\frac{1}{4}$, o numero incognito, que se busca, que

cha-

chamaremos X, deve ser o inteiro de que 72 he o numerador: logo diremos 26.24::72.X, e multiplicando 72 por 24, e dividindo o producto por 26, o quociente desta divisaõ 66, e $\frac{6}{13}$, he o valor de X, que se buscava.

Problema XIII.

O Numero 576 he hum numero plano: buscaõ-se as suas raizes X, e Z, de que foy produzido, as quaes tem entre si a razaõ de 1 para 4.

58 Pois que pela supposiçaõ X.Z::1.4, e XZ = 576: logo o producto de X por 4 = Z, isto he, 4X = Z; e assim em lugar de XZ podemos substituir 4XX; e como XZ he = 576: logo 4X = 576; divida-se esta igualaçaõ por 4, e teremos XX = 144, e tirando a raiz quadrada de ambos os membros, teremos X = 12, e por conseguinte Z = 48.

Problema XIV.

DAdo o numero 30, achar as suas tres partes X, Y, Z; e só se sabe, que estaõ em progressaõ ∺ X.Y.Z, e que XY.XZ::1.4

59 Para resolver o problema, basta buscar a razaõ das tres partes X, Y, Z do numero 30, e que se suppoem em progressaõ, e se suppoem tambem, que XY.XZ::1.4; e porque XY.XZ::Y.Z: logo Z serà 4 vezes mayor, que Y; e porque X he o primeiro termo da progressaõ, se quizermos, que Z valha 16, Y valerà 4, e Z valerà 1: logo se deve

ve dividir o numero 30 proporcionalmente a esses tres numeros 1, 4, 16, e se acharáõ estes tres numeros 1 e $\frac{9}{21}$, 5 e $\frac{15}{21}$, 22 e $\frac{18}{21}$.

Problema XV.

Sabe-se, que os dous numeros X, e Z saõ taes, que tirando 1 de Z, e ajuntando-o a X, será X ∗ 1 o dobro de Z, e que tirando 1 de X, e ajuntando-o a Z, será $Z * 1 = X - 1$.

60 Pela supposiçaõ, $2Z - 2 = X * 1$: pela segunda supposiçaõ, $Z * 1 = X - 1$; ajunto 1 à cada membro, e teremos $Z * 2 = X$.

Na igualaçaõ $2Z - Z = X * 1$; em lugar de X podemos substituir $Z * 2$, e teremos $2Z - 2 = Z * 3$, e ajuntando 2 a cada membro, teremos $2Z = Z * 5$; tire-se Z de cada parte, e restarà $Z = 5$; e porque $Z * 1$, isto he, $5 * 1 = X - 1$, serà $X = 7$.

Problema XVI.

$X . Z :: 1 . 3$: $ZZ . X :: 6 . 1$: busca-se o valor de X, e de Z.

61 Do modo, que esta questaõ he proposta, X he o terço de Z: logo $Z = 3X$; e porque $ZZ . X :: 6 . 1$, substituindo $3X$, em lugar de Z, teremos $9XX . X :: 6 . 1$; mas o producto dos extremos he igual ao producto dos meyos: logo $9XX = 6X$; divida-se cada hum dos membros por 9, restará $XX = \frac{6X}{9}$, ou $XX = \frac{2X}{3}$; divida-se por X cada hum dos

 membros,

membros, e reſtarà $X = \frac{2}{3}$, e por conſeguinte Z valerà 2, cujo quadrado 4 he 6 vezes mais, que $\frac{2}{3}$

Problema XVII.

2X he a ſoma de duas grandezas incognitas, a ſua differença 2Z, o ſeu producto ſeja B, e C o valor deſſe producto junto com a ſoma dos ſeus quadrados: pede-ſe o valor de cada hum.

62 A menor grandeza ſerà $X - Z$, e a mayor $X + Z$, o ſeu producto ſerà $XX - ZZ$, os ſeus quadrados ſaõ $XX - 2ZZ + ZZ$, e $XX + 2ZZ + ZZ$, eſſes dous quadrados juntos com o producto $XX - ZZ$, fazem a ſoma $3XX + ZZ$; mas pela ſuppoſiçaõ $XX - ZZ = B$: logo $XX - B = ZZ$, e $3XX + ZZ = C$, ou $ZZ = C - 3XX$: logo $XX - B = C - 3XX$, e ajuntando a cada membro $3XX$, teremos $4XX - B = C$, ou $4XX = C + B$, ou $XX = \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}B$.

Problema XVIII.

O Numero 34 he compoſto de dous numeros quadrados 9, e 25; e ſe quer dividir em outros dous numeros quadrados, de ſórte, que o que ſe ajuntar à raiz de hum, ſeja o dobro do que ſe tirar da raiz do outro.

63 A raiz quadrada de 9 he 3, e a de 25 he 5. Para reſolver o problema, he neceſſario achar duas raizes, das quaes huma ſeja menor, e a outra mayor; e aſſim ajunto X à raiz 3; e como da outra raiz ſe ha de tirar o dobro, do que ſe ajuntou à primeira,

meira, serà a segunda raiz $5 - 2X$. O quadrado de $3 + X$ he $9 + 6X + XX$, e o de $5 - 2X$ he $25 - 20X + 4XX$, os quaes quadrados juntos fazem a soma $34 - 14X + 5XX$, que segundo a questaõ he proposta, devem ser iguaes a 34: de que se segue esta igualaçaõ $34 - 14X + 5XX = 34$: ajunte-se $14X$ a cada membro, e teremos $34 + 5XX = 34 + 14X$; tire-se 34 de cada membro, restarà $5XX = 14X$; divida-se esta ultima igualaçaõ por X, e teremos $5X = 14$; divida-se esta igualaçaõ por 5, e teremos $X = \frac{14}{5}$; e assim a primeira raiz serà $3 + \frac{14}{5}$, e a segunda, $5 - \frac{28}{5}$, que reduzida he $\frac{3}{5}$; o quadrado da primeira he $33, e \frac{16}{25}$ e o da segunda $\frac{9}{25}$, que somados fazem 34.

Problema XIX.

PEdem-se dous numeros quadrados, cuja soma seja tambem numero quadrado.

64. Para resolver o problema tomaremos hum numero quadrado, que seja impar, como 9, e lhe tiraremos a unidade, e o resto 8 se divida por 2, que darà no quociente 4; e serà a raiz do quadrado 16; e assim 9, e 16 saõ os dous numeros pedidos, que somados fazem 25, numero quadrado: o mesmo seria se tomassemos o quadrado impar 25, e tirando-lhe a unidade, e partindo o resto 24 por 2, o quociente 12, raiz de 144, que juntos com os 25 faz 169, numero quadrado.

Problema. XX.

PEdem-ſe tres numeros quadrados, que a ſua ſoma ſeja tambem numero quadrado.

65 Tomem-ſe dous numeros quadrados, cuja ſoma ſeja impar, como 9, e 16, que ſomados fazem 25; deſta ſoma ſe tire a unidade, e o reſto 24 ſe divida por 2, e darà no quociente 12, raiz de 144; e aſſim 9, 16, 144 ſaõ os tres numeros pedidos, cuja ſoma 169 he numero quadrado.

Problema XXI.

PEdem-ſe dous numeros, que multiplicados cada hum por ſi meſmo, os dous productos façaõ huma unidade.

66 Tomem-ſe dous numeros quadrados, cuja ſoma ſeja tambem numero quadrado, a ſaber 9, e 16, que fazem 25; a ſua raiz 5 ſerá denominador dos numeros, que ſe pedem; e por numeradores as duas raizes dos dous numeros quadrados, e aſſim ſeràõ os dous numeros pedidos $\frac{3}{5}$, e $\frac{4}{5}$, que multiplicados cada hum por ſi meſmo, a ſoma he igual à unidade.

Problema XXII.

PEdem-ſe dous numeros, que multiplicados cada hum por ſi meſmo, as duas multiplicaçoens façaõ 900, ou qualquer outro numero quadrado, que ſe quizer.

67 To-

67 Tome-se a raiz quadrada de 900, e se tomem tambem dous numeros quadrados, cuja soma seja numero quadrado, a saber, 9, e 16, cujas raizes saõ 3, e 4; e logo por regra de 3, diremos, se 5 raiz de 25 (soma de 9, e 16) me daõ 30 $\sqrt{}$ de 900, que me daràõ 3, e que me daraõ 4; feita a regra, acharemos 18, e 24, pelos dous numeros pedidos.

Problema XXIII.

PEde-se hum numero, que tirando-lhe 7, o resto seja numero quadrado, e ajuntando-lhe 15 a soma seja tambem numero quadrado.

68 Some-se 7, e 15, que fazem 22, estes se dividaõ em duas partes, cuja differença seja a unidade, e seràõ 11 e $\frac{1}{2}$, e 10 e $\frac{1}{2}$: quadre-se a menor, e serà o seu quadrado 110 e $\frac{1}{4}$, e ajuntando-lhe o numero 7, fazem 117 e $\frac{1}{4}$, que he o numero pedido; porque tirando-lhe 7, fica numero quadrado, e ajuntando-lhe 15, faz 132 e $\frac{1}{4}$, que tambem he numero quadrado.

Problema XXIV.

PEde-se hum numero, que tirando-lhe 12, o resto seja numero quadrado; e ajuntando-lhe 12, a soma seja tambem numero quadrado..

69 Somem-se os dous numeros 12, e 12, e faràõ 24; quadre-se a quarta parte de 24, e serà 36, e ajuntando-lhe a unidade, fazem 37, para o numero pedido.

Problema XXV.

PEdem-ſe dous numeros, que os ſeus quadrados ſe excedaõ pelo numero 12.

70 Divida-ſe 12 em duas partes, cuja differença ſeja a unidade, como 6 e $\frac{1}{2}$, e 5 e $\frac{1}{2}$, e ſeráõ os dous numeros pedidos.

Problema XXVI.

PEdem-ſe tres numeros, que multiplicados cada hum por ſi meſmo, e juntos os ſeus quadrados, façaõ huma unidade.

71 Buſquem-ſe tres numeros quadrados, cuja ſoma ſeja numero quadrado, como 9, 16, e 144, que ſomados fazem 169, cuja raiz 13 ſe tomarà por denominador das tres raizes dos quadrados buſcados, e ſeráõ os numeros pedidos $\frac{3}{13}$ $\frac{4}{13}$ $\frac{12}{13}$, que multiplicados cada hum por ſi, e juntas as tres multiplicaçoens fazem huma unidade.

Problema XXVII.

PEdem-ſe dous numeros quadrados, cuja ſoma ſeja igual á ſoma das ſuas raizes.

72 Tome-ſe para raiz dos numeros pedidos quaeſquer dous numeros; aſſim como 1, e 2, que ſomados fazem 3, eſtas ſe repartaõ por 5, ſoma dos quadrados dos numeros, que ſe tomaraõ, e deſta divi-

ſaõ ſerá o quociente $\frac{3}{5}$; eſte quociente multiplicado por 1, e por 2, ſeráõ os productos $\frac{3}{5}$, e $\frac{6}{5}$, e eſtes productos ſeràõ as raizes dos dous numeros quadrados, que ſe buſcaõ, e os ſeus quadrados $\frac{9}{25}$, e $\frac{36}{25}$.

Problema XXVIII.

PEde-ſe hum numero quadrado, que ajuntando-lhe 6 faça numero quadrado, e diminuindo-lhe 6, o reſto ſeja tambem numero quadrado.

73 Tomem-ſe dous numeros, cuja ſoma ſeja numero quadrado, e que diminuindo hum do outro, o reſto ſeja tambem numero quadrado, aſſim como 25, e 24; divida-ſe 24 por 6, e dará no quociente 4, e dividindo por 4 o outro quadrado 25, o quociente 6 e $\frac{1}{4}$, ſerá o numero, que ſe buſca.

Com a noticia deſtes numeros, cuja ſoma faça numero quadrado, e tirando hum do outro, ſeja o reſto tambem quadrado, ſe pódem reſolver muitas queſtoens: a eſtes numeros chamaõ *Congruos*, e *Congruentes*; e he neceſſario ſaber, como ſe haõ de buſcar; para o que ſerviráõ os dous exemplos ſeguintes.

EXEMPLO I.

74 PAra achar dous numeros congruo, e congruente, tome-ſe 1, e 2, e quadre-ſe cada hum por ſi meſmo, e ſeráõ os ſeus quadrados 1, e 4, que ſomados fazem 5, cujo quadrado

25 ſe chama congruo. Para achar o congruente ſe ſomem 1, e 2, que fazem 3; dobre-ſe eſte numero, e faz 6, o qual ſe multiplique pelo producto de 1 por 2, e darà 12, e o ſeu duplo 24 ſe chama congruente.

EXEMPLO II.

75 TOme-ſe 2, e 3, e os ſeus quadrados ſeràõ 4, e 9, e quadrando a ſoma 13 dà 169 pelo numero congruo; a ſoma de 2, e de 3 fazem 5, o ſeu dobro, 10: eſte multiplicaráõ por 6, producto de 2 por 3, e darà no producto 60, e o ſeu dobro 120 ſe chama congruente: por eſta regra ſe acharàõ quantos quizerem.

Problema XXIX.

PEde-ſe, que o numero 24 ſe divida em taes duas partes, que a mayor multiplicada por 4, e a menor por 6, os dous productos ſejaõ iguaes.

76 Divida-ſe 24 por 10, ſoma dos dous numeros 4, e 6, e darà no quociente 2, e $\frac{2}{5}$; eſte ſe multiplicarà por 4, e por 6, e os productos 9 e $\frac{3}{5}$, e 14 e $\frac{2}{5}$ ſeràõ as duas partes pedidas.

O meſmo ſe acharia, ſe ſe quizeſſe dividir 24 em taes duas partes, que a menor repartida por 4, e a mayor por 6, os quocientes foſſem iguaes.

Proble-

Problema XXX.

CErto homem ſe poz a negociar, e dobrou o cabedal no primeiro anno, do qual gaſtou 480 cruzados; no ſegundo anno dobrou tambem o cabedal, que lhe tinha ficado, e delle gaſtou os 480 cruzados; no terceiro anno dobrou o cabedal, gaſtando os meſmos 480 cruzados, e ficou ſem dinheiro algum: pergunta-ſe com quanto cabedal entrou?

77 Para reſolver o problema, e todos os ſemelhantes por regra geral, dividaõ-ſe os 480 tres vezes do modo ſeguinte: na metade 240, e na metade de 240, que he 120, e na metade de 120, que ſaõ 60, e a ſoma deſtas metades fazem 420, que he o cabedal, com que entrou.

Problema XXXI.

HUm homem comprou huma peſſa de pano de 80 covados, e vendeo delles tal parte, que os $\frac{2}{5}$ dos covados, que vendeo ſaõ os $\frac{2}{3}$ dos covados que lhe ficaraõ por vender: pergunta-ſe quantos covados vendeo?

78 Para reſolver eſte, e outros ſemelhantes problemas, tome-ſe hum numero, que tenha juſtamente quinto, e terço, como 15, dos quaes ſe tomarà $\frac{2}{3}$ por huma parte, e $\frac{2}{5}$ por outra, que ſaõ 6, e 10, que ſomados fazem 16: dividaõ-ſe 80 por 16, e o quociente 5 ſe multiplicarà ſeparadamente por 6, e por 10, de cuja multiplicaçaõ reſultaõ os pro-

ductos 30, e 50; e assim diremos, que vendeo 50 covados, e ficàraõ 30 por vender.

Problema XXXII.

MAndou hum Principe fazer huma fortaleza, para a qual o primeiro mestre se obrigou a fazella com toda a sua gente em 20 mezes; o segundo em 15; e o terceiro em 12: pergunta-se, trabalhando todos tres juntos, em quantos mezes a acabaràõ?

79 Para resolver o problema, se tomarà pelos 20 mezes $\frac{1}{20}$, pelos 15 mezes $\frac{1}{15}$, e pelos 12 mezes $\frac{1}{12}$: isto feito, se busque hum numero, que tenha estas tres partes, como 60, dos quaes tomando $\frac{1}{20}, \frac{1}{15}, \frac{1}{12}$, teremos estes tres numeros 3, 4, 5, que somados fazem 12: divida-se 60 por 12, e o quociente 5, mostra, que em 5 mezes se acabarà a dita fortaleza, como facilmente se pòde provar.

Problema XXXIII.

PEde-se hum numero, que dividido por 2 sóbre 1, e dividido por 3 sóbrem 2, e dividido por 4 sóbrem 3, e dividido por 5 sóbrem 4, e dividido por 6 sobejem 5, e dividido por 7 naõ sobeje nada.

Multipliquem-se os numeros, que sobejaõ huns pelos outros, os quaes saõ 1, 2, 3, 4, 5, e o producto serà 120, do qual tirando a unidade, restaràõ 119 pelo numero buscado: este problema póde ter va-

varias repostas; porque saõ muitos os numeros, que tem as mesmas propriedades.

Ajuntàraõ-se aqui estes problemas resolutos por arithmetica, por serem capazes de dar abertura para a resoluçaõ de quaesquer outros, considerando-se os meyos, que se buscaraõ para se resolverem.

Regra geral para poder resolver os problemas, sem trabalho de tantas composiçoens de raizes, e sua extracçaõ, principalmente nas igualaçoens compostas de varias potencias.

A Regra geral, de que tratamos, se chama regra de mediaçaõ, que André Puique refere ter achado na Arithmetica de Estevaõ de Rocha, e della nos serviremos sómente nas igualaçoens compostas; porque para as mais basta o que se tem explicado nesta materia; e assim para resolver qualquer igualaçaõ composta, supporemos huma progressaõ dupla, que começe pelo numero 2 desta sórte ∺ 2.4.8.16.32.64.128.256, &c. e logo devemos suppor, que o numero, que se busca (seja qual for) com elle se obrarà segundo os caracteres, que se acharem na igualaçaõ, examinando os caractéres multiplicando-os, ou dividindo-os, como quem faz a prova; e se o numero, que sahir for menor do que se busca, se tomará outro numero mayor na dita progressaõ, com o qual se farà a experiencia, para ver se faz mais, ou menos, do que se pede; e vendo, que por huma parte faz mais, e que por outra faz menos, he preciso, que entre estes dous numeros se ache o buscado; o que melhor se explicarà pelos exemplos seguintes.

EX-

EXEMPLO I.

PEde-ſe hum numero, que multiplicado por ſi meſmo, e ajuntando-lhe o meſmo numero faça 156: ſuppondo, que o tal numero he X, o ſeu quadrado ſerà XX, que junto a X dà eſta igualaçaõ XX + X = 156; eſtando a igualaçaõ deſta ſórte, buſcaremos hum numero, que poſſa ſatisfazer a queſtaõ, e tomando o numero 10, que multiplicado por ſi meſmo faz 100, e ajuntando a eſtes o meſmo numero 10 faz 110, que he menor, que 156; e aſſim pela regra da mediaçaõ tomaremos outro numero mayor, que 10, como 14, que junto ao ſeu quadrado faz 210, que he mais dos 156, e porque 10 faz menos, e 14 faz mais, ſomaremos eſtes dous numeros, que fazem 24; e a ſua metade 12, ou he a que ſe buſca, ou a acharemos em 12, e 10, ou entre 12, e 14; o que naõ póde faltar; porque ajuntando 12 ao ſeu quadrado, faz juſtamente 156: logo 12 he o numero, que ſe pedia.

EXEMPLO II.

PEdem-ſe dous numeros em proporçaõ dupla, e que tirando do ſeu quadrado o numero mayor, o reſto ſeja 225.

Supponhamos, que o numero menor ſeja X, e o mayor ſerà 2X, e tirando o mayor do quadrado do menor, o reſto ſerà XX − 2X = 255.

Eſtando a igualaçaõ deſta ſórte, devemos buſcar hum numero, que tirado do ſeu quadrado, o dobro

bro do meſmo numero, o reſto ſeja 255. Supponhamos, que eſſe numero ſeja 14, tirando do ſeu quadrado o dobro de 14, o reſto ſaõ 168, que he menor, que 255; e aſſim devemos ſuppor hum numero mayor, como 18, e tirando do ſeu quadrado o dobro de 18, o reſto ſaõ 288, que he mayor do que devia ficar; e aſſim ajuntaremos 14, e 18, que fazem 32, e com a ſua metade 16 faremos a experiencia; porque, ou 16 he o numero pedido, ou eſtá entre 16, e 18, ou entre 16, e 14; e para o ſaber, do quadrado de 16 tiraremos 32, dobro dos meſmos 16, e o reſto ſaõ 224, que ainda he menos dos 255; e aſſim ſe ſomaràõ outra vez 18, e 16, que fazem 34, cuja metade he 17; e porque entre 18, e 17, e entre 17, e 16 naõ ha outro meyo em numeros inteiros, ſe ſegue, que 17 he o numero buſcado, e ſerà mayor de 34, que he o ſeu dobro.

EXEMPLO III.

PEdem-ſe dous numeros em proporçaõ tripla, que o cubo do menor junto ao quadrado do mayor, a ſoma ſeja igual a 16928. Sendo o numero menor X, o mayor ſerà 3X, e junto o cubo do menor ao quadrado do mayor darà eſta igualaçaõ XXX + 9XX = 16928.

Eſtando a igualaçaõ deſta ſorte, buſcaremos hum numero, cujo cubo junto com o quadrado, multiplicado por 9, ſeja igual a 16928. Supponhamos, que o numero ſeja 20, e tomando o ſeu cubo junto com o ſeu quadrado, multiplicado por 9, faz hum numero menor, que o que ſe buſca; e aſſim tomaremos 24, e fazendo a prova acharemos, que faz mais, que o numero buſcado; e ſomando 20 com 24, da ſoma 44 tomaremos metade, que ſaõ 22; e aſſim, ou 22 he o numero buſcado, ou eſtá entre 22, e 24, ou entre 22, e 20, faça-ſe a prova, e ſe achará, que ainda faz menos: logo he neceſſario, que eſteja entre 22, e 24, que ſomados fazem 46, cuja metade he 23; e eſte he o numero menor buſcado, e o ſeu triplo 69 ſerá o mayor.

EXEMPLO IV.

PEde-ſe hum numero, que multiplicado por ſi meſmo, e ajuntando a decima parte do meſmo numero, ſeja igual a 57.

Seja o numero X, o ſeu quadrado ſerá XX, e ajuntando a eſte a decima parte de X, ſerá $XX + \frac{X}{10} = 57$, que reduzidos a inteiros, faz $10XX + X = 570$. Eſtando a igualaçaõ deſta ſórte, buſcaremos hum numero, cujo quadrado junto á ſua decima parte ſeja $= 57$; ſupponhamos, que o numero he 76, e quadrando-o, e ajuntando-lhe a decima parte, faz mais, do que devia fazer; e aſſim tomaremos 74; e porque eſte numero ainda faz mais, do que devia fazer, ſomaremos 74 com 76, que fazem 150, cuja metade he 75, que acharemos ſer o numero, que ſatisfaz o problema; porque dividido por 10, em razaõ do caracter mayor da igualaçaõ ſer 10XX, dará no quociente 7 e $\frac{1}{2}$, que he o numero buſcado.

EXEMPLO V.

PEdem-ſe dous numeros em proporçaõ dupla, que o quadrado duplo do menor, multiplicado pelo triplo

triplo do mayor, e do producto tirando o quadrado do mayor, o reſto ſeja 20216.

Supponhamos, que o menor numero ſeja X, o mayor ſerá 2X, o quadrado do duplo do menor ſerá 4XX, eſte multiplicado por 6X, que he o triplo do mayor, faz o producto $24X^3$, dos quaes tirando o quadrado do mayor, dará a igualaçaõ $24X^3 - 4XX = 20216$.

Eſtando a igualaçaõ deſta ſórte, feita a prova, como nos exemplos antecedentes, acharemos, que 9 e $\frac{1}{2}$ he o numero menor, e 19 o mayor; e por eſte modo ſe reſolveràõ por eſta regra de mediaçaõ, outros muitos problemas, com a qual damos fim a eſte tratado, deixando huma mayor indagaçaõ da Algebra, aos que tiverem muito tempo ocioſo para gaſtar nella, ou quizerem ſómente fazer profiſſaõ deſta ſciencia.

F I N I S.

triplo do mayor, e do producto, tirando o quintu[illegible] do mayor, o reſiduo ſeja 20216.

Supponhamos, que o menor numero ſeja X, o mayor ſerá 2X, o quadrado do duplo do menor ſerá 4XX, eſte multiplicado por 6X, que he o triplo do mayor, faz o producto 24XXX, dos quaes tirando o quintuplo do mayor, dará a igualaçaõ 24 [illegible] $-$ [illegible] X = 20216.

Eſtando a igualaçaõ deſta ſorte, feita a prova, como nos exemplos antecedentes, acharemos, que [illegible] he o numero menor, [illegible] o mayor; e por eſte modo ſe reſolveraõ por eſta regra de igualaçaõ, outros muitos problemas, com a qual damos fim a eſte tratado, deixando huma mayor indagaçaõ da Algebra, aos que tiverem muito tempo ocioſo para gaſtar nella, ou quizerem ſómente fazer profiſſaõ deſta ſciencia.

FINIS.

APPENDIX

DE ALGUMAS QUESTOENS particulares.

QUESTAM I.

Das combinaçoens.

COMO nesta terceira parte temos tratado das razoens, e proporçoens, e nellas se funda o conhecimento das combinaçoens, reservàmos tratar dellas neste appendix; porque saõ huma especie de grandeza.

As combinaçoens naõ se fazem, senaõ somando muitas grandezas, ou multiplicando humas por outras; e combinaçaõ he hum modo de tomar quaesquer grandezas de duas em duas, e he o que significa a palavra combinar; mas tambem se estende a tomar as grandezas, tres a tres, quatro a quatro, &c. e assim em geral.

DEFINIC, AM.

COmbinar, he o modo de achar todas as differentes disposiçoens, que pódem ter quaesquer grandezas tomadas com certa ordem.

A experiencia nos moſtra, que as combinaçoens naõ ſaõ ſó huma ſciencia curioſa; mas que tambem tem hum uſo admiravel, e nos daõ a conhecer, que para nos naõ enganarmos nos diſcurſos, que fazemos, he neceſſario fazer exactas diviſoens das couſas, que queremos examinar; a difficuldade eſtà em achar todas as diviſoens, e enumeraçoens neceſſarias.

Toda a arte das combinaçoens conſiſte primeiramente em fazer por partes aquillo, que ſeria impoſſivel fazer tudo de hum jacto, ſervindo-nos primeiramente das combinaçoens mais ſimples, e faceis.

Em ſegundo lugar em fazer por ordem as primeiras combinaçoens.

Em terceiro lugar conſiſte em tirar as conſequencias, do que ſe tem conhecido pelas primeiras combinaçoens. Hum exemplo farà mais claras eſtas tres regras, às quaes ſe reduz toda a arte das combinaçoens; e logo veremos como as primeiras combinaçoens ſimples, e faceis nos deſcóbrem tudo, o que queriamos ſaber das ultimas combinaçoens compoſtas.

E X E M P L O.

SE quizermos por via das combinaçoens ſaber o numero de todas as palavras poſſiveis, que ſe pódem fazer das vinte e duas letras do alfabeto, fazendo humas palavras de duas letras, outras de tres, outras de quatro, até as ultimas ſerem de vinte e duas letras, o faremos facilmente. Eſta propoſiçaõ parece, á primeira viſta, muy difficultoſa; e porèm he muy

muy facil de resolver, fazendo uso das tres regras, que ficaõ dadas.

Primeiramente naõ devemos emprender o fazer de hum jacto o que pertendemos; e assim só começaremos pelas combinaçoens mais faceis; veremos pois, quantas palavras se pódem fazer de duas letras, começando pela letra A, e percorrendo pelas mais letras; e pela segunda regra guardaremos boa ordem, naõ antepondo humas a outras, se naõ em seus proprios lugares; e assim combinando a primeira letra A com todas as mais, vemos que podemos combinar esta letra A, e que teremos vinte e dous nomes compostos de duas letras, desta sórte:

aa, ab, ac, ad, ae, af, ag,
ah, ai, al, am, an, ao, ap,
aq, ar, as, at, au, ax, az;

Isto feito, devemos seguir o que diz a terceira regra, que he de considerar esta primeira combinaçaõ, que he muy simples, e de a considerar com attençaõ, para ver o que dahi se póde concluir; e jà vemos, que o que fizemos com a letra A, o podemos tambem fazer com a letra B, dizendo: ba, bb, bc, &c. e assim ficarà a letra B, tambem vinte e duas vezes combinada com as mais letras; e pois que cada letra se combina em vinte e dous differentes modos, em que sempre guarda o primeiro lugar, pódem-se fazer 22 vezes 22 combinaçoens, a saber, 484 combinaçoens differentes, ou nomes de duas letras; e assim esta primeira combinaçaõ simples, e facil da letra A com as mais letras do alfabeto, nos descobre o numero de todas as palavras, ou nomes de duas letras.

Só

Só esta combinaçaõ nos descobre tudo, o que queriamos saber, fazendo huma pouca de reflexaõ; pois he certo, que multiplicando 484 por 22 teremos 10648, numero de todos os nomes, que se pódem fazer de tres letras, guardando sempre a mesma ordem; e para o de quatro letras, começaremos a a a a, a a a b, a a a c, a a a d, &c. e o numero das palavras de quatro letras ficarà sabido, multiplicando 10648 por 22; e como aqui reina huma certa razaõ, pelo que fica dito (*liv.* 3. *cap.* 1.) das razoens, e proporçoens, fica facil saber o numero de todas as palavras possiveis, que se pódem formar das letras do alfabeto.

Este exemplo só basta para ficar entendida, e explicada toda a arte das combinaçoens; porque sempre se acha huma certa proporçaõ, que facilita as operaçoens, quando se começa pelas mais simples, e se segue huma certa ordem.

Isto verà o curioso em todas as differentes combinaçoens, de que se achaõ nos Authores varios exemplos; mas ao que mais se deve attender, he, ver quaes saõ as combinaçoens mais proprias, para o que intentamos combinar; por exemplo, se nos pedirem em quantos modos se pódem combinar os sete Planetas, tomando dous a dous, tres a tres, &c. até tomar os sete Planetas juntos, os poderemos notar com as sete primeiras letras do alfabeto; mas he necessario advertir, que se a letra A notar o Sol, e B a Lua, se deve considerar, que a b, e b a naõ saõ duas combinaçoens differentes, mas a mesma; mas nas mudanças de ordem seriaõ duas as combinaçones.

Na

Na primeira parte da Logica Racional (*liv.* 3. *cap.* *num.*) fica moſtrado, que as propoſiçoens, de que ſe compoem os ſylogiſmos, ſaõ , ou univerſaes, ou particulares ; e eſtas , ou ſaõ negativas, ou affirmativas. As univerſaes affirmativas ſe notaõ com a letra A , e as negativas com a letra E; e as particulares affirmativas com a letra I , e as negativas com a letra O; e aſſim com tres deſtas quatro letras ſe compoem qualquer ſylogiſmo , que ſignificaõ as ſuas tres propoſiçoens, de ſórte, que para examinar quantos ſylogiſmos ſe poderáõ fazer deſſas quatro letras, bons, ou màos , por huma enumeraçaõ exacta, de ſórte, que nenhum eſcape, devemos examinar em quantos differentes modos eſſas quatro letras ſe pódem combinar , tomadas tres a tres ; e a primeira ſerà aaa, aae , aai; e como ſe deve ſeguir huma ordem, começando por A, acho , que ſe pódem fazer das quatro letras 64 combinaçoens differentes; nas primeiras 16 tem a letra A o primeiro lugar, e o meſmo numero tem a letra E, em primeiro lugar, e o meſmo a letra I, e a letra O, como ſe vê na taboada.

TABOADA.

1. Aaa	17. Eee	33. Iii	49. Ooo
2. Aea	18. Eae	34. Iai	50. Oao
3. Aia	19. Eie	35. Iei	51. Oeo
4. Aoa	20. Eoe	36. Ioi	52. Oio
5. Aee	21. Eaa	37. Iaa	53. Oaa
6. Aii	22. Eii	38. Iee	54. Oee
7. Aoo	23. Eoo	39. Ioo	55. Oii
8. Aae	24. Eea	40. Iia	56. Ooa
9. Aai	25. Eei	41. Iie	57. Ooe
10. Aao	26. Eeo	42. Iio	58. Ooi
11. Aei	27. Eai	43. Iae	59. Oae
12. Aeo	28. Eao	44. Iao	60. Oai
13. Aie	29. Eia	45. Iea	61. Oea
14. Aio	30. Eio	46. Ieo	62. Oei
15. Aoe	31. Eoa	47. Ioa	63. Oia
16. Aoi	32. Eoi	48. Ioe	64. Oie

Feita esta combinaçaõ, escolheraõ os Logicos, segundo as suas regras, quaes eraõ os sylogismos bons, que concluiaõ, e os màos, dos quaes se naõ podia concluir verdade alguma: por este exemplo se vê a grande utilidade das combinaçoens, por meyo das quaes se vem no conhecimento de muitas cousas, que pareceria impossivel descobrir.

QUESTAM II.

Das mudanças de ordem.

AS mudanças de ordem, que se pódem fazer, a respeito da situaçaõ de duas, tres, quatro, ou mais

mais cousas, tem sua utilidade. Como se quizermos descobrir em quantos differentes modos se poderà mudar a ordem de dez homens sentados a huma meza, naõ temos mais, que seguir as mesmas regras, que ficaõ dadas para as combinaçoens, a saber, em primeiro lugar, devemos começar o exame pelas mudanças mais simples. Em segundo lugar, observar huma ordem exacta no exame. Em terceiro lugar, observar se se acha alguma especie de proporçaõ, a qual achada pelas primeiras, e mais faceis mudanças, possamos julgar de todas as outras mais compostas.

Devemo-nos servir das letras do alfabeto, e seguir a sua ordem, e jà vejo, que huma só letra, como A, naõ póde receber mudança alguma; porém junta a B, teremos duas mudanças a b, e b a; e se lhe ajuntarmos huma terceira letra C, como se póde meter esta letra em tres lugares com as letras a b, a saber, no principio, no meyo, e no fim, como c b a, b c a, b a c, já se vê, que as tres letras, ou quaesquer outras tres cousas, se pódem mudar em seis differentes módos; e se lhe ajuntarmos a letra D, como em cada huma das seis mudanças, de que tres letras saõ capazes ha quatro lugares, em que D, póde entrar, como d a c b, a d c b, a c d b, a c b d, he certo, que quatro letras saõ capazes, ou quatro cousas, de quatro vezes seis differentes mudanças, a saber, se pódem mudar de ordem vinte e quatro vezes; e isto basta para percebermos claramente, que cinco cousas saõ capazes de cinco vezes vinte e quatro mudanças, a saber, de cento e vinte; e para saber o numero de mudanças, que pódem ter seis cousas, multiplicaremos 6 por 120, e o producto 720 he o numero das mudanças, que seis cousas pódem

rece-

receber, e 5040, producto de 720 por 7, he o numero de mudanças, que pódem receber 7 letras, ou 7 cousas; e 40320, producto de 5040 por 8, he o numero das mudanças de oito cousas; e 362880, producto de 40320 por 9, he o numero das mudanças de 9 cousas; e finalmente 3628800, producto de 362880 por 10, he o numero de todas as mudanças possiveis, que pódem ter dez homens sentados a huma meza, sendo todas differentes humas de outras.

Este modo de examinar as cousas dá huma grande abertura de entendimento, e o meyo de resolver muitas questoens difficultosas; e he em que consiste toda a habilidade dos Anagrammas, em que qualquer curioso se póde exercitar, seguindo as regras, que ficaõ dadas; e se deve notar, que se no nome, de que se quer fazer Anagramma houver duas letras semelhantes, se devem tomar separadamente, dando a cada huma differente nome.

He cousa digna de grande admiraçaõ ver o prodigioso numero de mudanças, que póde ter hum pequeno numero de cousas, ver, por exemplo, que de hum pequeno numero de figuras se compoem esta indefinita variedade de corpos, de que o mundo he composto, que naõ saõ differentes huns dos outros, que pelas differentes figuras das suas partes.

Quem poderia imaginar, que 10 homens sentados a huma meza podiaõ mudar de lugar 3628800 vezes differentes: a consideraçaõ das combinaçoens, e das mudanças de ordem, naõ ha duvida, que dá grande

grande abertura, e luz ao entendimento costumado a reflectir sobre as materias, de que se quer instruir.

Alguns Authores costumaõ nos seus Elementos propor algumas questoens, que por elles se naõ pòdem resolver, como a trisecçaõ do angulo, a saber, o problema, em que se pede, se divida hum angulo rectilineo em tres partes iguaes; o que naõ he possivel resolver por estes Elementos, por ser problema solido, para cuja resoluçaõ he necessario recorrer a outras linhas mais compostas, do que as de que se trata nestes Elementos.

QUESTAM III.

Se o angulo da contingencia he, ou naõ quantidade?

PAra resolver esta questaõ, que tem sido grandemente disputada, devemos primeiro assentar na definiçaõ do angulo, que deixamos definido (*no 2. liv. da Logica Geometrica num.* 1.) e que Euclides definio, dizendo: que o *angulo rectilineo he a inclinaçaõ de duas linhas rectas, que se tocaõ em hum ponto, e naõ jazem por direito.*

Esta definiçaõ naõ explica bem a natureza do angulo, considerado só pelas linhas, que o fórmaõ; porque estas naõ fazem o angulo mayor, ou menor, por serem mayores, ou menores; e como o angulo he huma quantidade, e naõ póde ser linha; porque a linha lhe naõ determina quantidade, usamos no lugar citado da definiçaõ do insigne Galileo, dizendo: que:

O angulo he o eſpaço indeterminado entre duas linhas rectas, que ſe tocaõ em hum ponto, e produzidas ſe cortaõ.

Eſta definiçaõ he ſem duvida mais propria, que a de Euclides, e da mayor parte dos Geometras; porque explica claramente a natureza do angulo plano rectilineo, que pertence á ſegunda dimenſaõ do corpo. O que ſuppoſto, he facil de reſolver a queſtaõ, e moſtrar, que o angulo, chamado do contacto, ou da contingencia, naõ he angulo; porque entre a tangente de hum circulo, e a linha da ſua circunferencia naõ ha quantidade alguma; porque ſe a houveſſe, ſeria diviſivel; e para ſe dividir, de força ſe havia dividir por huma linha; mas entre a circunferencia do circulo, e a tangente naõ póde haver outra linha, que naõ ſeja a meſma tangente: logo o angulo da contingencia naõ he diviſivel.

Muitos ſe enganaõ com o eſpaço, que ſe vê entre a tangente, e a circunferencia do circulo; porém eſſe eſpaço naõ pertence ao angulo da contingencia; porque naõ tem determinada inclinaçaõ huma linha com outra; e ſe a tangente fizer, por exemplo, o lado de hum quadrado, e ſe continuar do meſmo ponto o lado de hum pentagono, de hum exagono, e de hum indefinito numero de lados, finalmente naõ haverà angulo algum; porque neſſe caſo conſideraõ todos os Geometras o circulo huma figura de indefinitos lados; e Euclides define o angulo da contingencia, o menor de todos os rectilineos poſſiveis: logo naõ he poſſivel aſſignar alli outro angulo: logo pelo meſmo Euclides, naõ he diviſivel o angulo da contingencia.

Se

Se imaginarmos huma linha tangente immovel, e outra, que a toca, e ſe mova á roda della, he evidente, que quando chega a ſe ajuſtar com ella, naõ fórma angulo algum, e até alli veyo ſempre fazendo angulos menores, e menores; e ſe depois de ajuſtada ſe mover outra vez, começará a fazer angulos, que vaõ ſempre creſcendo para mayores: logo paſſou aquella linha pela aniquilaçaõ do angulo; pois de naõ ſer angulo, paſſou a ſer angulo.

Naõ ponho aqui figura, por ſer taõ facil, que qualquer Geometra a póde formar.

Tem havido grande controverſia entre alguns Geometras ſobre o dito angulo do contacto; porèm Gallileo na carta, que eſcreveo a Joaõ Camillo Glorioſi, mathematico Napolitano, a qual eſte imprimio nas ſuas exercitaçoens mathematicas em Napoles no anno de 1639, moſtra Galileo a nulidade do angulo, que huma tangente fòrma com a circunferencia do circulo.

A definiçaõ, que damos ao angulo convem a toda a ſórte de angulos, aſſim mixtilineos, como curvilineos; porque as quantidades deſtes angulos, todas ſe determinaõ por tangentes; por exemplo, a quantidade de hum angulo mixtilineo ſe determina por huma tangente, lançada pelo ponto do lado curvo, e no angulo curvilineo por duas tangentes, lançadas do meſmo ponto, em que as duas curvas ſe tocaõ; e produzidas eſſas linhas do ponto para a outra parte, fórmaõ outro angulo igual ao primeiro; e aſſim concluiremos, que o angulo da contingencia he aſſim chamado impropriamente; mas porque

eſta

esta disputa he frivola, e destas anda cheyo o mundo literario; e que seja, ou naõ seja quantidade, sempre saõ irrefragaveis as demonstraçoens da Mathematica: os que quizerem ver nos Authores esta questaõ, lêaõ Clavio, Taquet, Peletario, e outros celeberrimos Mathematicos.

QUESTAM IV.

Se a unidade he numero.

Estevino, famoso Engenheiro do Principe de Orange, quiz provar, que a unidade era numero, e para o mostrar fez o sylogismo seguinte.

A parte he da mesma natureza que o todo;

A unidade he parte do numero, e da mesma natureza:

Logo a unidade he numero.

E o confirma, porque numero, e multidaõ de unidades he o mesmo sem differença alguma.

Este argumento he vicioso; porque de ter a parte o mesmo nome, que o todo, naõ se segue, que seja o mesmo, nem se segue, que seja da mesma natureza; porque hum soldado he parte de hum exercito, e mais naõ he exercito: a salla he parte de hum palacio, e mais naõ he palacio; e assim bem se póde dar o nome de numero a huma multidaõ de unidades, sem que a unidade tenha o nome de multidaõ, mas sim de parte.

Segun-

Segundo argumento de Estevino.

SE de hum numero dado se naõ tirar nenhum numero, ficará o numero inteiro.

Logo se a unidade naõ he numero, tirando 1 do numero 3, ficará o numero 3 inteiro; o que he absurdo.

A primeira proposiçaõ deste enthymema he ridicula; porque suppoem o mesmo, que está em questaõ; e Euclides lhe negará ficar inteiro o numero dado, quando delle se tira outro numero; porque para naõ ficar o mesmo, basta, que se lhe tire hum numero, ou parte de numero, qual he a unidade.

Se o argumento de Estevino fosse legitimo, poderiamos provar, que tirando de hum circulo dado hum semi-circulo, ficaria o circulo inteiro, pois se lhe naõ tirou nenhum circulo.

Este Author foy grande Engenheiro do seu tempo, e bom Arithmetico, mas muito máo Logico.

QUESTAM V.

Se a unidade he para hum numero, como o ponto para a linha?

ESta questaõ he muito differente da precedente, e de Author da primeira classe, que a resolve da maneira seguinte.

Moſtrando a grande differença, que ha entre huma, e outra, e que naõ ſaõ da meſma natureza; porque a unidade junta ao numero, o faz mayor; e huma linha naõ he mayor, por lhe ajuntarem hum ponto. Da meſma ſórte, tirada a unidade de qualquer numero, o numero naõ fica o meſmo, em lugar, que ſe de huma linha ſe tirar hum ponto, fica a linha do ſeu meſmo comprimento: e a razaõ he; porque o ponto naõ he quantidade diviſivel, e a unidade ſe póde dividir ao infinito.

QUESTAM VI.

Em que conſiſte a proporçaõ armonica?

A Proporçaõ armonica he compoſta da proporçaõ geometrica na primeira comparaçaõ, e na ſegunda da proporçaõ arithmetica.

Quando os membros da Geometria ſaõ taes, que o menor he para o mayor geometricamente, como o exceſſo do termo do meyo he menor, que o exceſſo do mayor ſobre o meſmo termo do meyo; ou como a differença do primeiro, e do ſegundo, para a differença do ſegundo, e do terceiro, reſulta proporçaõ armonica.

Eſtes tres numeros 3, 4, 6, eſtaõ em proporçaõ armonica; porque o menor 3 he metade de 6, como o exceſſo do termo do meyo 4, ſobre o menor 3, he para o exceſſo do mayor 6, ſobre o exceſſo do do meyo 4.

Para ſe entender mais claramente, he neceſſario ſaber, que o exceſſo de hum numero para outro, he a ſua differença; e aſſim nos tres numeros a cima 3, 4, 6, aſſim 3 he para 6, como a differença entte 3, e 4, para a differença entre 6, e 4; e eſtas differenças ſe compáraõ ambas com o termo do meyo; e aſſim como 3 he metade de 6, tambem a differença entre 3, e 4, que he 1, he metade de 2, que he a differença entre 6, e 4.

Eſta proporçaõ ſerve para nos dar a conhecer, como os ſons ſe acordaõ entre ſi agradavelmente; o que ſe acha, quando ſe unem as duas proporçoens. O ſom ſe faz por hum certo movimento tremulo do ar, que ſe communica ao orgaõ dos ouvidos; e eſta impreſſaõ nos cauſa o ſentimento do ſom.

Todo o corpo, que póde dar ao ar hum movimento tremulo, he ſonoro; por exemplo, huma córda de tripa, ou de arame, faz hum ſom quando ſe toca; porque move o ar pelo movimento, que tira a corda da linha recta, em que eſtava, e antes de ſe reſtituir ao repouſo faz varias vibraçoens para huma, e outra parte; e eſſe movimento tremulo do ar faz o ſom.

As vibraçoens, que faz qualquer corda tocada, ſaõ da meſma natureza das que faz qualquer pendulo; como hum pedaço de chumbo ſuſpendido por hum cordel, e em repouſo, ſe lhe derem movimento para qualquer parte, andará muitas vezes de huma parte para outra, fazendo as ſuas idas, e venidas, cada vez menores atè ſe lhe extinguir o movimento, e ficar outra vez em repouſo.

A ex-

A experiencia tem moſtrado, que tres córdas igualmente groſſas, e eſtendidas em hum inſtrumento, cujos comprimentos ſejaõ, como os tres numeros 3, 4, 6, por exemplo, huma de 3 palmos, outra de 4, e outra de 6, fórmaõ os tres principaes ſons acordes da Muſica, a ſaber, a *oitava*, a *quinta*, e a *quarta*, ſendo igualmente tocadas.

Das duas cordas, que ſaõ como 3 para 6, ou como 1 para 2, a mais curta córda farà duas vibraçoens no meſmo tempo, que a mais comprida naõ farà mais, que huma vibraçaõ; e eſte ſom faz a oitava. Das tres cordas, as duas, que ſaõ huma para a outra, como 6 para 4, ou 3 para 2, a mais curta farà tres vibraçoens, e a mais comprida ſó duas; e a eſte ſom chamaõ quinta. E ſe duas deſſas tres córdas, ſendo tocadas, a mais curta fizer quatro vibraçoens, em quanto a mais comprida naõ faz mais, que tres no meſmo tempo, eſte ſom acórde faz a quarta.

A proporçaõ armonica ſe póde explicar deſta ſórte:

$$3 . 6 :: 4 - 3 . 6 - 4.$$
$$\text{ou } 3 . 6 :: 1 . 2$$

Porque 1 he a differença entre 4, e 3; e 2 he a differença entre 6, e 4.

DAdos dous termos de huma proporçaõ armonica, achar o terceiro.

Sejaõ os termos dados 12, e 5, chamaremos ao termo buſcado X; e aſſim os tres termos ſeràõ 12 . 5 . X; e ſegundo o que fica dito faràõ eſta proporçaõ: 12.

$$12.X :: 12 - 5.5 - X$$

E como $12 - 5 = 7$, podemos pôr

$$12.X :: 7.5 - X$$

O producto dos extremos he igual ao producto dos meyos (*liv.* 3. *prop.* 8. *num.* 44.) e assim multiplicando 12 por $5 - X$, e X por 7, e ajuntando essas grandezas, teremos

$$60 - 12X = 7X,$$

E se segundo as regras, ajuntarmos a cada lado da proporçaõ 12X, teremos $60 = 19X$, e dividindo essas duas grandezas por 19, teremos $\frac{60}{19} = X$; e assim $\frac{60}{19}$ he o terceiro termo buscado.

Quando a dous termos em proporçaõ armonica se busca hum terceiro termo, devemos advertir, que he impossivel achar esse terceiro termo, quando a proporçaõ he para sobir; o que se conhece todas as vezes, que a differença entre dous termos dados, he mayor, que o primeiro termo; por exemplo, dados estes dous termos armonicos 5.12, a differença he 7, mayor que 5, primeiro termo; e neste caso, e em outro qualquer semelhante, he impossivel achar terceiro termo.

Supponhamos, que queremos achar hum terceiro termo a estes dous 5.12, chamaremos ao terceiro termo buscado X, e seràõ em proporçaõ armonica 5.12.X, e teremos, segundo a regra,

$$5.X :: 12 - 5.X - 12.$$

Mas X — 12 = 7; e 7, aſſim como he mayor, que 5, tambem X — 12 devia ſer mayor, que X; o que he impoſſivel ſer a parte mayor, que o todo; e aſſim nenhuma proporçaõ armonica póde ſobir, ou augmentar.

Pelo contrario, toda a proporçaõ armonica póde diminuir ao infinito: ſejaõ eſtes numeros 4.6: 12 em proporçaõ armonica, a ſaber,

4.12::6—4.12—6

Que vale o meſmo, que 4.12::2.6.

E o meſmo ſe acharà com quaeſquer outros numeros dados, com condiçaõ, que a differença entre os dous numeros primeiros naõ ſeja mayor, que o primeiro termo; como neſte exemplo, 4.6.12, a differença entre 4, e 6, he 2, menor, que 4.

Para achar muitos termos em proporçaõ armonica, facilmente os deſcobriremos; ſe dividirmos o numero 60 pela progreſſaõ arithmetica 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. e os quocientes da diviſaõ ſeràõ em proporçaõ armonica.

Os quocientes dos ſeis primeiros termos da progreſſaõ arithmetica a cima ſaõ 60. 30. 20. 15. 12. 10, que, como ſe vê, eſtaõ em proporçaõ armonica; porque 60.20::60—30.30—20; e 30.15:: 30—20.20—15; e 20.12::20—15.15—12; e 15.10::15—12.12—10,

Quem quizer mayor numero de numeros em pro-

progreſſaõ armonica, naõ tem mais, que ſeguir a progreſſaõ arithmetica de ſcis para diante; por exemplo, ſe quizerem, que a progreſſaõ chegue a 7 termos, multiplicaremos 60 por 7, e o producto 420 dividiremos pelos ſete primeiros termos da progreſſaõ, e daràõ ſete termos em progreſſaõ, a ſaber, 420.210.140.105.84.70.60, que he o meſmo methodo, de que nos ſervimos para a progreſſaõ precedente; mas he deſcendo, e naõ ſobindo, como fica moſtrado.

F I N I S.

progressaõ arithmetica, naõ tem mais, que seguir a progressaõ arithmetica; de sorte que, por exemplo, se quizeremos, que a progressaõ chegue a 7 termos, multiplicaremos 86 por 7, e o producto naõ dividiremos pelos sete primeiros termos da progressaõ, e daõ sete termos em progressaõ, a saber, [illegible] 102, 97, 92, 86, que he o mesmo methodo, e que naõ ser unes para a progressaõ precedente; mas he descendo, e naõ subindo, como fica mostrado.

FINIS.

INDEX
DOS CAPITULOS, QUE CONTÉM ESTA OBRA.

PARTE I.
DA LOGICA RACIONAL.
LIVRO I.

Da primeira operaçaõ do Entendimento, que he perceber.

LIVRO II.

Das reflexoens da segunda operaçaõ do Entendimento, que he julgar.

LIVRO III.

Da terceira operaçaõ do nosso Entendimento, que he discorrer.

CAPI-

APPENDIX

Da Logica contencioſa.

CAPITULO II.

CAPITULO III.

CAPITULO IV.

CAPITULO V.

CAPITULO VI.

LIVRO II.

CAPITULO I.

CAPITULO II.

CAPITULO III.

CAPITULO IV.

CAPI-

CAPI-

CAPI-

CAPITULO II.

CAPITULO III.

CAPITULO IV.

LIVRO V.

CAPITULO I.

CAPITULO II.

CAPITULO III.

CAPITULO IV.

CAPITULO V.

CAPITULO VI.

CAPITULO VII.

CAPITULO VIII.

LIVRO VI.

CAPITULO I.

CAPITULO II.

CAPITULO III.

CAPITULO IV.

CAPITULO V.

CAPITULO VI.

CAPITULO VII.

FINIS.